

ОДНОФАКТОРНІ НЕЛІНІЙНІ ЕКОНОМЕТРИЧНІ МОДЕЛІ



План

- 1. Криві зростання
- 2. Зведення нелінійних моделей до лінійних:
 - 2.1. Лінеаризація квадратичних функцій
 - 2.2. Лінеаризація зворотних кривих зростання
 - 2.3. Лінеаризація експоненційних функцій
 - 2.4. Лінеаризація степеневих функцій

1. Криві зростання

- експоненційна
- степенева
- зворотна
- квадратична
- модифікована експоненційна
- крива Гомперця
- логістична крива

$$y = \alpha \beta^x$$

$$y = \alpha x^\beta$$

$$y = \alpha + \beta \frac{1}{x}$$

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2$$

$$y = \alpha \beta^x + \gamma$$

$$y = e^{\alpha \beta^x + \gamma}$$

$$y = \frac{1}{\alpha \beta^x + \gamma}$$

2. Зведення нелінійних моделей до лінійних

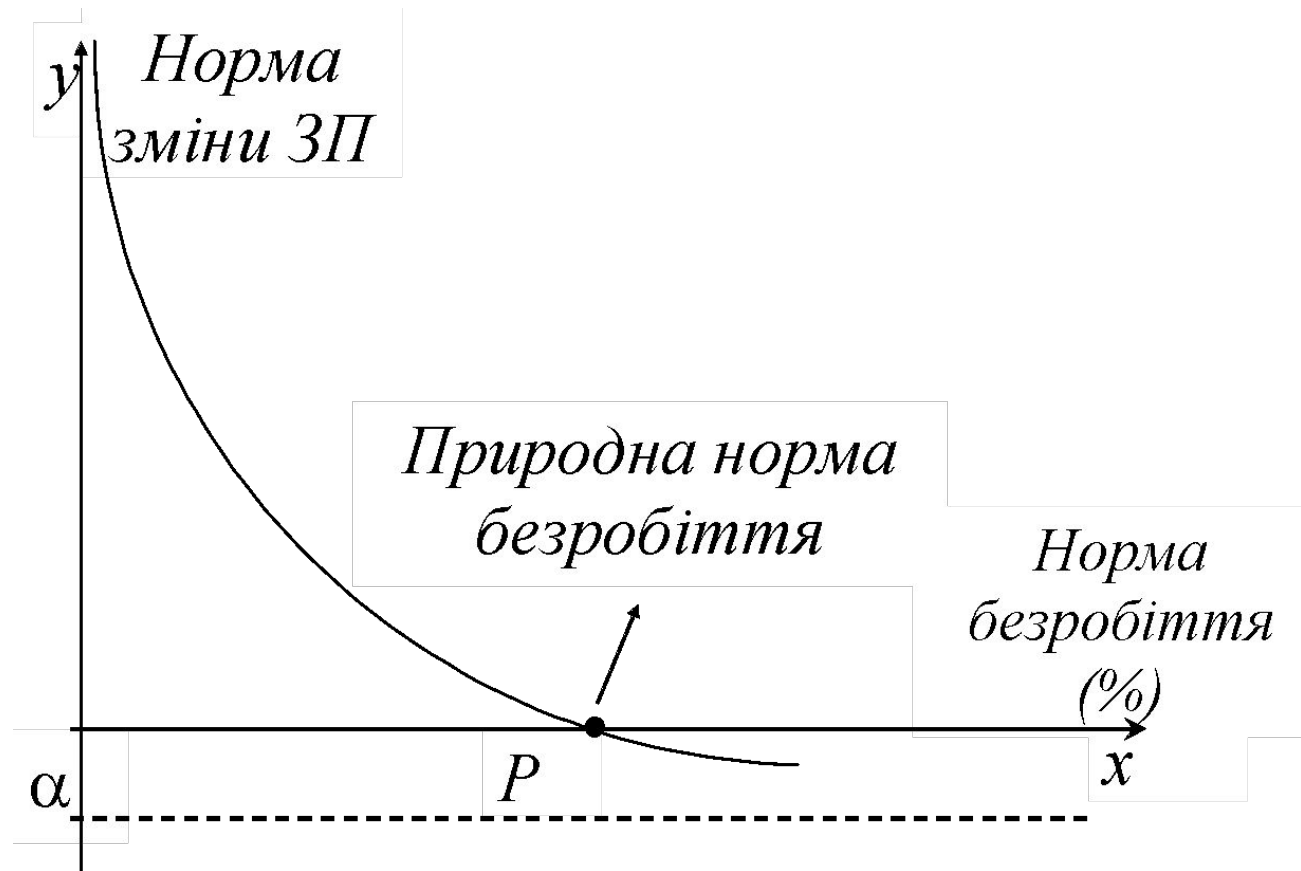
2.1. Лінеаризація квадратичних функцій

$$y = \alpha + \beta x^2, \quad \text{Заміна } x^2 = t$$

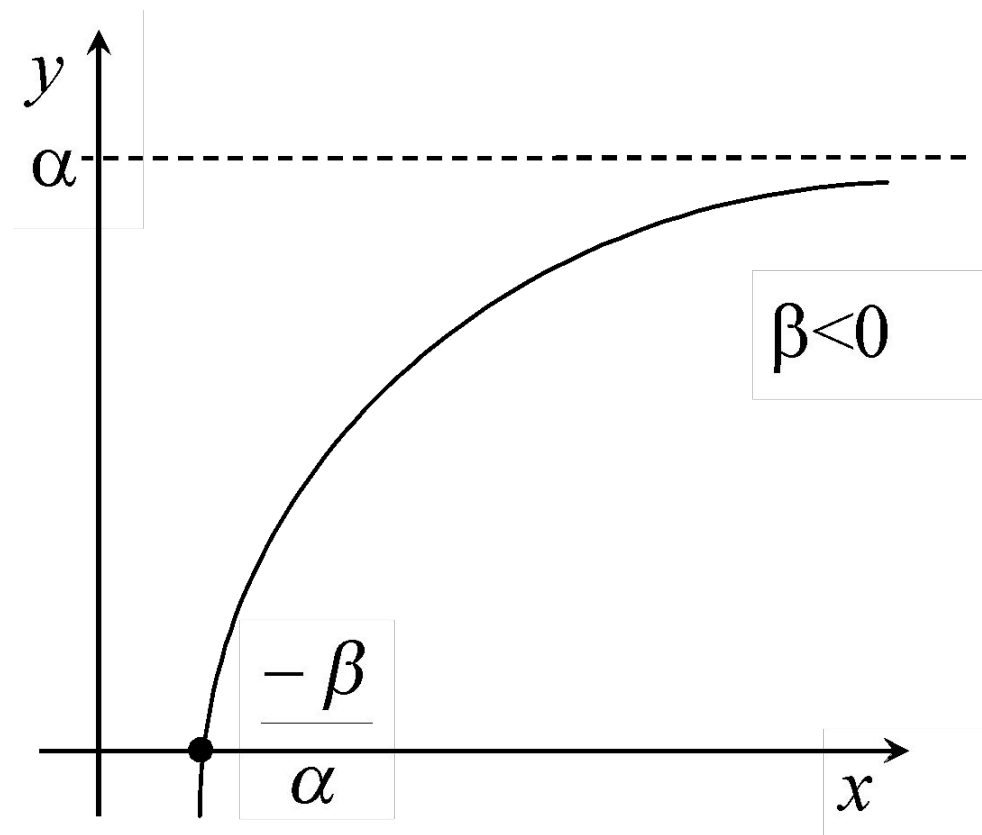
2.2. Лінеаризація зворотних функцій

$$y = \alpha + \beta \frac{1}{x} \quad \text{Заміна } \frac{1}{x} = z$$

Крива Філіпса



Крива Енгеля



2.3. Лінеаризація експоненційних функцій

$$y = \alpha \cdot e^{\beta \cdot x}$$

$$\ln y = \ln \alpha + \beta \cdot x. \text{ Заміна } \ln y = y', \ln \alpha = \alpha'$$

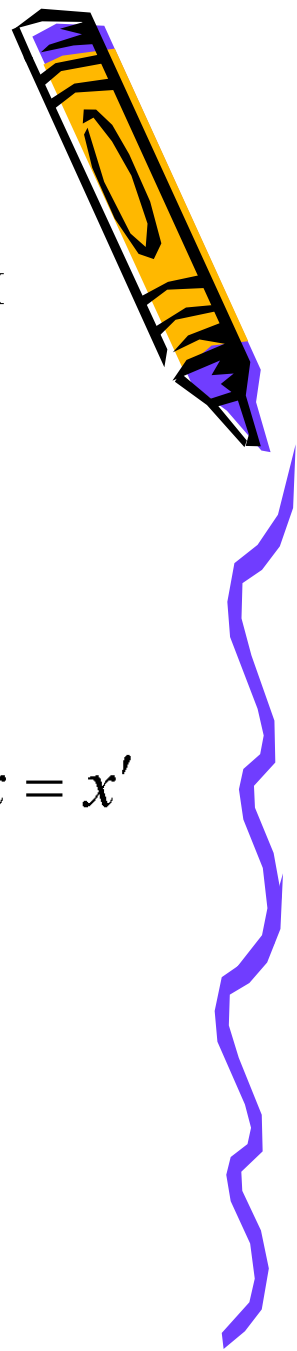
$$y' = \alpha' + \beta'x.$$

2.4. Лінеаризація степеневих функцій

$$y = \alpha x^{\beta}$$

$$\ln y = \ln \alpha + \beta \cdot \ln x. \text{ Заміна } \ln y = y', \ln \alpha = \alpha', \ln x = x'$$

$$y' = \alpha' + \beta \cdot x'.$$



Класична лінійна багатофакторна модель



План

1. Лінійна багатофакторна економетрична модель.
2. МНК для багатофакторної економетричної моделі.
3. Лінійна економетрична модель з трьома змінними. МНК для моделі з трьома змінними.
4. Коефіцієнти парної, частинної та множинної кореляції. Матриця кореляції

1. Лінійна багатофакторна економетрична модель

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_m x_m + u, \quad (1)$$

де y – залежна змінна; $x_1, x_2, \dots, x_m$ – незалежні змінні; $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m$ – невідомі детерміновані параметри; u – випадкова складова, збурення, $u = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$.

Оціночне рівняння для даної моделі таке:

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \dots + \hat{\beta}_m x_m, \quad (2)$$

де $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_m$ – оцінки невідомих параметрів $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m$.

2. МНК для багатofакторної економетричної моделі

$$y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}, \quad x_1 = \{x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}\},$$

$$x_2 = \{x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}\}, \dots, x_m = \{x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mn}\}.$$

$$\sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{1i} - \dots - \hat{\beta}_m x_{mi})^2 =,$$

$$= F(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_m) \rightarrow \min \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial \hat{\beta}_0} = 2 \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{1i} - \dots - \hat{\beta}_m x_{mi}) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \hat{\beta}_1} = 2 \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{1i} - \dots - \hat{\beta}_m x_{mi}) \cdot x_{1i} = 0 \quad (4) \\ \boxtimes \\ \frac{\partial F}{\partial \hat{\beta}_m} = 2 \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{1i} - \dots - \hat{\beta}_m x_{mi}) \cdot x_{mi} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n x_{1i} + \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^n x_{2i} + \dots + \hat{\beta}_m \sum_{i=1}^n x_{mi} = \sum_{i=1}^n y_i \\
 \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^n x_{1i} + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n x_{1i}^2 + \dots + \hat{\beta}_m \sum_{i=1}^n x_{mi} x_{1i} = \sum_{i=1}^n y_i x_{1i} \\
 \boxtimes \\
 \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^n x_{mi} + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n x_{1i} x_{mi} + \dots + \hat{\beta}_m \sum_{i=1}^n x_{mi}^2 = \sum_{i=1}^n y_i x_{mi}
 \end{array} \right. \quad (5)$$

3.Лінійна економетрична модель з трьома змінними. МНК для моделі з трьома змінними

$$m = 2:$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u,$$

де y – залежна змінна; x_1, x_2, x_3 – незалежні змінні; $\beta_0, \beta_1, \beta_3$ – невідомі детерміновані параметри; u – випадкова складова, збурення, $u = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$.

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_3 x_3,$$

де $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_3$ – оцінки невідомих параметрів $\beta_0, \beta_1, \beta_3$.

$$\begin{cases} n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n x_{1i} + \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^n x_{2i} = \sum_{i=1}^n y_i \\ \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^n x_{1i} + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n x_{1i}^2 + \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^n x_{2i} x_{1i} = \sum_{i=1}^n y_i x_{1i} \\ \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^n x_{2i} + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n x_{1i} x_{2i} + \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^n x_{2i}^2 = \sum_{i=1}^n y_i x_{2i} \end{cases} \quad (6)$$

Розв'язавши систему (6) отримаємо рівняння оціночної площини $\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_3 x_3$

4. Коефіцієнти парної, частинної та множинної кореляції. Матриця кореляції

Коефіцієнт парної кореляції між змінними x_k і x_j

$$r_{x_k x_j} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_{k_i} - \bar{x}_k) \cdot (x_{j_i} - \bar{x}_j)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_{k_i} - \bar{x}_k)^2 \cdot \sum_{i=1}^n (x_{j_i} - \bar{x}_j)^2}}$$

$m=2$

$$r_{yx_1} = \frac{\sum (y_i - \bar{y}) \cdot (x_{1i} - \bar{x}_1)}{\sqrt{\sum (y_i - \bar{y})^2 \cdot \sum (x_{1i} - \bar{x}_1)^2}}$$

$$r_{yx_2} = \frac{\sum (y_i - \bar{y}) \cdot (x_{2i} - \bar{x}_2)}{\sqrt{\sum (y_i - \bar{y})^2 \cdot \sum (x_{2i} - \bar{x}_2)^2}}$$

$$r_{x_1x_2} = \frac{\sum (x_{1i} - \bar{x}_1) \cdot (x_{2i} - \bar{x}_2)}{\sqrt{\sum (x_{1i} - \bar{x}_1)^2 \cdot \sum (x_{2i} - \bar{x}_2)^2}}$$

Матриця кореляції

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & r_{yx_1} & r_{yx_2} \\ r_{x_1y} & 1 & r_{x_1x_2} \\ r_{x_2y} & r_{x_2x_1} & 1 \end{bmatrix}$$

Коефіцієнти частинної кореляції

$$r_{yx_2 \cdot x_1} = \frac{r_{yx_2} - r_{yx_1} \cdot r_{x_1 x_2}}{\sqrt{1 - r_{yx_1}^2} \cdot \sqrt{1 - r_{x_1 x_2}^2}}$$

$$r_{yx_1 \cdot x_2} = \frac{r_{yx_1} - r_{yx_2} \cdot r_{x_1 x_2}}{\sqrt{1 - r_{yx_2}^2} \cdot \sqrt{1 - r_{x_1 x_2}^2}}.$$

Коефіцієнт множинної кореляції

$$R = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(\hat{y}_i - \bar{\hat{y}})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{\hat{y}})^2}}$$
$$R^2 = \frac{r_{yx_1}^2 + r_{yx_2}^2 - 2r_{yx_1} \cdot r_{yx_2} \cdot r_{x_1x_2}}{1 - r_{x_1x_2}^2}$$
$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$

Оцінений коефіцієнт детермінації

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n e_i^2 / (n - m - 1)}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 / (n - 1)}.$$
$$\bar{R}^2 = 1 - (1 - R^2) \frac{n - 1}{n - m - 1}.$$