

ГБПОУ Дзержинский технический колледж

Многогранники и тела вращения

Электронное учебное
пособие по стереометрии

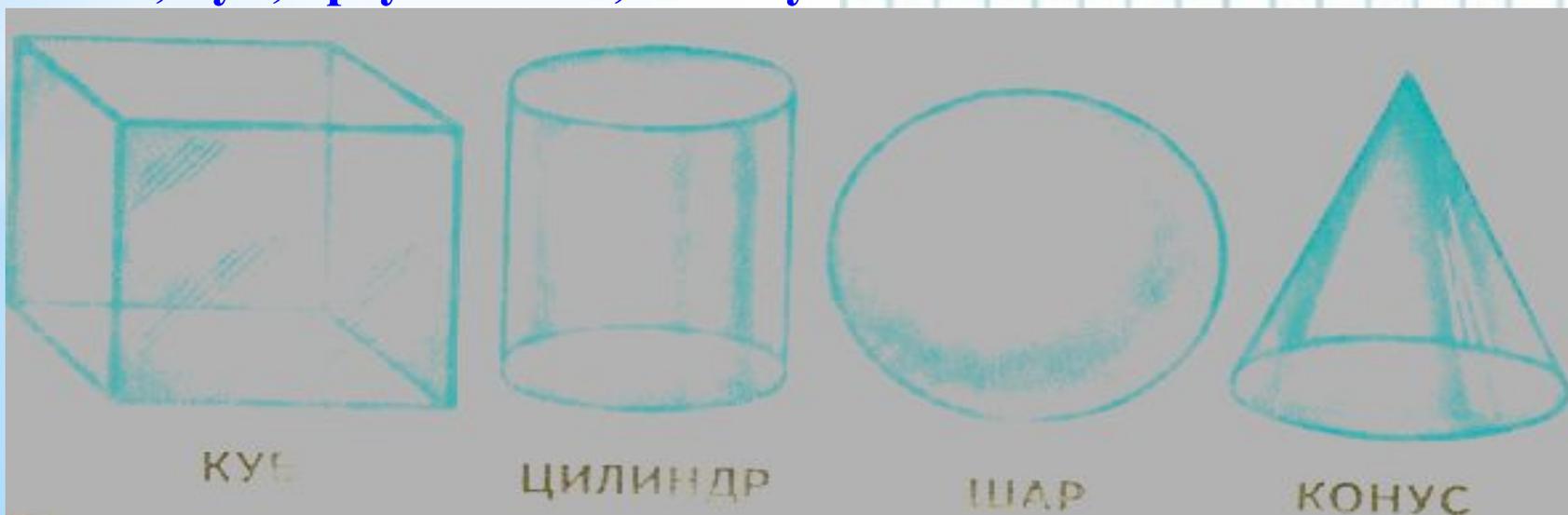
В электронном учебном пособии «Многогранники и тела вращения» представлен необходимый материал по формированию основных знаний, умений и навыков студентов по разделу геометрии общеобразовательных дисциплин.

В электронное пособие вошел материал по стереометрии, изучающий многогранники и тела вращения. Каждый раздел пособия содержит краткий обзор теоретического материала, также имеются задания на знания характеристик и формул тел пространства, тестовый контроль знаний, видеоматериал по теме «Многогранники и тела вращения».

Электронное учебное пособие может использоваться, как при теоретическом и практическом обучении студентов так и при самостоятельном повышении качества знаний по математике.

В окружающем нас мире много предметов различной формы. В математике изучают не сами предметы, а их формы: вместо предметов рассматривают геометрические тела: цилиндр, шар, конус и т.д. Названия многих геометрических тел идут из глубокой древности, причем произошли они от соответствующих предметов. Например, из древней Греции термины конус (conus — предмет, которым затыкали бочку), “пирамида” (pyra — огонь, костер), “цилиндр” (cylindrus — валик).

Интересный факт: все геометрические тела, кроме шара, называются словами иностранного происхождения. А линии и их части называются чисто русскими словами: прямая, отрезок, ломаная, луч, треугольник, многоугольник



Многогранники

История

Теория

Модуль «Правильные
многогранники»

Тестовые задания

Модуль «Задания по
многогранникам»

Практика
1 2 3 4

Тела вокруг
нас

Тела вращения

История

Теория

Тестовые задания

Практика
1 2 3 4

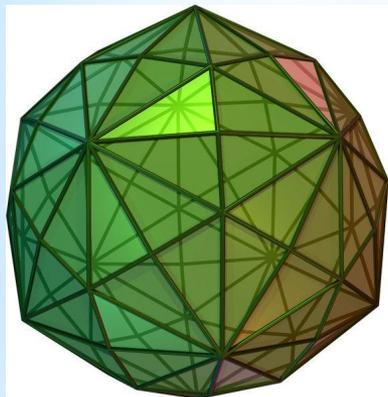
Это
интересно

ТЕЛА ПРОСТРАНСТВА
В ПРИРОДЕ

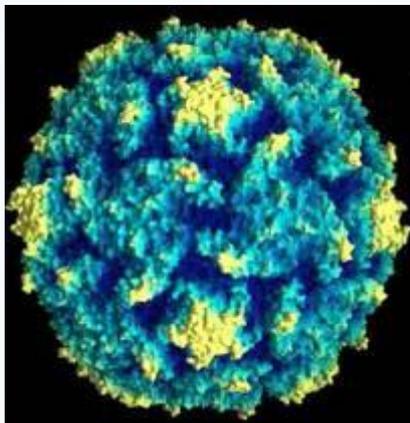
СПРАВОЧНИК

Теория

Понятие



Виды



Характеристики

Формулы

СОДЕРЖАНИЕ

Чем интересны многогранники?

Первые упоминания о многогранниках известны еще у египтян и вавилонян за 3000 лет до нашей эры. В тоже время теория многогранников – современный раздел математики. Она имеет большое значение не только для теоретических исследований по геометрии, но и для практических приложений в других разделах математики.

Многогранники интересны и сами по себе. Они выделяются необычными свойствами и имеют красивые формы, например правильные, полуправильные и звёздчатые многогранники. Они обладают богатой историей, которая связана с такими знаменитыми учёными древности, как Пифагор, Евклид, Архимед.

Формы многогранников находят широкое применение в конструировании сложных и красивых многогранных поверхностей, которые используются в реальных архитектурных проектах.



ДАЛЕЕ



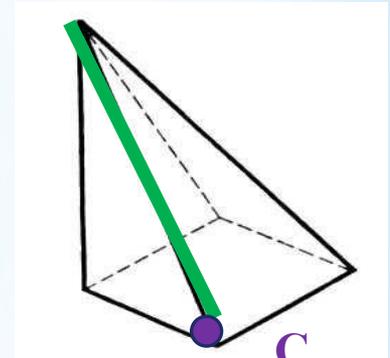
Многогранники были известны в Древнем Египте и Вавилоне. Достаточно вспомнить знаменитые египетские пирамиды и самую известную из них – пирамиду Хеопса. Это правильная пирамида, в основании которой квадрат со стороной 233м и высота которой достигает 146,5м. Над её сооружением трудились ежедневно около 100000 человек в течение 20 лет.

К началу нашей эры ученые древности накопили достаточно сведений по теории многогранников. Они описали комбинаторные свойства (связанные с количеством граней, вершин, ребер) основных простейших выпуклых многогранников — призм, пирамид, правильных многогранников, знали метрические свойства этих многогранников, в том числе умели вычислять объем пирамиды, применяя метод исчерпывания, использовали многогранники в строительстве и архитектуре.



Многогранник -

это пространственное тело, поверхность которого состоит из конечного числа плоских многоугольников.



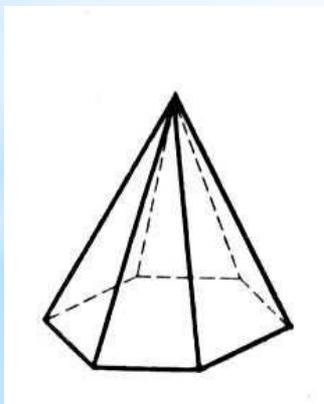
Плоские многоугольники называются **гранями** многогранника.

Стороны многоугольника – **ребрами** многогранника.

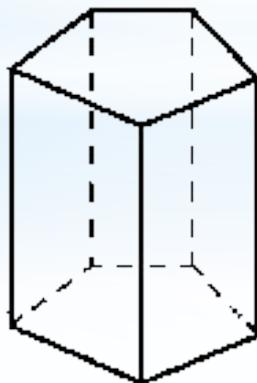
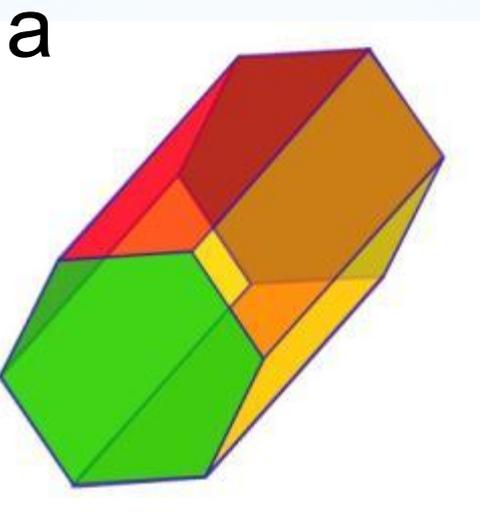
Вершины многоугольника – **вершинами** многогранника.

Виды многогранников

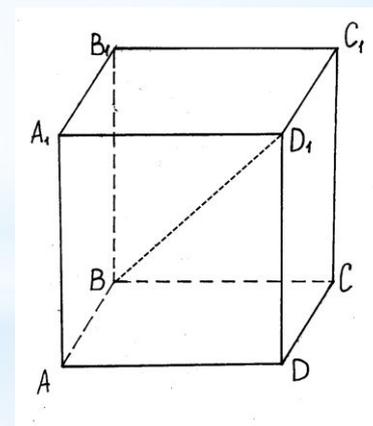
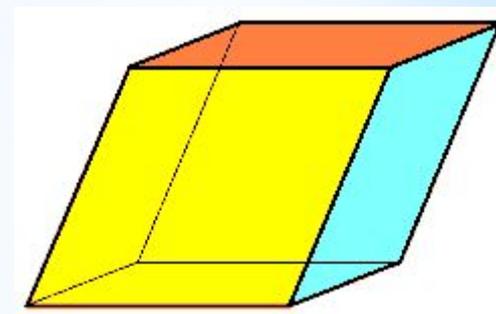
пирамида

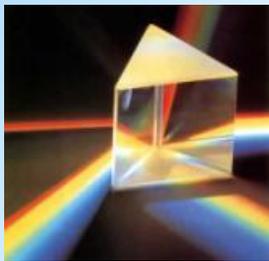


призм



параллелепипед





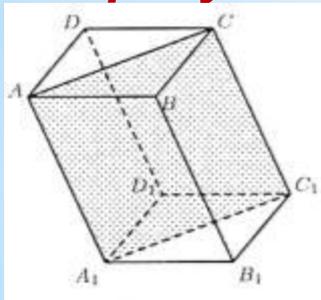
треугольная призма

в основании лежит
треугольник



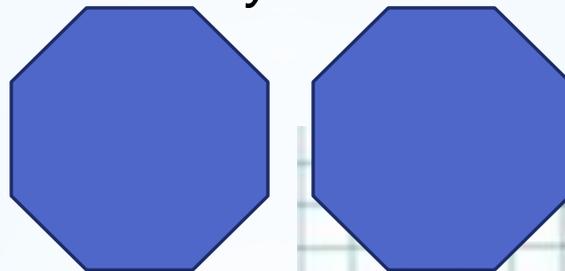
четырёхугольная призма

в основании лежит
четырёхугольник



ПРИЗМА - многогранник

основания призмы -
равные
многоугольники

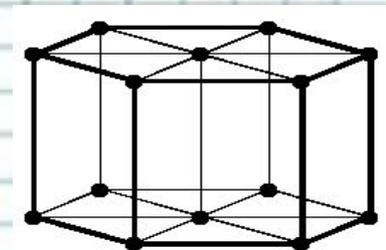
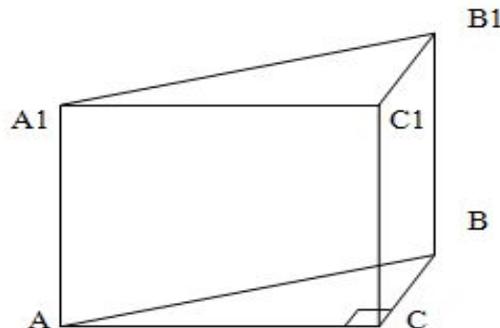


боковые грани
параллелограммы

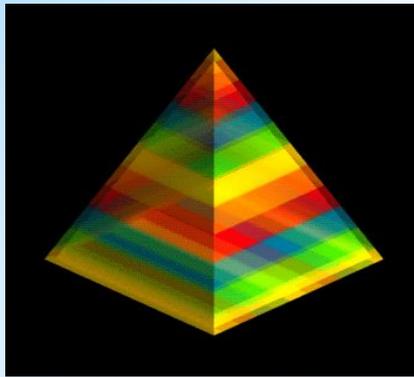


Правильная призма -
это прямая призма,
основанием которой
является правильный

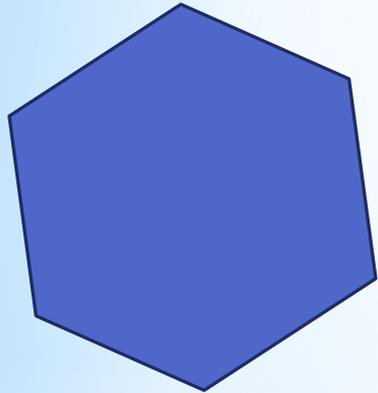
Прямая призма
боковые ребра
перпендикулярны
основаниям



ДАЛЕЕ



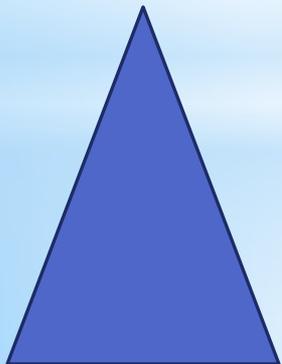
Пирамида - многогранник



У пирамиды
одно
основание -

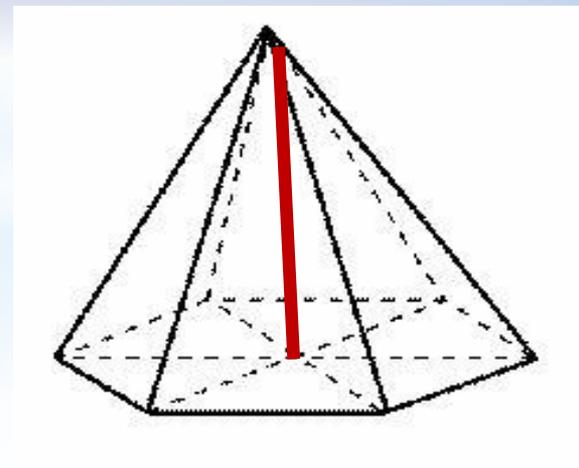
многоугольник

Пирамида называется правильной,
если в основании лежит правильный
многоугольник, а вершина
проектируется
в центр основания

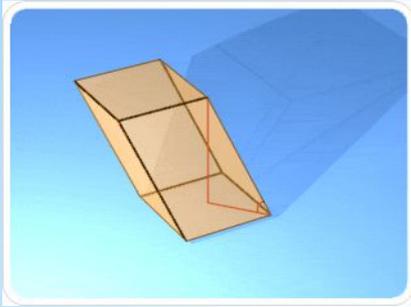


**боковые грани –
треугольники**

(n -угольная пирамида имеет
 $n+1$ граней)

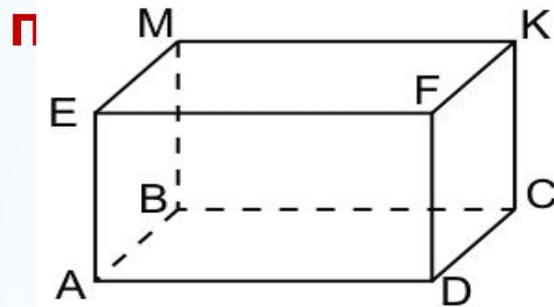


ДАЛЕЕ



*Параллелепипед –призма,
основание которой
параллелограмм.*

Прямой параллелепипед, основанием которого является прямоугольник называется

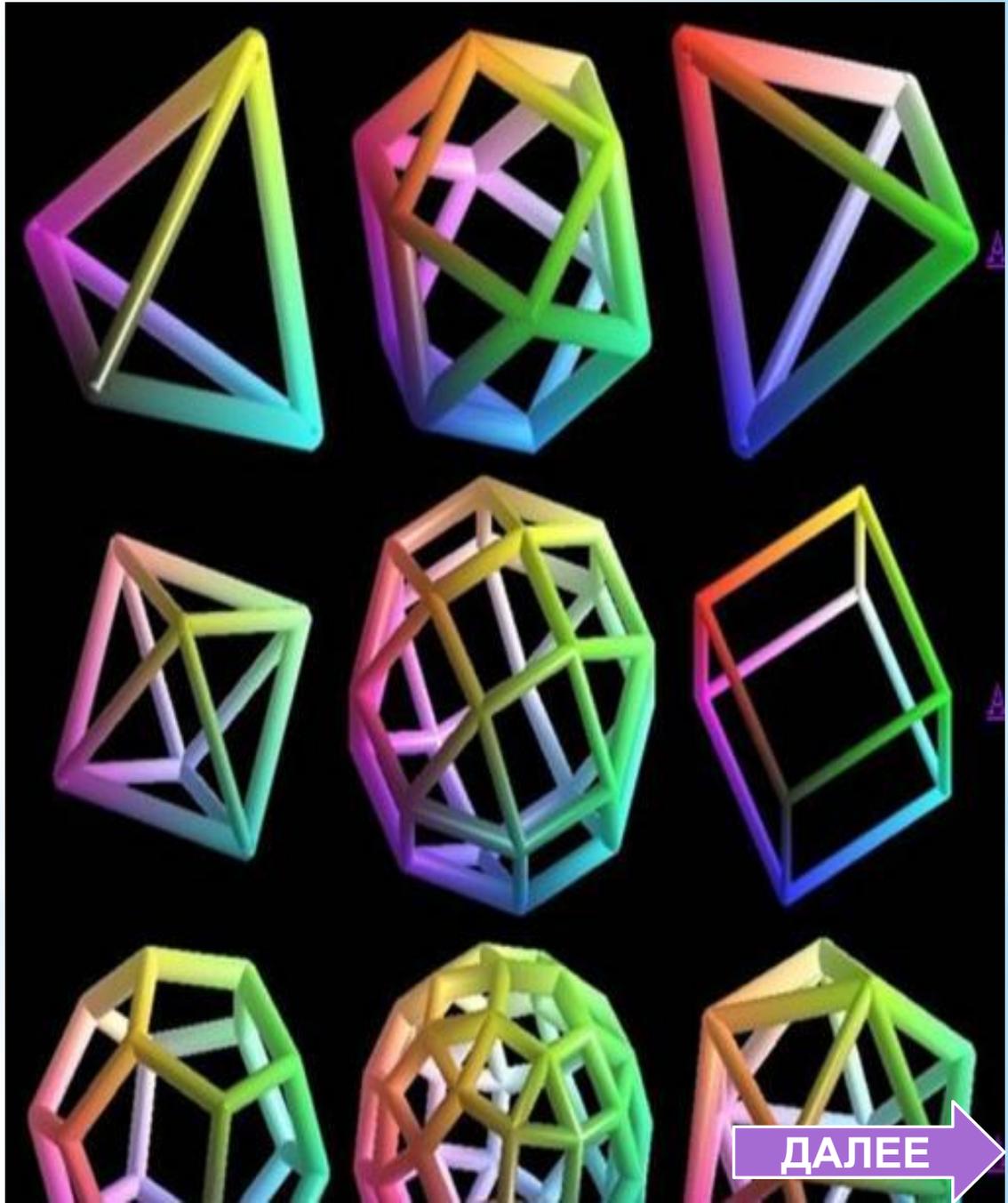


Свойства параллелепипеда:

- 1. Противоположные грани параллелепипеда параллельны и равны.*
- 2. Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.*

ДАЛЕЕ

Правильным
многогранником
называется
многогранник, у
которого все
грани –
правильные
равные
многоугольники
и все
двугранные
углы равны.

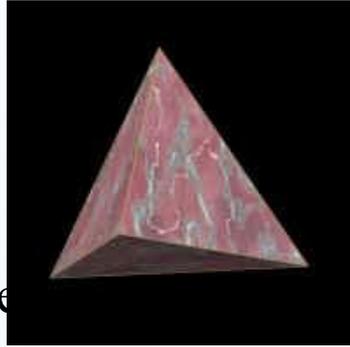


ДАЛЕЕ

Тетраэдр

(от „тетра”- четыре и греческого „hedra” - грань)

состоит из 4-х правильных треугольников, в каждой его вершине сходятся 3 ребра.



Тетраэдр символизировал огонь, т.к. его вершина устремлена вверх



тетраэдр-огонь

Гексаэдр (куб)

(от греческого „гекса” - шесть и „hedra” - грань) имеет 6 квадратных граней, в каждой его вершине сходятся 3 ребра. Гексаэдр больше известен как куб (от латинского „cubus”; от греческого „kubos”).



Гексаэдр (куб) символизировал землю, так как самый «устойчивый»



гексаэдр (куб) - земля

ДАЛЕЕ

Октаэдр



(от греческого okto - восемь и hedra - грань) имеет 8 граней (треугольных), в каждой вершине сходятся 4 ребра.

Октаэдр символизировал воздух, как самый "воздушный"



Октаэдр-воздух

Икосаэдр



(от греческого eikosi - двадцать и hedra - грань) имеет 20 граней (треугольных), в каждой вершине сходятся 5 рёбер

Икосаэдр символизировал воду, так как он самый «обтекаемый»



Икосаэдр-вода

ДАЛЕЕ

Додекаэдр



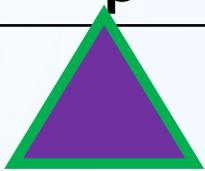
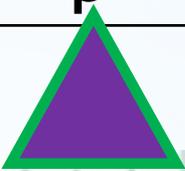
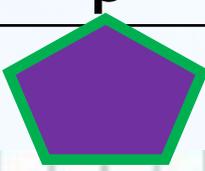
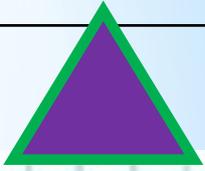
(от греческого dodeka - двенадцать и hedra - грань) имеет 12 граней (пятиугольных), в каждой вершине сходятся 3 ребра.



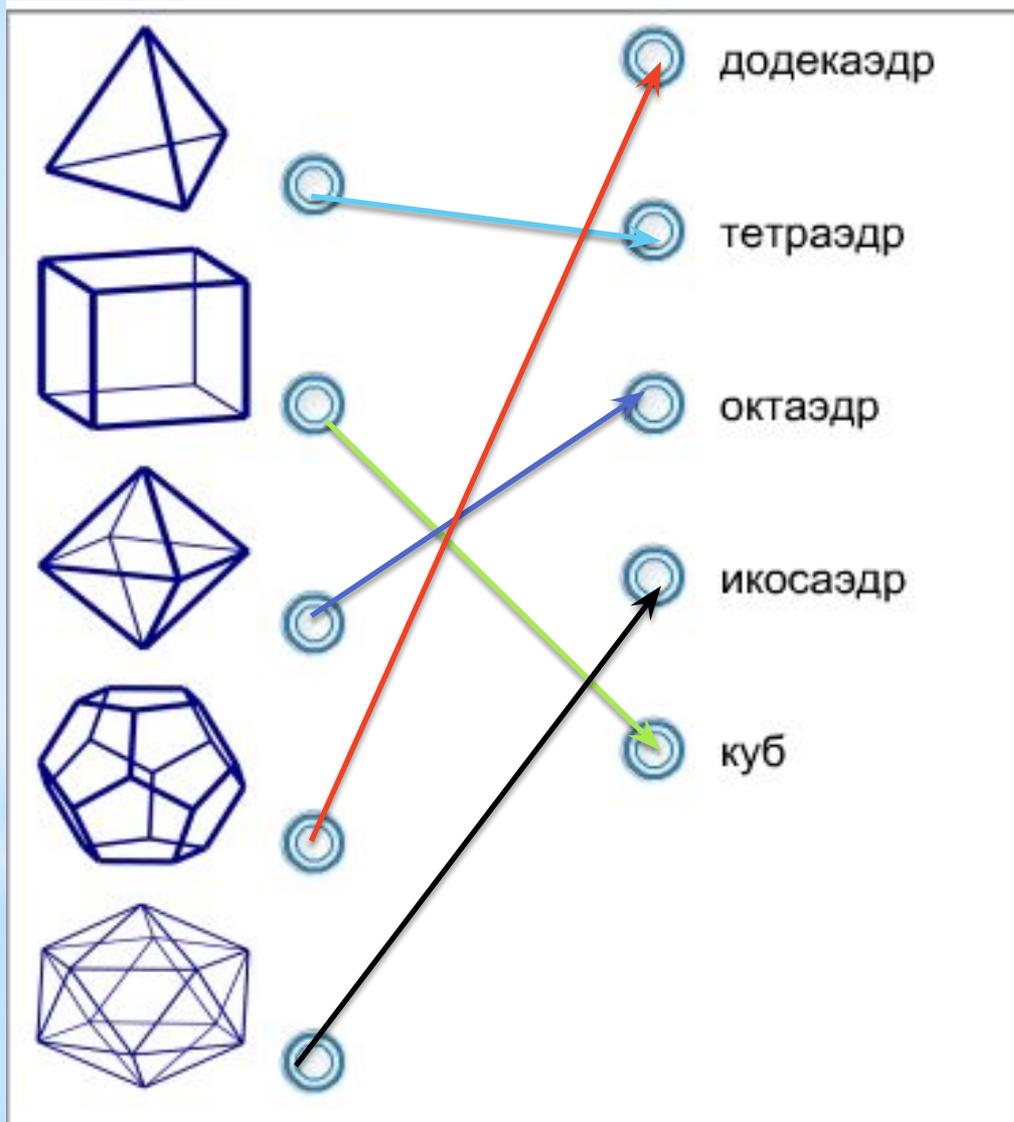
Додекаэдр воплощал в себе "все сущее", символизировал все мироздание, считался главным

додекаэдр-вселенная

Таблица характеристик правильных многогранников

Название	Тетраэдр	Куб	Октаэдр	Додекаэдр	Икосаэдр
Форма граней					
Число граней	4	6	8	12	20
Число ребер	6	12	12	30	30
Число вершин	4	8	6	20	12

ЗАДАНИЕ «Правильные многогранники»



ЗАДАНИЕ 4. Многогранники, их поверхности и объемы.

1. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды 7 см, а высота 9 см. Найти объем пирамиды

- A) 63 см^3 B) 21 см^3 C) 401 см^3 D) 147 см^3 E) 126 см^3

2. Найдите боковую поверхность правильной четырехугольной призмы со стороной основания 8 см и высотой 10 см

- A) 32 см^2 B) 96 см^2 C) 120 см^2 D) 184 см^2 E) 320 см^2

3. Найдите объем куба ребром 4 см

- A) 28 см^3 B) 16 см C) 64 см^3 D) 24 см^3 E) 12 см^3

4. Найдите объем правильной четырехугольной призмы со стороной основания 4 см и высотой 6 см

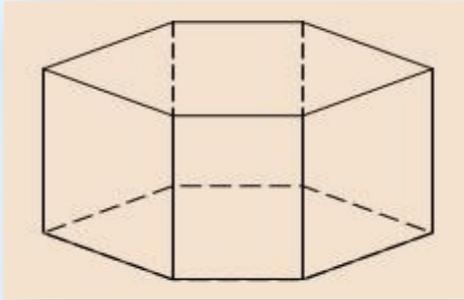
- A) 96 см^3 B) 24 см^3 C) 144 см^3 D) 48 см^3 E) 64 см^3

5. Найдите боковую поверхность правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания 8 см и апофемой 9 см

- A) 72 см^2 B) 144 см^2 C) 64 см^2 E) 88 см^2

ПЛОЩАДИ И ОБЪЁМЫ

призма

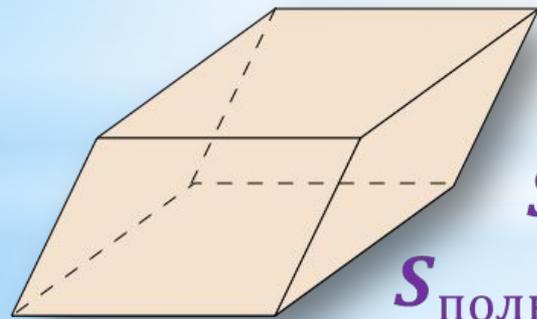


$$S_{\text{бок}} = Ph$$

$$S_{\text{полн}} = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}$$

$$V = S_{\text{осн}}h$$

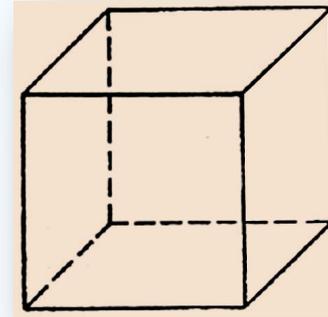
параллелепипед



$$S_{\text{бок}} = 2h(a + b)$$

$$S_{\text{полн}} = 2(ab + bh + ah)$$

$$V = abh$$



куб

$$S_{\text{бок}} = 4a^2$$

$$S_{\text{полн}} = 6a^2$$

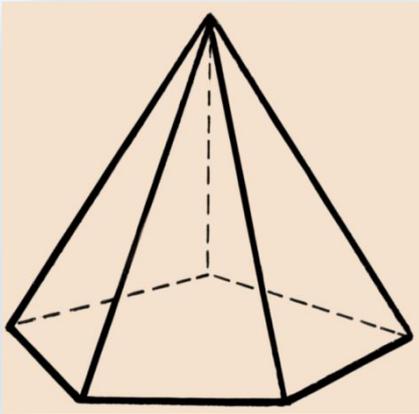
$$V = a^3$$

ДАЛЕЕ

ПЛОЩАДИ И ОБЪЁМЫ

усеченная пирамида

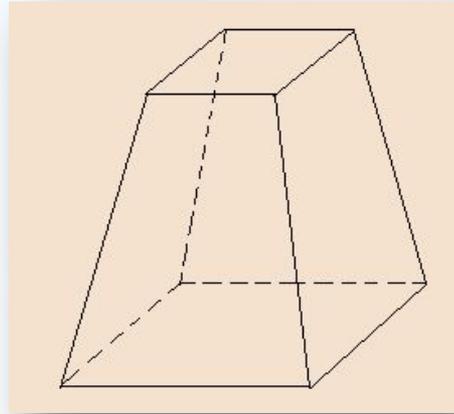
пирамида



$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} h$$

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}$$

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} h$$



$$S_{\text{бок}} = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot l$$

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_1 + S_2$$

$$V = \frac{H}{3} (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})$$

ТЕОРИЯ

Тела вращения

Понятие

Модуль
«Цилиндр и конус»

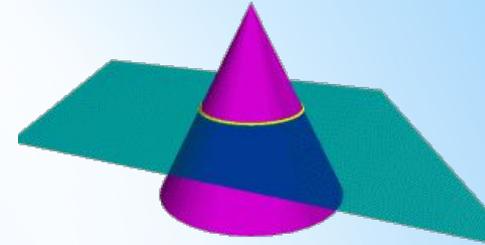
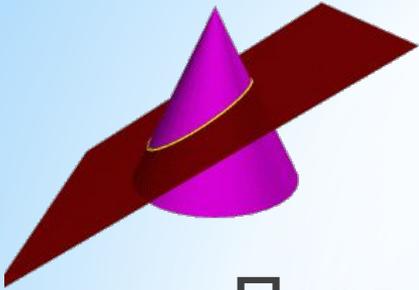
Шар и сфера

Формулы

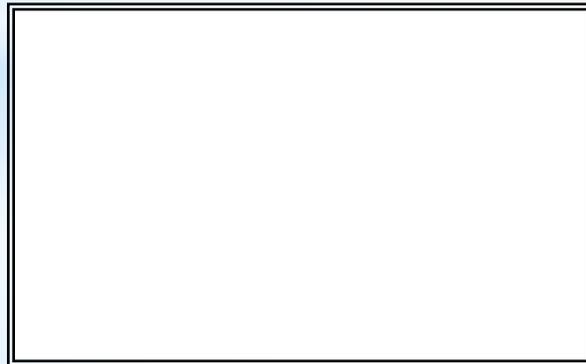


СОДЕРЖАНИЕ

История изучения тел вращения

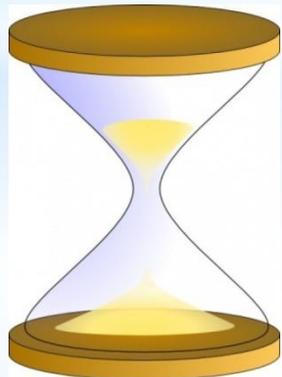
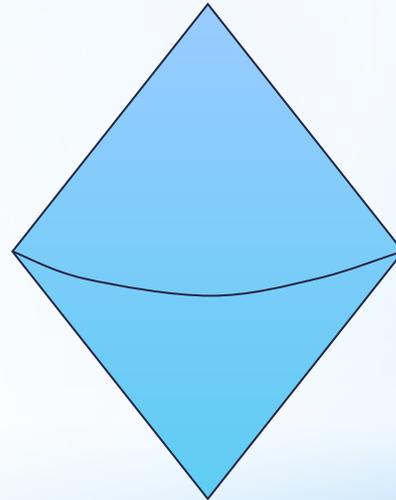
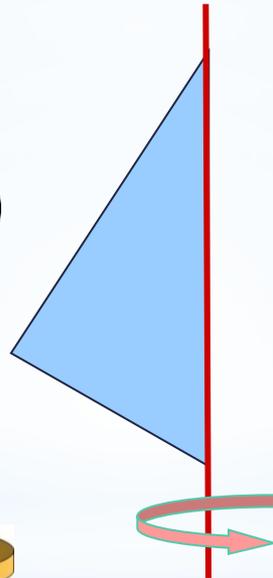
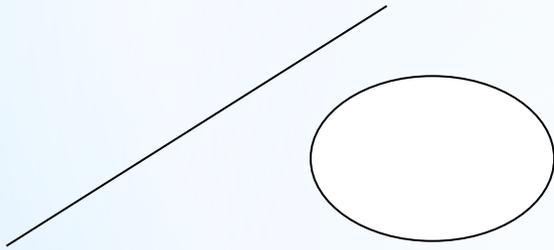


Первоначальные сведения о свойствах геометрических тел люди нашли, наблюдая окружающий мир и в результате практической деятельности. Со временем ученые заметили, что некоторые свойства геометрических тел можно выводить из других свойств путем рассуждения.



Тела вращения

Тело вращения – это пространственная фигура полученная вращением плоской ограниченной области вместе со своей границей вокруг оси, лежащей в той же плоскости.



Цилиндр

Цилиндр – это тело, которое описывает прямоугольник при вращении вокруг одной из его сторон.

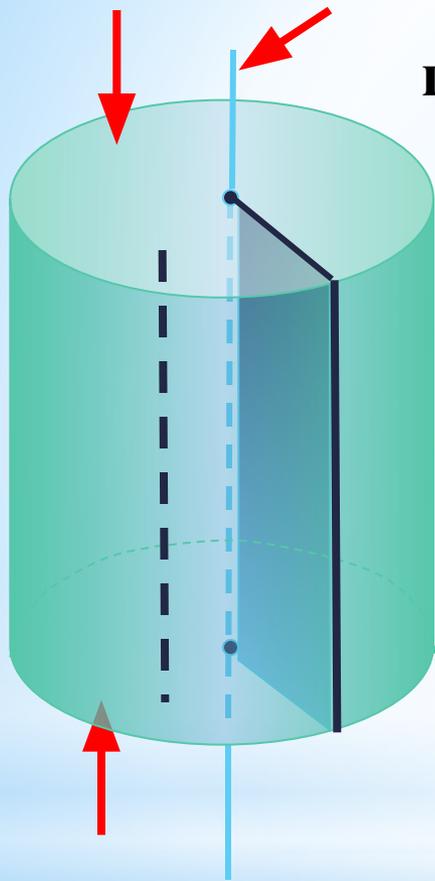
Верхний и нижний круги – это *основания* цилиндра.

Прямая проходящая через центры кругов – это *ось* цилиндра.

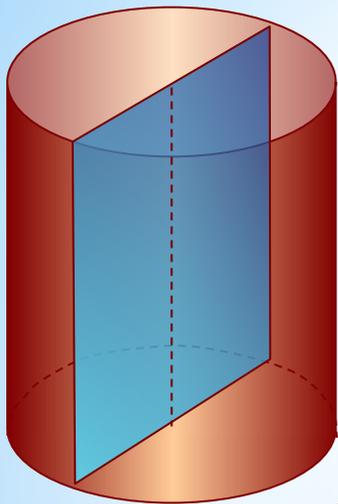
Отрезок, соединяющий точки на окружностях основания – это *образующая* цилиндра.

Радиус основания - это *радиус* цилиндра.

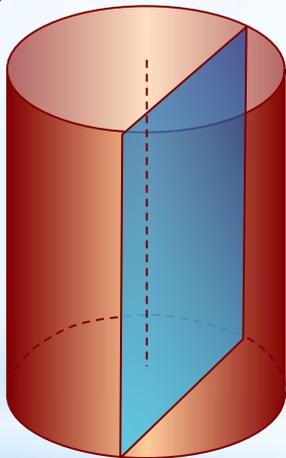
Высота цилиндра - это перпендикуляр между основаниями цилиндра.



Сечения



Осевое сечение: **цилиндра** Плоскость сечения содержит ось цилиндра и перпендикулярна основаниям. В сечении – *прямоугольник.*

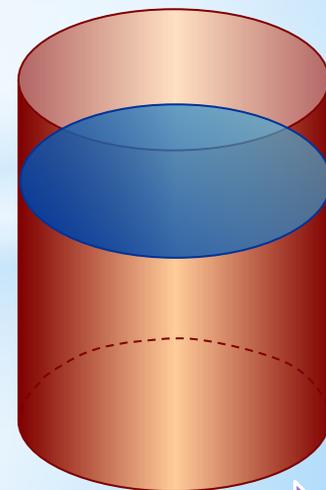


Сечение плоскостью параллельной оси цилиндра. Плоскость сечения параллельна оси цилиндра и перпендикулярна основаниям. В сечении – *прямоугольник.*

Сечение плоскостью параллельной основанию цилиндра

Плоскость сечения параллельна основаниям цилиндра и перпендикулярна оси. В сечении –

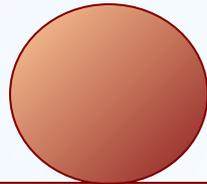
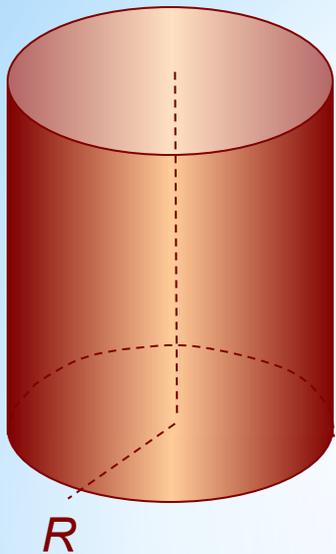
круг.



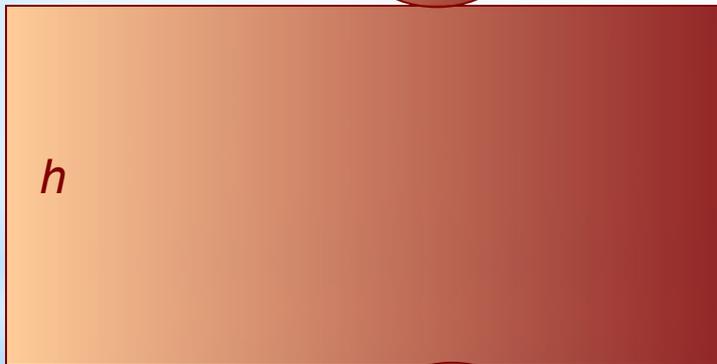
ДАЛЕЕ

Развертка цилиндра

Полная поверхность
состоит из 2 оснований и
боковой поверхности.



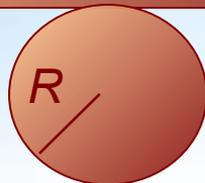
Основания – это равные круги



R – радиус основания цилиндра

Боковая поверхность
цилиндра есть

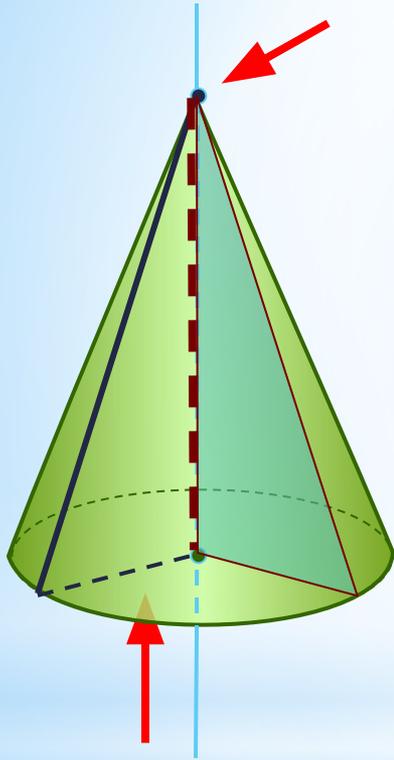
прямоугольник.



ДАЛЕЕ

Конус

Конус – это тело, которое описывает прямоугольный треугольник при вращении вокруг оси, содержащей его катет.

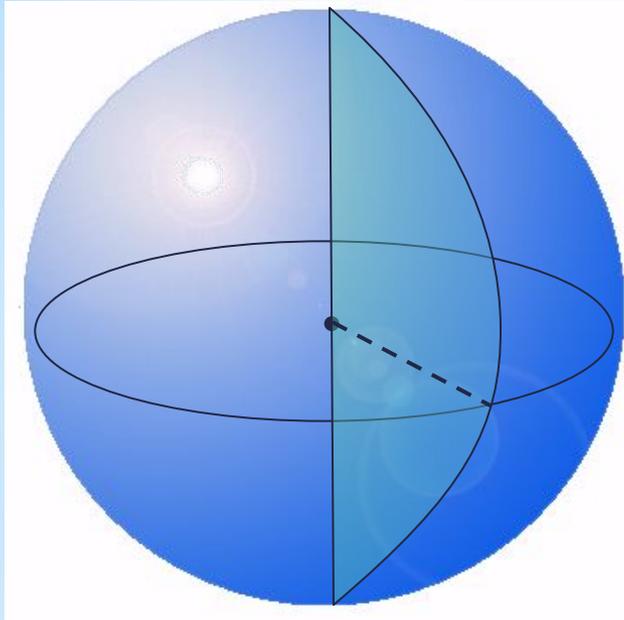


- Круг – это *основание* конуса.
- Точка вне круга с которой соединяются все точки окружности – это *вершина* конуса.
- Прямая проходящая через центр круга и вершину конуса – *ось* конуса.
- Отрезок соединяющий вершину с любой точкой окружности основания – это *образующая* конуса.
- Радиус основания - это *радиус* конуса.

□ *Высота* конуса - это перпендикуляр, опущенный из вершины конуса к основанию.

ДАЛЕЕ

Определение сферы и шара



Сфера – это поверхность, все точки которой равноудалены от заданной точки.

Эта точка называется **центром** сферы.

Расстояние от центра сферы до любой точки поверхности называется – **радиусом** сферы

Шаром называется тело, которое находится внутри сферы.

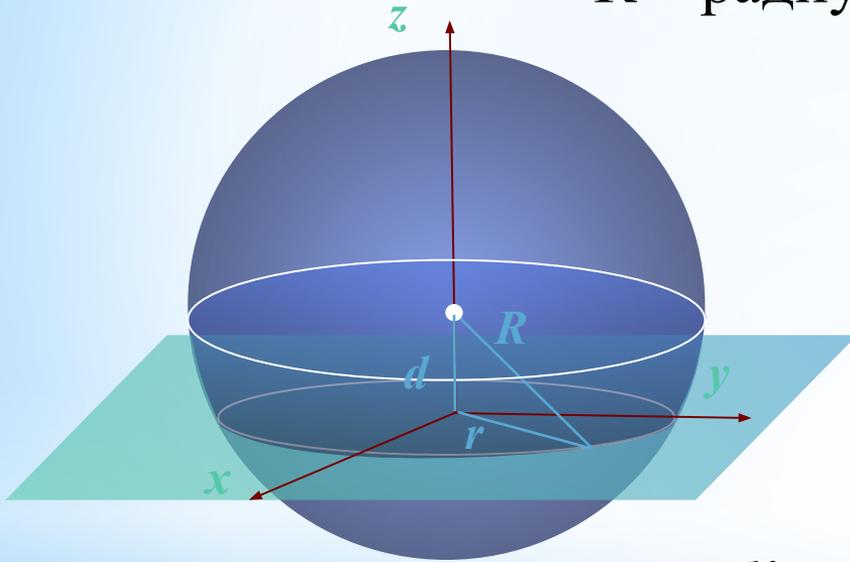
Шар можно получить вращением полукруга вокруг оси, содержащей его диаметр.

ДАЛЕЕ

Взаимное расположение сферы и ПЛОСКОСТИ

d – расстояние от центра сферы до плоскости,

R – радиус сферы



r – радиус сечения сферы

Вычислить радиус сечения
можно используя теорему
Пифагора.

$$r = \sqrt{R^2 - d^2}$$

$$d < R$$

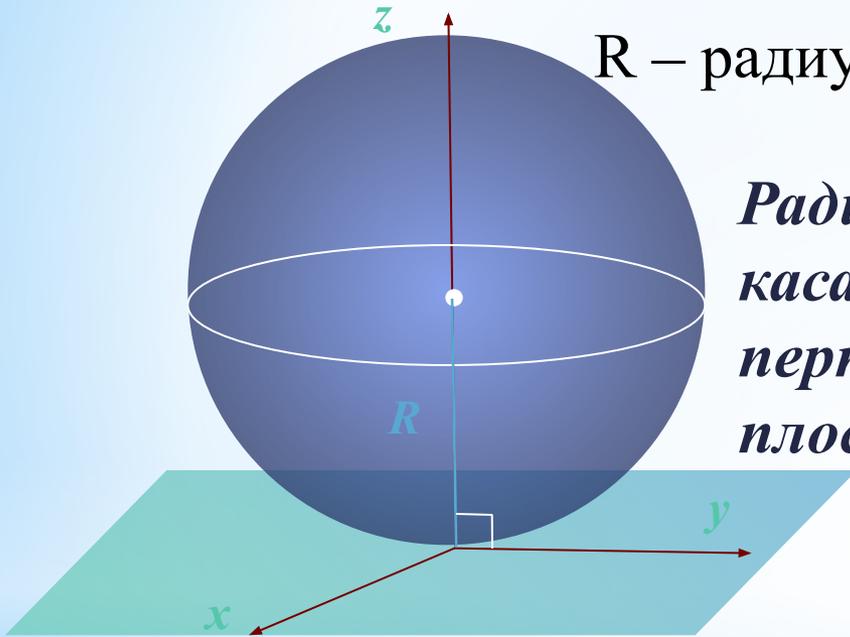
Плоскость пересекает сферу и
называется *секущей*

ДАЛЕЕ

Взаимное расположение сферы и ПЛОСКОСТИ

d – расстояние от центра сферы до плоскости,

R – радиус сферы



Радиус сферы проведенный в точку касания сферы и плоскости, перпендикулярен к касательной плоскости.

$$R^2 - d^2 = 0$$

$$d = R$$

Плоскость имеет одну общую точку со сферой и называется *касательной*

ДАЛЕЕ

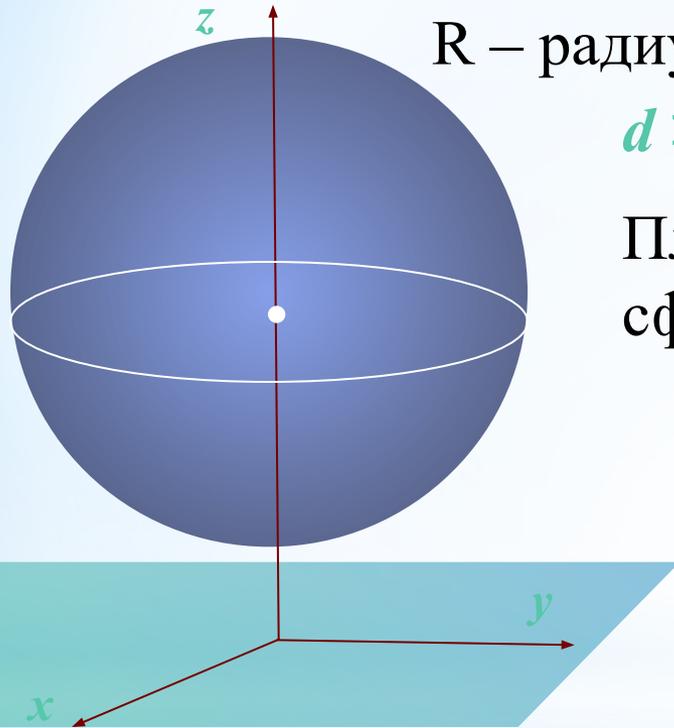
Взаимное расположение сферы и ПЛОСКОСТИ

d – расстояние от центра сферы до плоскости,

R – радиус сферы

$$d > R$$

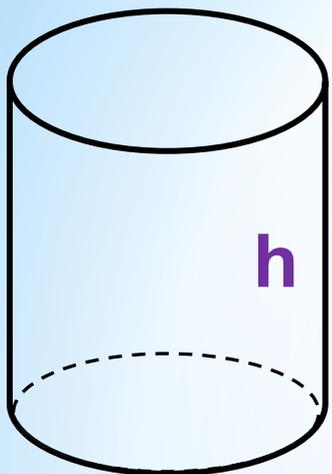
Плоскость не имеет общих точек со сферой.



$$R^2 - d^2 < 0$$

цилиндр

Объёмы и площади

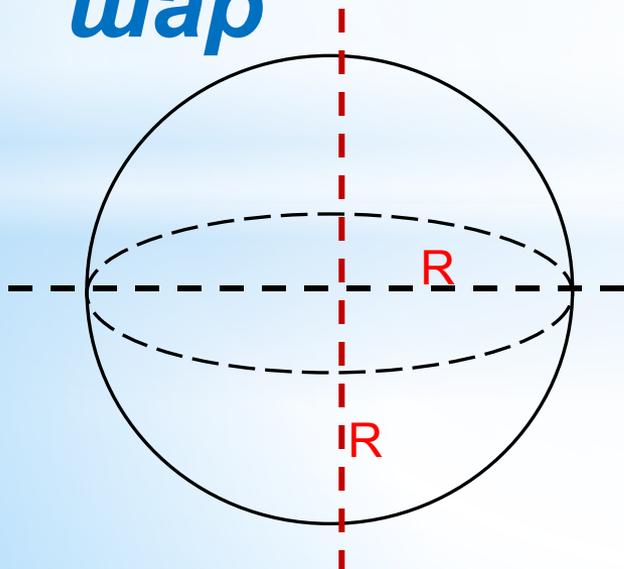


$$V = S_{\text{осн}} h$$

$$V = \pi R^2 h$$

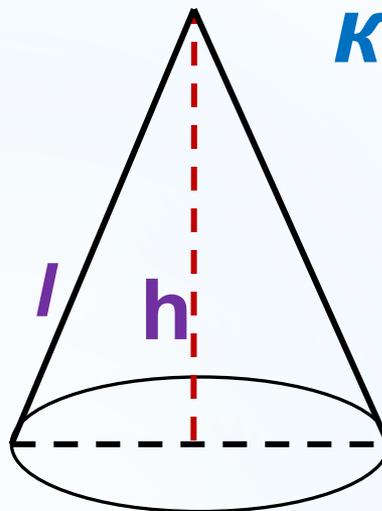
$$S_{\text{полн}} = 2\pi R(R + h)$$

шар



$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

конус

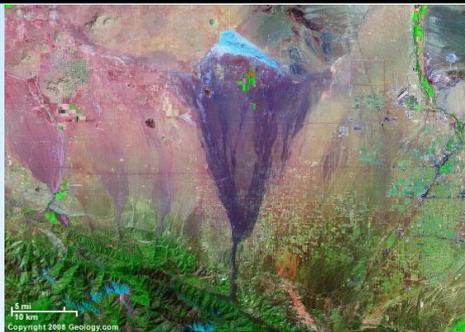


$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} h$$

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

$$S_{\text{бок}} = \pi R l$$

Это интересно



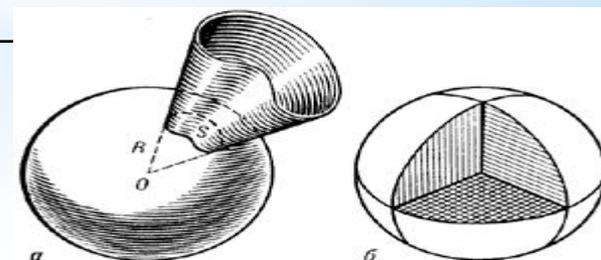
В геологии существует понятие "конус выноса". Это форма рельефа, образованная скоплением обломочных пород, вынесенных горными реками на предгорную равнину или в более плоскую широкую долину.

В биологии есть понятие "конус нарастания". Это верхушка побега и корня растений, состоящая из клеток образовательной ткани.



"Конусами" называется семейство морских моллюсков подкласса пережнежаберных. Укус конусов очень опасен. Известны смертельные случаи.

В физике встречается понятие "телесный угол". Это конусообразный угол, вырезанный в шаре.



СОДЕРЖАНИЕ

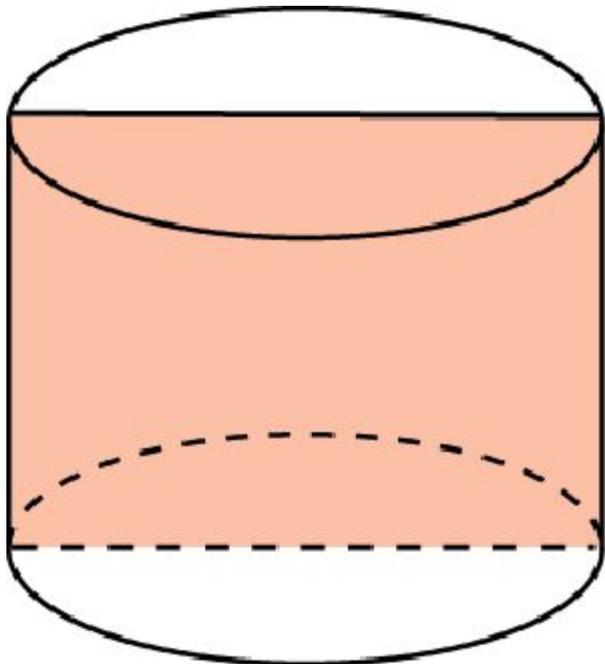
Задание 1. Заполнить таблицу «Тела вращения и их объемы»

Наименование	Изображение	Вращаемая поверхность	Формула объема
Цилиндр			
Конус			
Усеченный конус			
Шар			

ДАЛЕЕ 

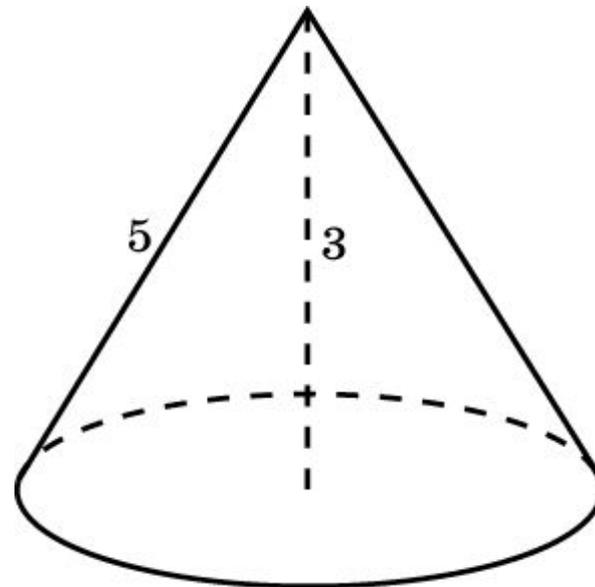
Наименование	Изображение	Вращаемая поверхность	Формула объема
Цилиндр			$V = \pi R^2 H$
Конус			$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H$
Усеченный конус			$V = \frac{1}{3} \pi H (R^2 + RR_1 + R_1^2)$
Шар			$V = \frac{4}{3} \pi R^3$

*Задание 2



Осевое сечение прямого кругового цилиндра - квадрат со стороной 1 см. Найдите объем цилиндра.

Ответ: $\frac{\pi}{4}$ см³.



Высота конуса 3 см, образующая 5 см. Найдите его объем.

Ответ: 16π см³.

Задание 3. Тела вращения

- 1. Высота цилиндра 3 см, диагональ осевого сечения 5 см. Найдите радиус основания.**
A) 4 см B) 6 см C) 2 см D) 8 см E) 1 см
- 2. Радиус конуса 6 см, образующая 10 см. Найдите высоту конуса**
A) 6 см B) 4 см C) 12 см D) 8 см E) 16 см
- 3. Радиус основания цилиндра 5 см, высота 6 см. Найдите боковую поверхность цилиндра.**
A) 30Псм^2 B) 60Псм^2 C) 150Псм^2 D) 75Псм^2 E) 180Псм^2
- 4. Найдите объем цилиндра высотой 6 см и радиусом основания 3 см**
A) 18Псм^2 B) 108Псм^2 C) 72Псм^2 D) 54Псм^2 E) 324Псм^2
- 5. Дан конус радиусом 5 см и высотой 12 см. Найдите объем конуса.**
A) 300Псм^3 B) 200см^3 C) 100Псм^3 D) 150Псм^3 E) 180Псм^3
- 6. Дан конус радиусом 4 см и образующей 8 см. Найдите боковую поверхность конуса.**
A) 48П B) 16П C) 20П D) 64П E) 32Псм^2
- 7. Найдите объем конуса высотой 5 см и образующей 13 см.**
A) 720Псм^3 B) 144Псм^3 C) 240Псм^3 D) 60Псм^3 E) 128Псм^3
- 8. Дан конус радиусом 8 см и образующей 10 см. Найдите объем конуса.**
A) 720Псм^3 B) 144Псм^3 C) 240Псм^3 D) 60Псм^3 E) 128Псм^3

Литература

- Гусев В. , Кайдасов Ж., Кагабаева А. методическое пособие «Геометрия» для 11 класса естественно – математического направления общеобразовательных школ – Алматы: Издательство «Мектеп», 2016.
- Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др. Геометрия, 10-11: Учеб. для общеобразовательных учреждений. – М.: Просвещение, 2017.
- http://window.edu.ru/catalog/resources?p_page=32&p_nr=50
- <http://shool-collection.edu>
- <http://festival.1september.ru>
- <http://youtube.com>