Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті

Тақырыбы: **«ЕКІНШІ РЕТТІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУ ҮШІН ШЕКАРАЛЫҚ ШАРТТАРЫ БӨЛІНГЕН ЕСЕП АРҚЫЛЫ ТУЫНДАЙТЫН ҮЙІРТКІНІҢ ТҰРПАТЫ»**

Орындаған Ж.Б.Анарбек

Ғылыми жетекші
ф.-м.ғ.к., PhD Л.К.Жапсарбаева

Үйірткі – кей кездері бастапқы біреуінің нұсқасының жетілдірілген түрі ретінде қарастырылуы мүмкін үшінші функцияны тудыратын, φ және ψ екі функцияларына қолданылатын амал.

$\varphi, \psi: R^n \to R$ екі функциясы – R^n кеңістігінде Лебег өлшемді бойынша инегралданатын болсын. Онда олардың үйірткісі деп

$$(\varphi * \psi)(x) = \int_{R^n} \varphi(y)\psi(x-y)dy = \int_{R^n} \varphi(x-y)\psi(y)dy$$

формуласымен анықталатын $\varphi, \psi: R^n \to R$ функциясын айтады.

Үйірткінің қасиеттері:

1. Коммутативті: $\varphi \cdot \psi = \psi \cdot \varphi$

2.Ассоциативті: $\varphi \cdot (\psi \cdot h) = (\varphi \cdot \psi) \cdot h$

3.Сызықты (дистибутивті және санға көбейту):

a.$(\varphi_1 + \varphi_2) \cdot \psi = \varphi_1 \cdot \psi + \varphi_2 \cdot \psi$

b.$\varphi \cdot (\psi_1 + \psi_2) = \varphi \cdot \psi_1 + \varphi \cdot \psi_2$

c.$(a\varphi) \cdot \psi = a(\varphi \cdot \psi), \forall a \in R^n$.

4.$\varphi_0 \cdot \psi = 0, \forall \psi => \varphi_0 = 0$

Есептің қойылуы:

$L_2(0,1)$ функционалдық кеңістігінде

$$Ay(x) = y'', 0 < x < 1 \qquad (1)$$

дифференциалдық өрнегімен және

$$D(A) = \{y \epsilon W_2{}^2[0,1]: U_1(\mathrm{y}) = 0, U_2(y) = 0\}$$

анықталу облысымен берілген A дифференциалдық операторын қарастырамыз.

Шекаралық шарттар:

$$U_1(y) = y'(0) + ay(0) = by(1)$$
$$U_2(y) = y'(1) + cy(0) + dy(1)$$

СБЕДТ қарастырайық:

$$Ay = f \qquad (2)$$

$A -$ ға A^{-1} кері операторы бар болса $=>$

(2)-теңдеудің шешімі келесідей болады:

$$y = A^{-1}f \quad (3)$$

(2)-теңдеуінің орнына қолайлылық үшін келесі теңдеуді қолданайық:

$$Ay - \lambda y = f =>$$

$$y'' - \lambda y = f \qquad (4)$$

(4)-теңеудің шешімін Владимиров В.С. кітабында:

$$y(x) = \varepsilon * f \qquad (5)$$

үйірткісі түрінде бергені дәлелденген.

(3) және (5) теңдеуден:

$$A^{-1}f = \varepsilon * f$$

аламыз.

$$Ay - \lambda y = f \qquad (6) \quad =>$$

$$y = (A - \lambda I)^{-1} f$$

мұндағы $(A - \lambda I)^{-1}$– А операторының резольвентасы.

Сонда

$$(A - \lambda I)^{-1} f = \varepsilon * f$$

(6) теңдеуінің шешімі Грин функциясы арқылы келесі түрде жазылады:

$$y(x,\lambda) = \int_0^1 G(x,t,\lambda) f(t) dt$$

мұндағы $G(x,t,\lambda) = \frac{H(x,t,\lambda)}{\Delta(\lambda)}$, $\Delta(\lambda)$ және $H(x,t,\lambda)$ функциялары біртекті $y'' - \lambda y = 0$ дифференциалдық теңдеулер шешімінің іргелі жүйелері арқылы жазылады

$$(A-\lambda I)^{-1} f(x)=c\int_0^x (x-t)g(\tau-t)f(t)d\tau+b\int_x^1 (x-t)g(\tau-t)f(t)d\tau-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^1 g(1-t-x)f(t)dt-\frac{1}{2}\int_0^x g(1+t-x)f(t)dt+\frac{a-d}{2}\int_0^x (1+t-x-\tau)g(\tau)f(t)d\tau-\frac{a+d}{2}\int_0^1 (1-x-t-\tau)g(\tau)f(t)d\tau+$$

$$+2(ad-bc)\int_0^1 t(1-x-\eta)g(\eta)f(t)d\eta. \qquad (2)$$

*

Анықтама. (2) теңдігінің оң жағы А операторымен туындалған үйірткі деп аталады және g мен f функцияларының бинарлы операциясын білдіреді. g және f екі функциясының үйірткісі $(g *_A f)(x)$ арқылы белгіленеді.

Теорема. a) Кез келген $f, g \epsilon L_2(0,1)$ кезінде енгізілген үйірткі сызықты емес, коммутативті, ассоциативті;

b) А операторының резольвентасы үйірткілік көрсетілімге ие: $(A-\lambda I)^{-1} f = g *_A f$

c) Егер $g \epsilon D(A)$ және $A(g *_A f) = Ag *_A f$ теңдігі тура болса, f, g функцияларының үйірткісі А операторының анықталу облысына жатады;

d) А операторымен туындалатын үйірткі $g \epsilon L_2(0,1)$ кезінде $g *_A f \equiv 0$ тура болса, онда $f \equiv 0$.