Тема: Системы массового обслуживания (СМО)

1 Понятие СМО

2 Классификация СМО

3 Характеристики СМО

4 Структура обслуживания системы

5 Основные критерии эффективности функционирования СМО

6 Характеристики основных моделей СМО

1 Понятие СМО

Основоположник теории массового обслуживания датский ученый **А.К. Эрланг**

- 1909 г. «Теория вероятностей и телефонные переговоры»

Термин *теория массового обслуживания* предложен **А.Я. Хинчиным**

- 1932 г. «Математическая теория стационарной очереди»
- 1933 г. «О среднем времени простоя станков»
- 1963 г. «Работы по математической теории массового обслуживания»

В зарубежной литературе чаще используется термин *теория очередей*

Хинчин Александр Яковлевич

Системы массового обслуживания – это такие системы, в которые в случайные моменты времени поступают заявки на обслуживание, при этом поступившие заявки обслуживаются с помощью имеющихся в распоряжении системы каналов обслуживания.

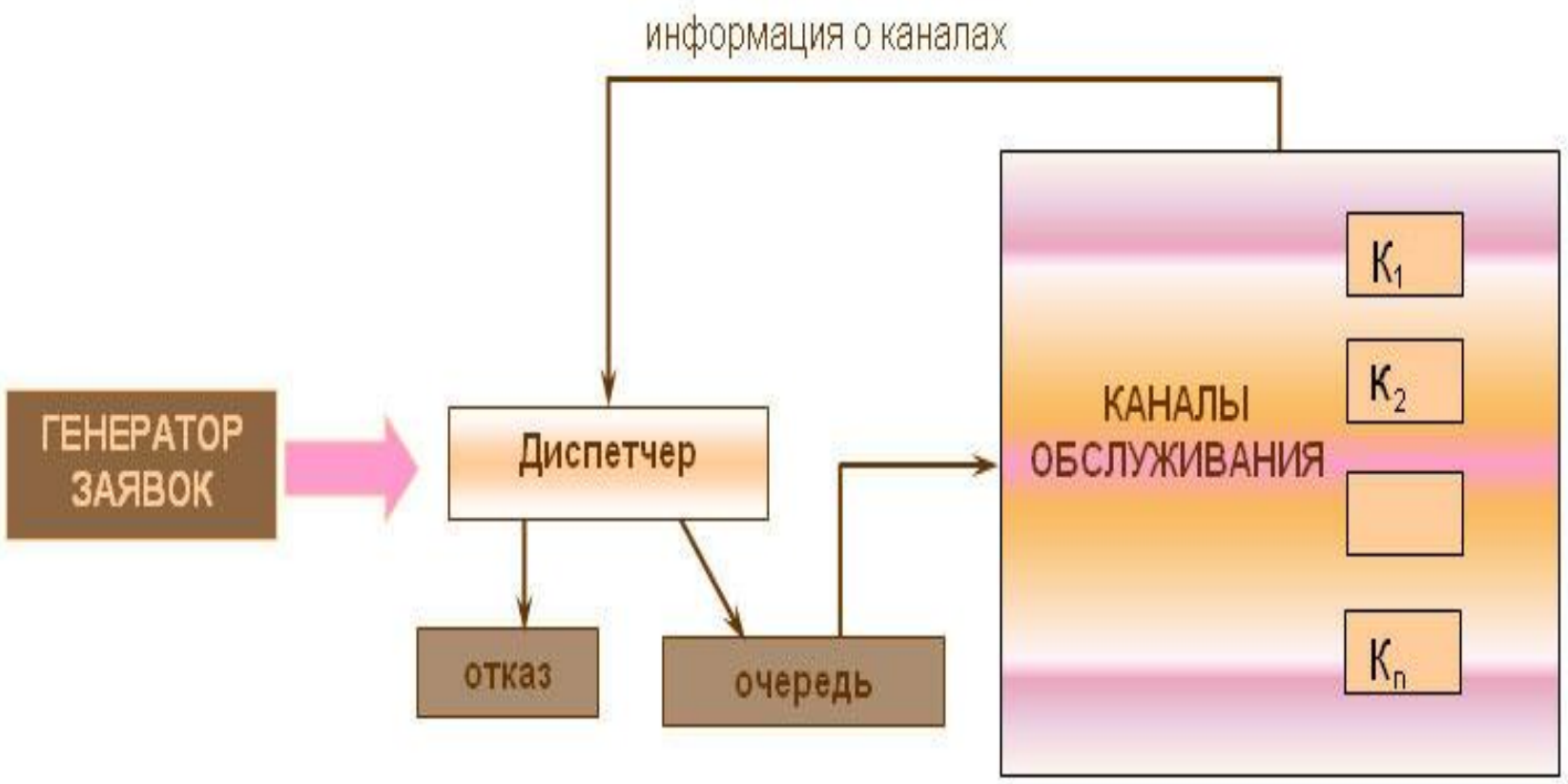
Цель теории массового обслуживания - выработка рекомендаций по рациональному построению СМО, рациональной организации их работы и регулированию потока заявок для обеспечения высокой эффективности функционирования СМО.

Примеры СМО

- Обслуживание покупателей в сфере розничной торговли
- Транспортное обслуживание
- Медицинское обслуживание населения
- Ремонт аппаратуры, машин, механизмов, находящихся в эксплуатации
- Обработка документов в системе управления
- Туристическое обслуживание

СМО	Узлы	Требования
Банк	Кассы	Клиенты
Больница	Врачи Санитары Койки	Пациенты
Производство	Станки Рабочие	Детали
Аэропорт	Выходы на взлетно-посадочные полосы Пункты регистрации	Пассажиры

Схема работы СМО



Генератор заявок – объект, порождающий заявки: улица, цех с установленными агрегатами. На вход поступает поток заявок.

Диспетчер – человек или устройство, которое знает, что делать с заявкой. Узел, регулирующий и направляющий заявки к каналам обслуживания. Диспетчер:

принимает заявки;

формирует очередь, если все каналы заняты;

направляет их к каналам обслуживания, если есть свободные;

дает заявкам отказ (по различным причинам);

принимает информацию от узла обслуживания о свободных каналах;

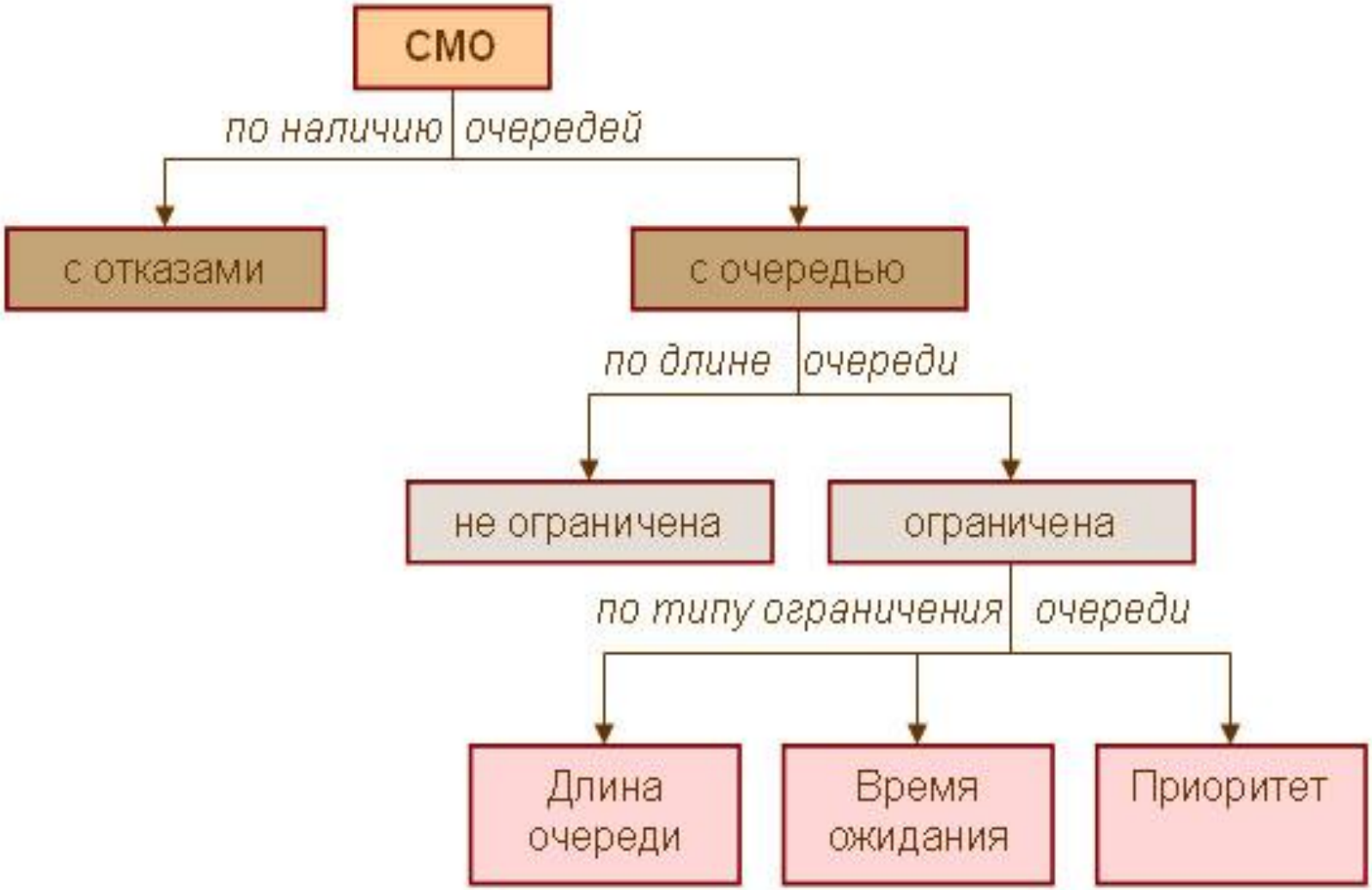
следит за временем работы системы.

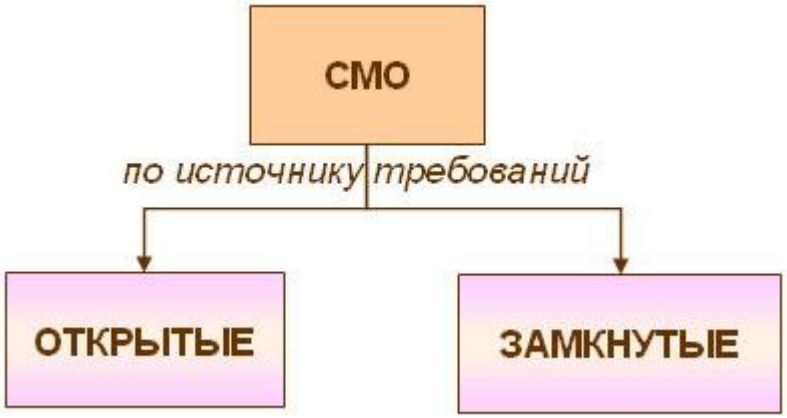
Очередь – накопитель заявок. Очередь может отсутствовать.

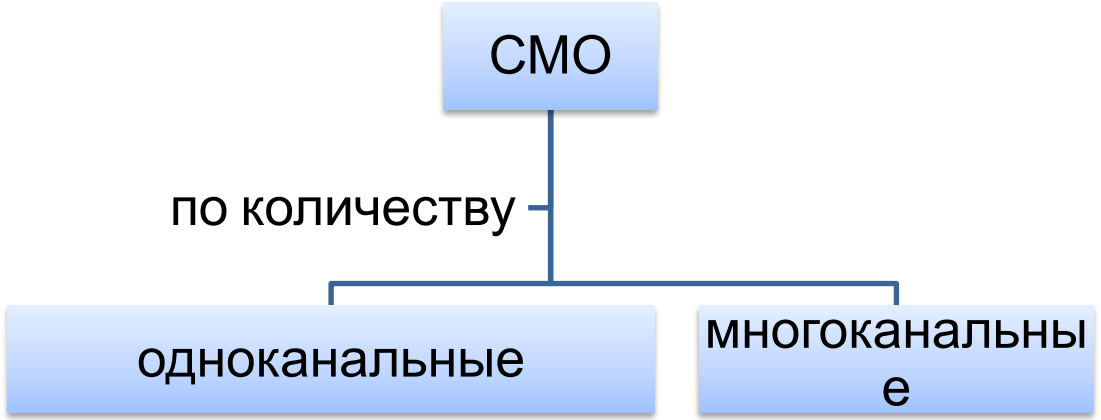
Узел обслуживания состоит из конечного числа каналов обслуживания. Каждый канал имеет 3 состояния: свободен, занят, не работает. Если все каналы заняты, то можно придумать стратегию, кому передавать заявку.

Отказ от обслуживания наступает, если все каналы заняты (некоторые в том числе могут не работать).

2 Классификация СМО




СМО
по источнику требований
ОТКРЫТЫЕ
ЗАМКНУТЫЕ


СМО
по количеству
одноканальные
многоканальные

3 Характеристики СМО

Основными характеристиками системы массового обслуживания любого вида являются:

- входной поток поступающих требований или заявок на обслуживание;
- дисциплина очереди;
- механизм обслуживания.

Входной поток

Пусть:

A_i – время поступления между требованиями – независимые одинаково распределенные случайные величины;

$E(A)$ – среднее (МО) время поступления;

$\lambda=1/E(A)$ – интенсивность поступления требований;

Характеристики входного потока:

Вероятностный закон, определяющий последовательность моментов поступления требований на обслуживание.

Количество требований в каждом очередном поступлении для групповых потоков.

Классическая теория массового обслуживания рассматривает так называемый пуассоновский (простейший) поток требований. Для этого потока число требований k для любого интервала времени распределено по закону Пуассона:

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, k \geq 0, t \geq 0 \quad (1)$$

где λ- интенсивность потока требований (число требований за единицу времени).

Дисциплина очереди

Очередь – совокупность требований, ожидающих обслуживания

Дисциплина очереди определяет принцип, в соответствии с которым поступающие на вход обслуживающей системы требования подключаются из очереди к процедуре обслуживания.

Чаще всего используются дисциплины очереди, определяемые следующими правилами:

- **первым пришел – первый обслуживаешься**; (first in first out (FIFO))
- **пришел последним — обслуживаешься первым (**LIFO)
- **случайный отбор заявок**;
- **приоритет:** некоторые находящиеся в очереди

Характеристики очереди

-**ограничение времени ожидания** момента наступления обслуживания (имеет место очередь с ограниченным временем ожидания обслуживания, что ассоциируется с понятием «допустимая длина очереди»);

- длина очереди.

Механизм обслуживания

Механизм обслуживания определяется характеристиками самой процедуры обслуживания и структурой обслуживающей системы. К характеристикам процедуры обслуживания относятся:

- количество каналов обслуживания (*N*);
- продолжительность процедуры обслуживания (вероятностное распределение времени обслуживания требований);
- количество требований, удовлетворяемых в результате выполнения каждой такой процедуры (для групповых заявок);
- вероятность выхода из строя обслуживающего канала;
- структура обслуживающей системы.

Пусть:

S_i – время обслуживания *i*-го требования;

E(S) – среднее время обслуживания;

$\mu=1/E(S)$ – скорость обслуживания требований.

$N\mu$ – скорость обслуживания в системе, когда заняты все устройства обслуживания.

$\rho=\lambda/(N\mu)$ – называется ***коэффициентом использования СМО***, показывает, насколько задействованы ресурсы системы.

T - среднее время пребывания требований в системе

$N=\lambda T$ - среднее количество требований в СМО (закон Литтла)

4 Структура обслуживающей системы

Структура обслуживающей системы определяется количеством и взаимным расположением каналов обслуживания

- С одним устройством обслуживания
- Параллельное обслуживание (многоканальные системы)
- Комбинированное обслуживание

Системы с одним устройством обслуживания

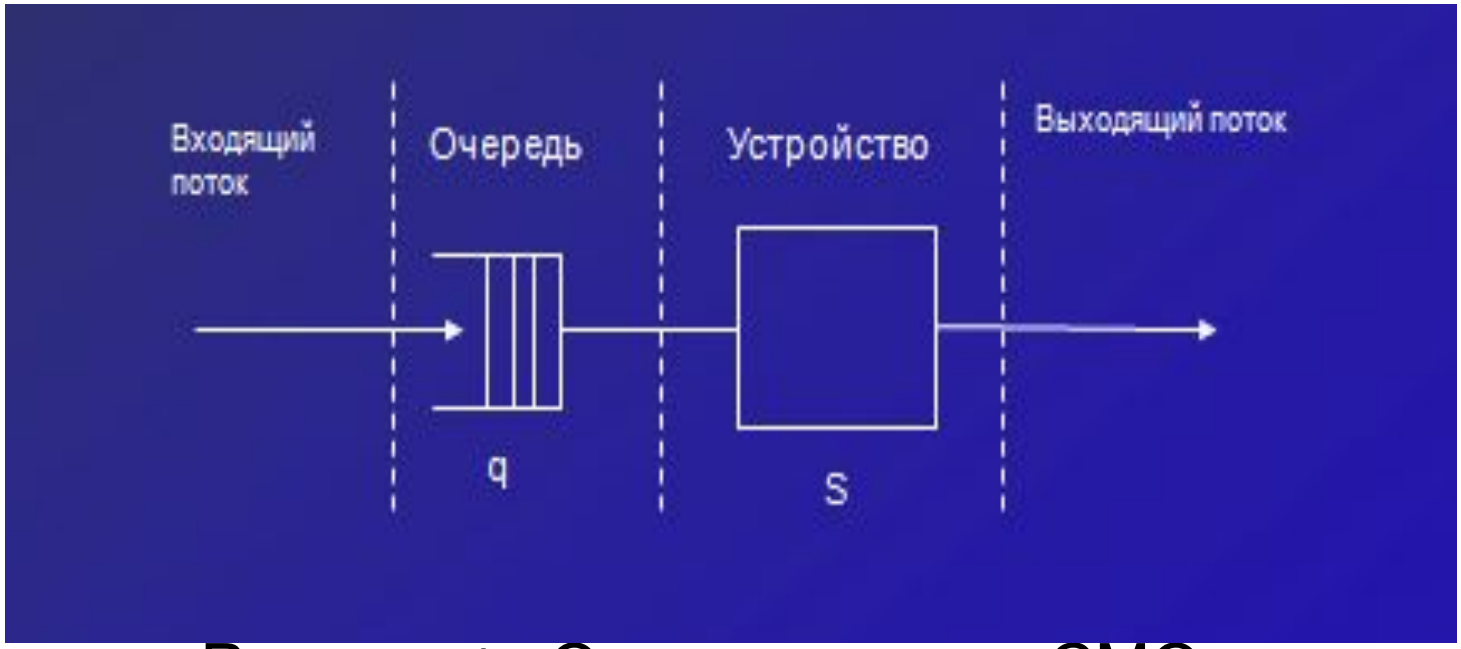


Рисунок 1 - Одноканальная СМО

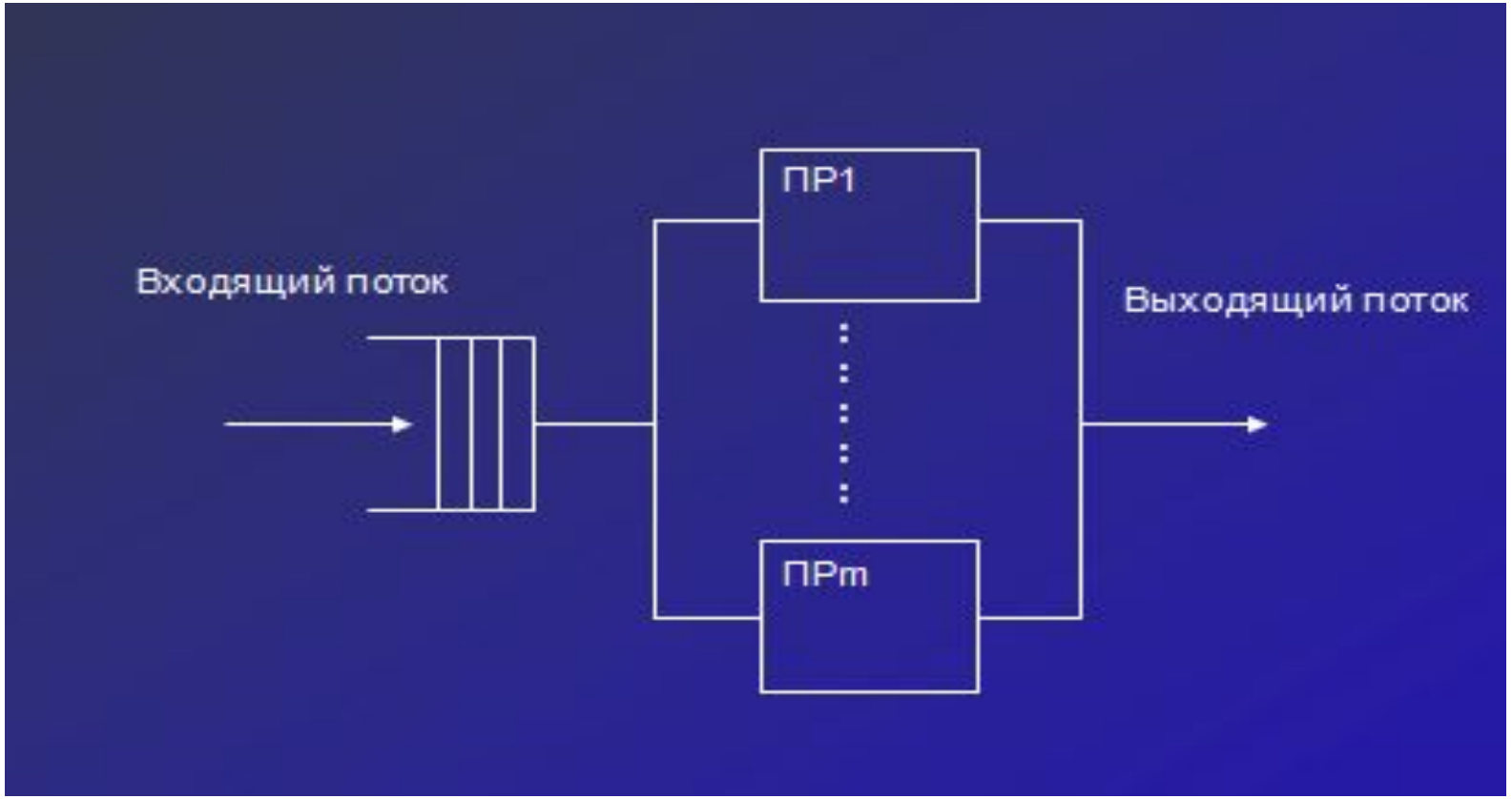


Рисунок 2 – Многоканальное обслуживание

Функциональные возможности любой системы массового обслуживания определяются следующими основными факторами:

- вероятностным распределением моментов поступлений заявок на обслуживание (единичных или групповых);
- мощностью источника требований;
- вероятностным распределением времени продолжительности обслуживания;
- конфигурацией обслуживающей системы (параллельное, последовательное или параллельно-последовательное обслуживание);
- количеством и производительностью обслуживающих каналов;
- дисциплиной очереди.

5 Основные критерии эффективности функционирования СМО

Судить о результатах работы СМО можно по **показателям.**

- вероятность обслуживания клиента системой;
- пропускная способность системы;
- вероятность отказа клиенту в обслуживании;
- вероятность занятости каждого из канала и всех вместе;
- среднее время занятости каждого канала;
- вероятность занятости всех каналов;
- среднее количество занятых каналов;
- вероятность простоя каждого канала;
- вероятность простоя всей системы;
- среднее количество заявок, стоящих в очереди;
- среднее время ожидания заявки в очереди;
- среднее время обслуживания заявки;
- среднее время нахождения заявки в системе.

Вероятность немедленного обслуживания поступившей заявки ($Р_{обсл}=К_{обс}/К_{пост}$);

Вероятность отказа в обслуживании поступившей заявки ($Р_{отк}=К_{отк}/К_{пост}$);

Очевидно, что $Р_{обсл} + Р_{отк}=1$.

Задержка – один из критериев обслуживания СМО, время проведенное заявкой в ожидании обслуживания.

Пусть:

D_i – задержка в очереди требования i;

$W_i=D_i+S_i$ – время нахождения в системе требования i.

Установившаяся средняя задержк в очереди

$$d = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} D_i}{n}$$

Установившееся среднее время на требования в СМО

$$w = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} W_i}{n}$$

Пусть:

Q(t) – число требований в очереди в момент времени *t;*

L(t) – число требований в системе в момент времени *t*(*Q(t)* плюс число требований, которые находятся на обслуживании в момент времени *t.*

Тогда рассчитывают показатели (если существуют)

Установившееся среднее по времени число требований в очереди;

$$Q = \lim_{T \to \infty} \frac{\int_0^T Q(t)dt}{T}$$

Установившееся среднее по времени число требований в системе.

$$L = \lim_{T \to \infty} \frac{\int_0^T L(t)dt}{T}$$

Заметим, что ρ<1 – обязательное условие существования *d, w, Q* и *L* в системе массового обслуживания.

К наиболее общим и нужным результатам для систем массового обслуживания относятся уравнения сохранения

$$Q = \lambda d \qquad L = \lambda w$$

Кроме этого можно также говорить о таких характеристиках, как:

абсолютная пропускная способность системы – $A=P_{обсл}*\lambda$;

относительная пропускная способность системы – $Q=\mu/(\mu+\lambda)$

Средняя задержка в очереди для системы массового обслуживания

$$d = \frac{\lambda\{\sigma(S)^2 + E(S)^2\}}{2[1 - \lambda E(S)]}$$

В России эта формула известна как формула Поллачека–Хинчина, за рубежом эта формула связывается с именем Росса (Ross).

• Для моделирования систем массового обслуживания важно знать характер потока заявок.
• Для многих потоков в справочниках можно найти формулы для расчёта характеристик СМО.
• Ошибка в определении характера потока заявок приводит к ошибке в оценке параметров СМО и, как следствие, либо к избыточным вложениям в их создание, либо к неработоспособности СМО.

Поток Пуассона (простейший)

Характеризуется:

- экспоненциальным (показательным) распределением продолжительности промежутков между возникновением транзактов
- пуассоновским распределением вероятности возникновения *n* транзактов за период *t*

Поток Эрланга порядка *k*

Продолжительность промежутков между возникновением транзактов представляет собой сумму *k* независимых случайных величин, каждая из которых распределена по экспоненциальному закону

Поток Пальма

Стационарный ординарный поток, в котором длительность промежутков времени между возникновением транзактов является независимой случайной величиной

Плотность распределения интервала времени между возникновением двух транзактов в потоке Эрланга

$$f(\tau) = \frac{\lambda(\lambda\tau)^{k-1}}{(k-1)!} e^{\lambda\tau}$$

λ – среднее число заявок в единицу времен и

k – порядок потока Эрланга

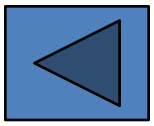
τ – длительность промежутка времени

Дискретное распределение Пуассона

$$p(k,\tau) = \frac{(\lambda\tau)^k}{k!} e^{-\lambda\tau}$$

λ среднее число заявок в единицу времен и

k число транзактов, возникших в течение промежутка времени τ



Экспоненциальное распределение

$$F(\tau) = \frac{1}{t} \cdot e^{-\frac{1}{t} \cdot \tau}$$

t – средняя продолжительность времени между транзактами

τ – заданный промежуток времени между транзактами

$F(\tau)$ – вероятность того, что промежуток времени между транзактами не превысит величины τ

6 Характеристики основных моделей СМО

• 6.1 СМО с отказами

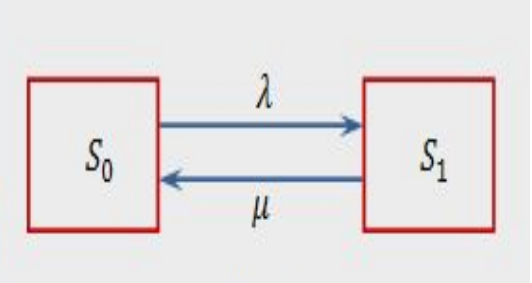
В качестве показателей эффективности СМО с отказами будем рассматривать:

1) A — ***абсолютную пропускную способность СМО***, т.е. среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени;
2) Q — ***относительную пропускную способность***, т.е. среднюю долю пришедших заявок, обслуживаемых системой;
3) Ротк— ***вероятность отказа***, т.е. того, что заявка покинет СМО необслуженной;
4) k — ***среднее число занятых каналов*** (для многоканальной системы).

Одноканальная система (СМО) с отказами

Рассмотрим задачу. Имеется один канал, на который поступает поток заявок с интенсивностью λ. Поток обслуживании имеет интенсивность μ. Найти предельные вероятности состояний системы и показатели ее эффективности.

Система (СМО) имеет два состояния: S0— канал свободен, S1— канал занят. Размеченный граф состояний представлен на рис.



В предельном, стационарном режиме система алгебраических уравнений для вероятностей состояний имеет вид

$$\begin{cases} \lambda \cdot p_0 = \mu \cdot p_1, \\ \mu \cdot p_1 = \lambda \cdot p_0, \end{cases}$$

- т.е. система вырождается в одно уравнение. Учитывая нормировочное условие p0+p1=1, найдем из системы предельные вероятности состояний

$$p_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \quad p_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu},$$

Где

p0– вероятность того, что заявка будет обслужена.

Нетрудно убедиться, что для одноканальной СМО с отказами вероятность $P_0(t)$ есть не что иное, как ***относительная пропускная способность*** системы (Q).

Действительно, $P_0(t)$ – вероятность того, что в момент *t* канал свободен и заявка, пришедшая к моменту *tt*, будет обслужена, а следовательно, для данного момента времени *t* среднее отношение числа обслуженных заявок к числу поступивших также равно $P_0(t)$.

P1 - Вероятность того, что в обслуживании будет отказано (Ротк) .

Абсолютная пропускная способность канала

.

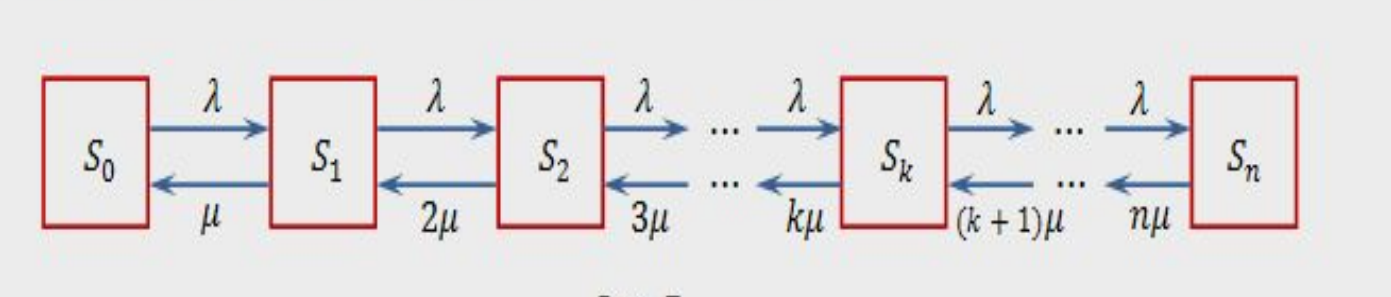
$$A = \lambda \cdot p_0 = \frac{\lambda \cdot \mu}{\lambda + \mu}$$

Многоканальная система (СМО) с отказами

Рассмотрим классическую ***задачу Эрланга***. Имеется **n** каналов, на которые поступает поток заявок с интенсивностью **λ** . Поток обслуживании имеет интенсивность **μ.** Найти предельные вероятности состояний системы и показатели ее эффективности.

Система **S** (СМО) имеет следующие состояния S1,…Sk,..,Sn (нумеруем их по числу заявок, находящихся в системе) где **Sk** — состояние системы, когда в ней находится **k** заявок, т.е. занято **k** каналов.

Граф состояний СМО соответствует процессу гибели и размножения и показан на рис.



Поток заявок последовательно переводит систему из любого левого состояния в соседнее правое с одной и той же интенсивностью λ . Интенсивность же потока обслуживании, переводящих систему из любого правого состояния в соседнее левое состояние, постоянно меняется в зависимости от состояния.

Действительно, если СМО находится в состоянии S2 (два канала заняты), то она может перейти в состояние S1(один канал занят), когда закончит обслуживание либо первый, либо второй канал, т.е. суммарная интенсивность их потоков обслуживании будет 2μ . Аналогично суммарный поток обслуживании, переводящий СМО из состояния S3 (три канала заняты) в S2, будет иметь интенсивность 3μ, т.е. может освободиться любой из трех каналов и т.д.

Предельная вероятность состояния

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2!\mu^2} + \ldots + \frac{\lambda^k}{k!\mu^k} + \ldots + \frac{\lambda^n}{n!\mu^n}\right)^{-1},$$

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0$$

– вероятность, что занят один канал обслуживания;

$$p_2 = \frac{\lambda^2}{2\mu^2} p_0$$

– вероятность, что заняты два канала обслуживания;

и т. д.

Величина

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

называется ***приведенной интенсивностью потока заявок*** или ***интенсивностью нагрузки канала***. Она выражает среднее число заявок, приходящее за среднее время обслуживания одной заявки.

Теперь

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^k}{k!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1},$$

$$p_1 = \rho \cdot p, \quad p_2 = \frac{\rho^2}{2!} \cdot p_0, \quad \ldots, \quad p_k = \frac{\rho^k}{k!} \cdot p_0, \quad \ldots, \quad p_n = \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0.$$

Формулы для предельных вероятностей получили названия ***формул Эрланга*** в честь основателя теории массового обслуживания.

Вероятность отказа СМО есть предельная вероятность того, что все я каналов системы будут заняты, т.е.

$$P_{\text{otk}} = \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0.$$

Относительная пропускная способность — вероятность того, что заявка будет обслужена:

$$Q = 1 - P_{\text{otk}} = 1 - \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0.$$

Абсолютная пропускная способность:

$$A = \lambda \cdot Q = \lambda \cdot \left(1 - \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0\right).$$

Среднее число занятых каналов $\overline{k}$ есть математическое ожидание числа занятых каналов:

$$\overline{k} = \sum_{k=0}^{n} (k \cdot p_k),$$

Однако среднее число занятых каналов можно найти проще, если учесть, что абсолютная пропускная способность системы есть не что иное, как интенсивность ***потока обслуженных*** системой заявок (в единицу времени). Так как каждый занятый канал обслуживает в среднем заявок (в единицу времени), то среднее число занятых каналов

$$\overline{k} = \frac{A}{\mu}$$

или:

$$\overline{k} = \rho \cdot \left(1 - \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0\right).$$

6.2 СМО с ожиданием (очередью)

В качестве показателей эффективности СМО с ожиданием, кроме уже известных показателей —**A** абсолютной и **Q** относительной пропускной способности, **Ротк** вероятности отказа , среднего числа занятых каналов **к** (для многоканальной системы) будем рассматривать также следующие:

1) среднее число заявок в системе;
2) среднее время пребывания заявки в системе;
3) среднее число заявок в очереди (длина очереди);
4) среднее время пребывания заявки в очереди;
5) вероятность того, что канал занят (степень загрузки канала).

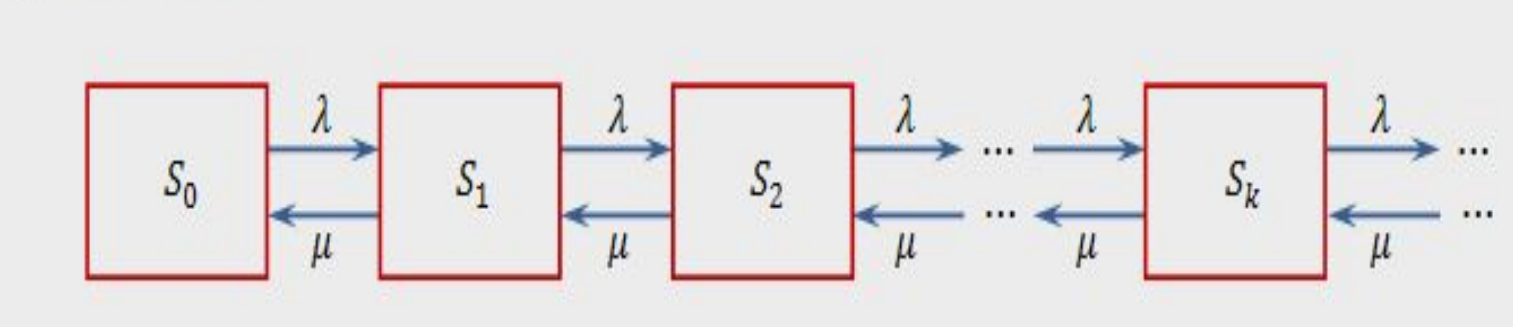
Одноканальная система с неограниченной очередью

Рассмотрим задачу.

Имеется одноканальная СМО с очередью, на которую не наложены никакие ограничения (ни по длине очереди, ни по времени ожидания). Поток заявок, поступающих в СМО, имеет интенсивность **λ** , а поток обслуживании — интенсивность **μ** . Необходимо найти предельные вероятности состояний и показатели эффективности СМО.

Система может находиться в одном из состояний S1,..,Sk, по числу заявок, находящихся в СМО: S0— канал свободен; S1— канал занят (обслуживает заявку), очереди нет; S2— канал занят, одна заявка стоит в очереди; Sk— канал занят, k-1 заявок стоят в очереди и т.д.

Граф состояний СМО представлен на рис.



Предельные вероятности состояний:

$$p_0 = 1 - \rho,$$

$$p_1 = \rho(1-\rho), \quad p_2 = \rho^2(1-\rho), \quad \ldots, \quad p_k = \rho^k(1-\rho), \quad \ldots$$

Предельные вероятности образуют убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $p<1$, следовательно, вероятность $p0$ — наибольшая. Это означает, что если СМО справляется с потоком заявок (при $p<1$), то наиболее вероятным будет отсутствие заявок в системе.

Среднее число заявок в системе определим по формуле математического ожидания:

$$L_{\text{sist.}} = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k = (1-\rho) \sum_{k=1}^{\infty} k \rho^k$$

Или (при p<1)

$$L_{\text{sist.}} = \frac{\rho}{1-\rho}.$$

Среднее число заявок в очереди .

$$L_{\text{och.}} = L_{\text{sist.}} - L_{\text{ob.}},$$

где L_{ob} — среднее число заявок, находящихся под обслуживанием

$$L_{\text{ob.}} = P_{\text{zan.}} = \rho.$$

Тогда

$$L_{\text{och.}} = \frac{\rho^2}{1-\rho}.$$

Доказано, что *при любом характере потока заявок, при любом распределении времени обслуживания, при любой дисциплине обслуживания среднее время пребывания заявки в системе (очереди) равна среднему числу заявок в системе (в очереди), деленному на интенсивность потока заявок, т.е.*

$$T_{\text{sist.}} = \frac{1}{\lambda} \cdot L_{\text{sist.}},$$

$$T_{\text{och.}} = \frac{1}{\lambda} \cdot L_{\text{och.}}.$$

Или

$$T_{\text{sist.}} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)},$$

$$T_{\text{och.}} = \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)}.$$

Многоканальная СМО с неограниченной очередью

λ – среднее число транзактов, поступающих за единицу времени

t – среднее время обслуживания транзакта

$\mu = 1/t$ – среднее число транзактов, обслуживаемых за единицу времени

$\alpha = \lambda/\mu$ –среднее число занятых каналов

n – число каналов

- Вероятность того, что все n каналов свободны

$$P_0 = \frac{1}{\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha^k}{k!}\right) + \frac{\alpha^n}{n!(1-\alpha/n)}}$$

λ – среднее число транзактов, поступающих за единицу времени

t – среднее время обслуживания транзакта

$\mu = 1/t$ – среднее число транзактов, обслуживаемых за единицу времени

$\alpha = \lambda/\mu$ –среднее число занятых каналов

n – число каналов

- Вероятность того, что свободно $n–k$ каналов

$$P_k = \frac{\alpha^k}{k!} P_0, \quad 1 \le k \le n$$

- Вероятность наличия очереди из $k – n$ заявок

$$P_k = \frac{\alpha^k}{n! \cdot n^{k-n}} P_0, \quad k \ge n$$

λ – среднее число транзактов, поступающих за единицу времени

t – среднее время обслуживания транзакта

$\mu = 1/t$ – среднее число транзактов, обслуживаемых за единицу времени

$\alpha = \lambda/\mu$ –среднее число занятых каналов

n – число каналов

- Вероятность наличия очереди

$$P_Q = \frac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)} P_0, \quad \alpha < n$$

- Средняя длина очереди

$$L_Q = \frac{\alpha}{n-\alpha} P_k, \quad k = n, \alpha < n$$

λ – среднее число транзактов, поступающих за единицу времени

t – среднее время обслуживания транзакта

$\mu = 1/t$ – среднее число транзактов, обслуживаемых за единицу времени

$\alpha = \lambda/\mu$ –среднее число занятых каналов

n – число каналов

- Среднее время ожидания в очереди

$$t_Q = \frac{L_Q}{\lambda}$$

- Коэффициент простоя каналов

$$K_s = 1 - \alpha / n$$

- Необходимое условие работоспособности СМО

$$\alpha < n$$