



Модуль 1.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Раздел 1. Статика

Раздел 2. Кинематика

Раздел 3. Динамика точки

Раздел 4. Общие теоремы динамики

Раздел 5. Аналитическая механика

Лекционный курс - 51 час

Практические занятия – 51 час

Самостоятельная работа :

- Решение задач.

- Выполнение и защита расчетно-графических

заданий (РГЗ)

**М
Е
Х
А
Н
И
К
А**

МЕХАНИКА

Теоретическая механика.

Модуль 1

Раздел 1 – СТАТИКА

ВВЕДЕНИЕ В СТАТИКУ

ЛЕКЦИЯ 1

ЛЕКЦИЯ 2

ЛЕКЦИЯ 3

УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ

ЛЕКЦИЯ 4

ЛЕКЦИЯ 5

ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

ЛЕКЦИЯ 6

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
МЕХАНИКА

СТАТИКА

Введение в статику

ЛЕКЦИЯ 1

План:

- 1.1 Основные понятия и определения.
- 1.2. Аксиомы статики.
- 1.3. Связи и их реакции

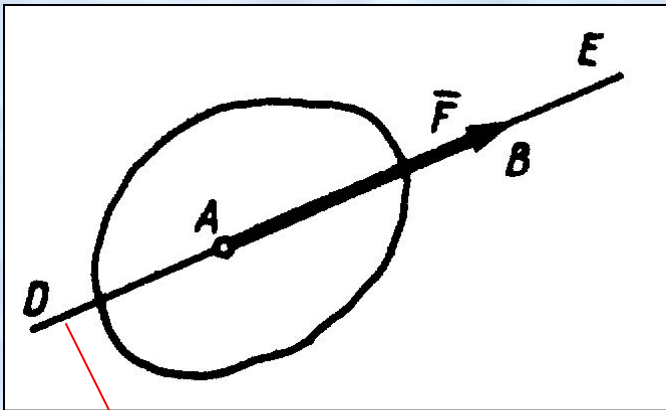
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Статика - раздел механики, в котором излагается общее учение о силах и условиях равновесия материальных тел, находящихся под действием сил.

Равновесие - это состояние покоя тела по отношению к другим телам, например по отношению к Земле.

Абсолютно твердое тело - такое тело, расстояние между каждыми двумя точками которого всегда остается постоянным.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ



линия
действия
силы

Сила в механике – это величина, являющаяся основной мерой механического взаимодействия материальных тел.

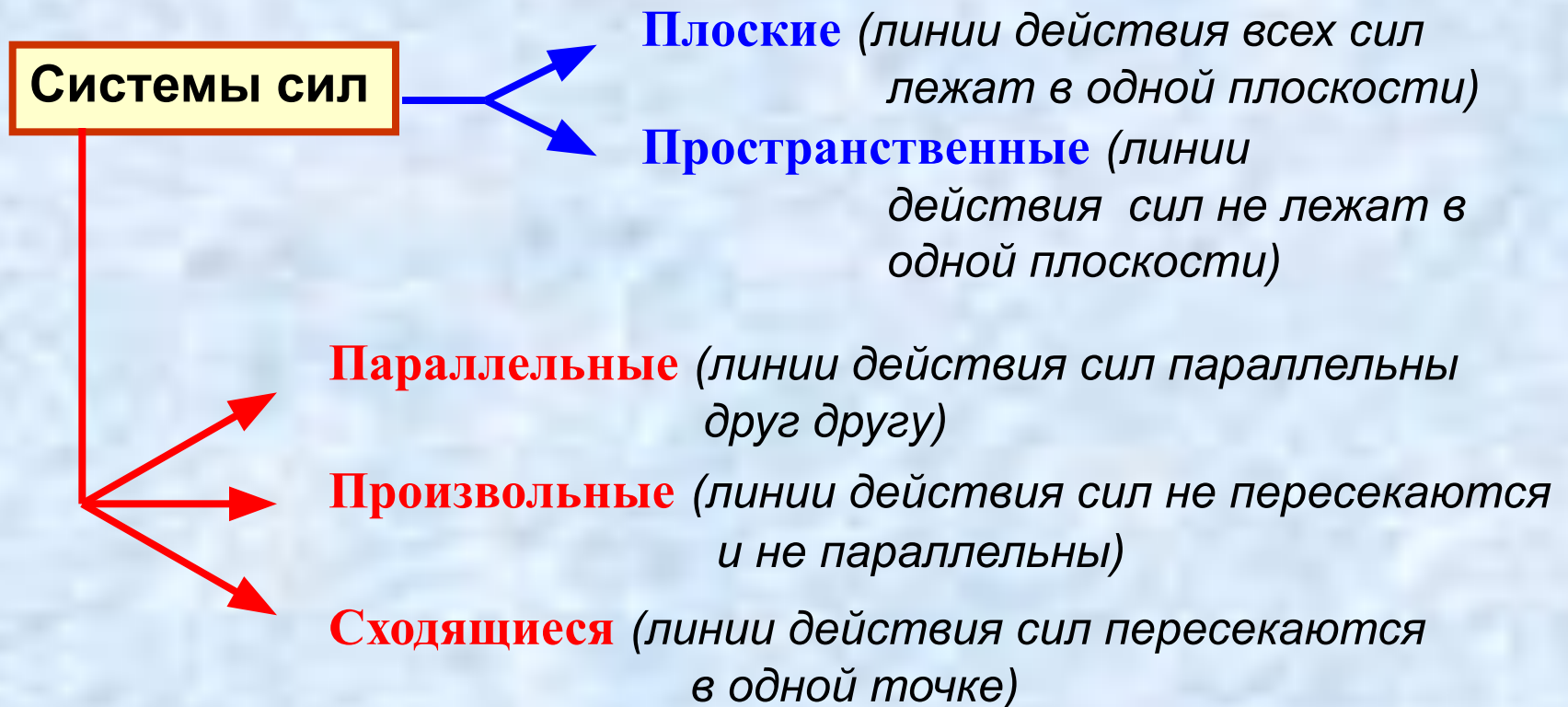
Действие силы на тело определяется:

- **модулем** силы;
- **направлением** вектора силы;
- **точкой приложения** вектора силы.

Основная единица измерения силы - 1 ньютон (1 Н).

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Система сил - совокупность сил, действующих на рассматриваемое тело



ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Эквивалентными называются две системы сил, приводящие тело к одному и тому же кинематическому состоянию.

Уравновешенная (эквивалентная нулю) – это такая система сил, под действием которой свободное твердое тело может находиться в покое.

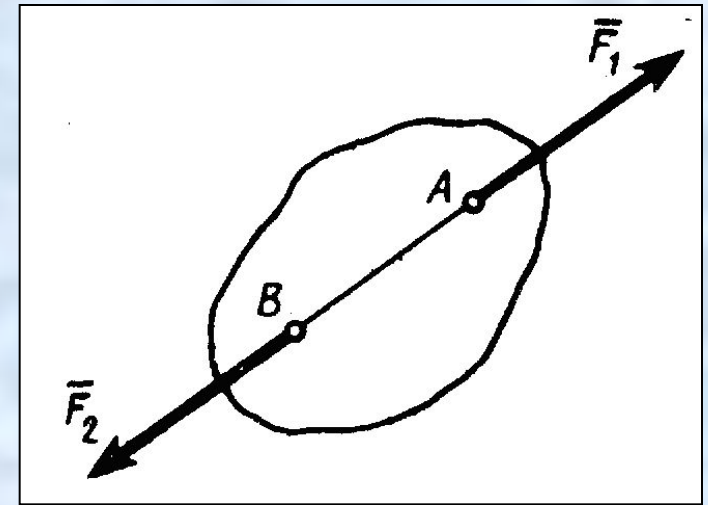
Равнодействующей системы сил, называется сила, эквивалентная данной системе сил.

Сила, приложенная к телу в какой-нибудь одной его точке, называется **сосредоточенной**.

Силы, действующие на все точки объема или части поверхности тела, называются **распределенными**.

АКСИОМЫ СТАТИКИ

1. Если на свободное абсолютно твердое тело действуют две силы, то тело может находиться в равновесии тогда и только тогда, когда эти силы равны по модулю ($F_1 = F_2$) и направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны



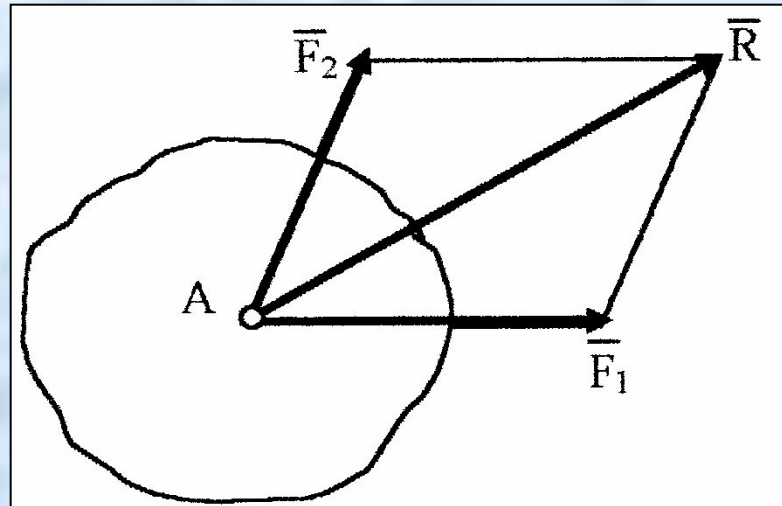
2. Действие данной системы сил на абсолютно твердое тело не изменяется, если к ней прибавить или от нее отнять уравновешенную систему сил

Следствие: действие силы на абсолютно твердое тело не изменится, если перенести точку приложения силы вдоль ее линии действия в любую другую точку тела.

АКСИОМЫ СТАТИКИ

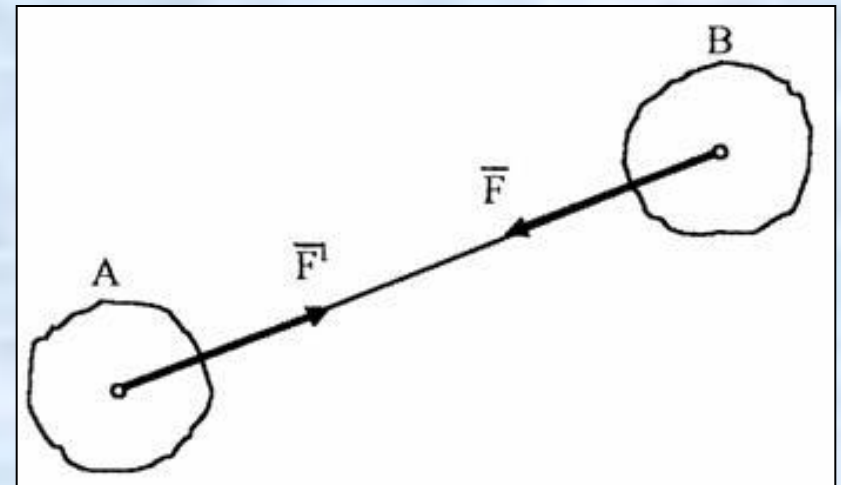
3. Закон параллелограмма сил: две силы, приложенные к телу в одной точке, имеют равнодействующую, приложенную в той же точке и изображаемую диагональю параллелограмма, построенного на этих силах, как на сторонах

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$$



АКСИОМЫ СТАТИКИ

4. Закон равенства действия и противодействия: *при всяком действии одного материального тела на другое имеет место такое же численно, но противоположное по направлению противодействие, т.е.*



5. Принцип отвердевания: *равновесие изменяемого (деформируемого) тела, находящегося под действием уравновешенной системы сил, возможно только при его «отвердевании»*

СВЯЗИ И ИХ РЕАКЦИИ

Свободным называется тело, которое может совершать из данного положения любые перемещения в пространстве

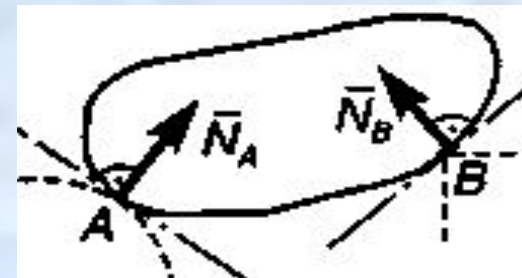
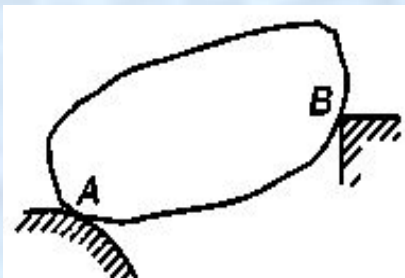
Несвободным называется тело, перемещениям которого в пространстве препятствуют какие-нибудь другие, скрепленные или соприкасающиеся с ним, тела (**СВЯЗИ**)

Реакция связи – это сила, с которой связь действует на тело, препятствуя его перемещениям, называется.

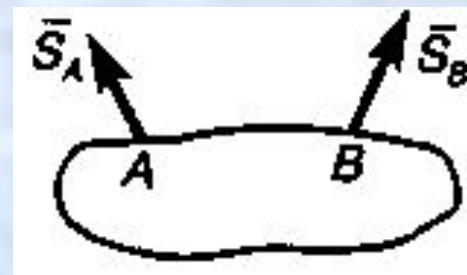
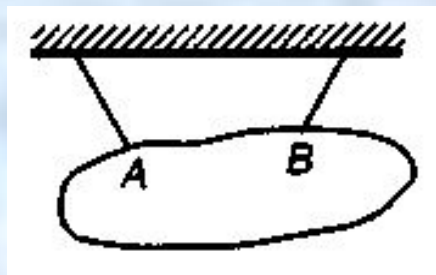
Принцип освобожденности от связей: всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если действие связей заменить их реакциями, приложенными к данному телу

СВЯЗИ И ИХ РЕАКЦИИ

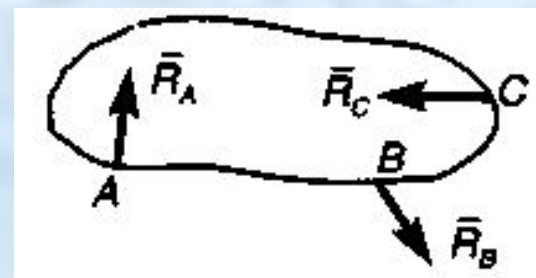
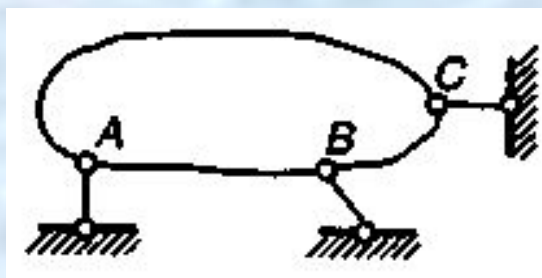
Гладкая
поверхность



Гибкая связь

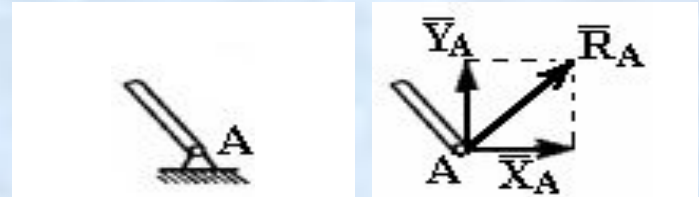


Шарнирный
стержень

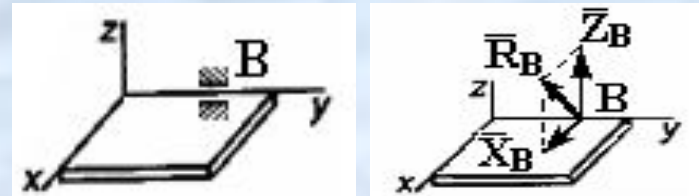


СВЯЗИ И ИХ РЕАКЦИИ

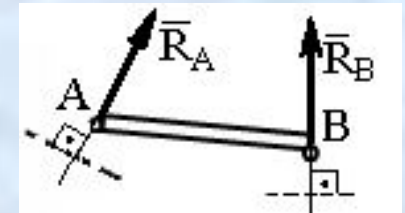
Шарнирно-неподвижная опора



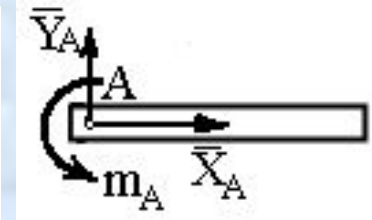
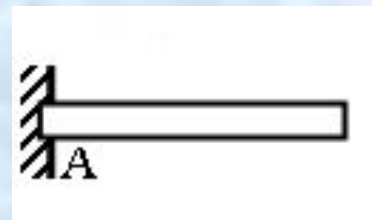
Цилиндрический шарнир



Шарнирно-подвижная опора



Жесткая заделка





Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
МЕХАНИКА

СТАТИКА

Введение в статику

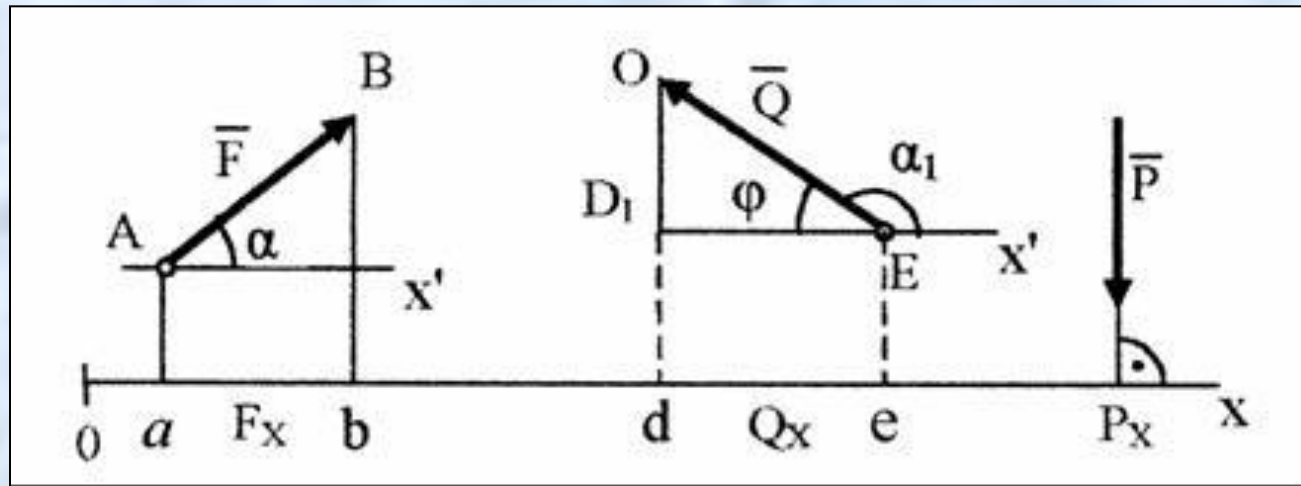
ЛЕКЦИЯ 2

План:

- 2.1. Проекция сил.
- 2.2. Момент силы относительно точки и относительно оси.
- 2.3. Пара сил, момент пары

ПРОЕКЦИИ СИЛ

Проекция силы на ось - алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на косинус угла между силой и положительным направлением оси:



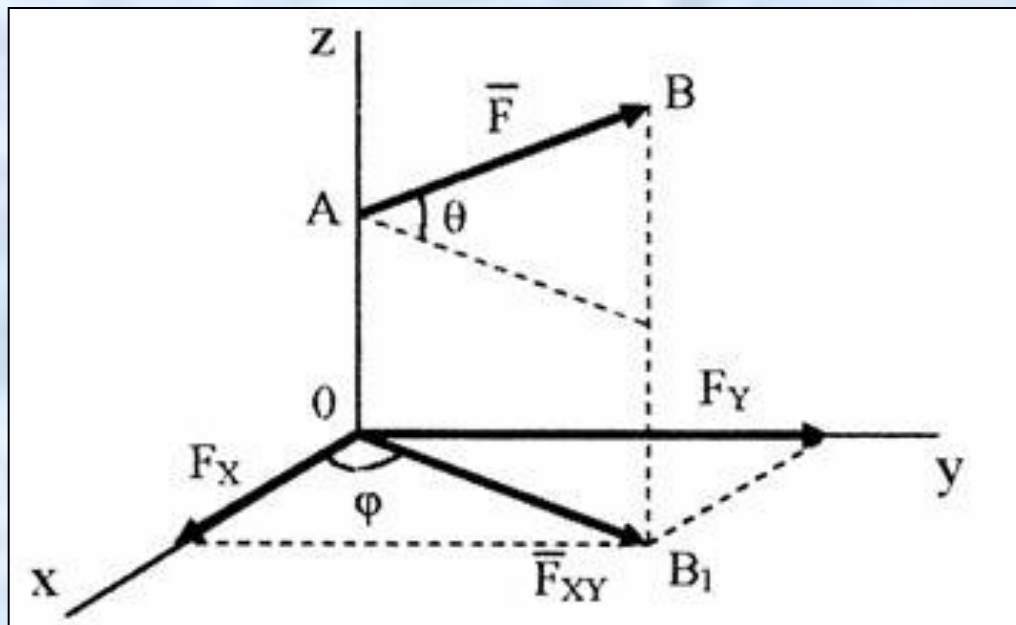
$$F_x = F \cos \alpha = ab;$$

$$Q_x = Q \cos \alpha_1 = -Q \cos \phi = -de$$

$$P_x = 0$$

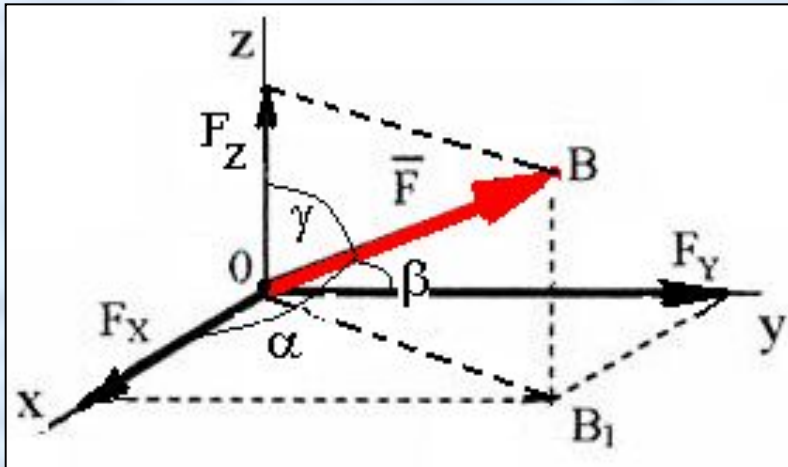
ПРОЕКЦИИ СИЛ

Проекция силы на плоскость это вектор, заключенный между проекциями начала и конца силы на эту плоскость



ПРОЕКЦИИ СИЛ

Силу можно задавать ее проекциями F_x , F_y , F_z на координатные оси:



$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

$$\cos \alpha = F_x / F,$$

$$\cos \beta = F_y / F,$$

$$\cos \gamma = F_z / F$$

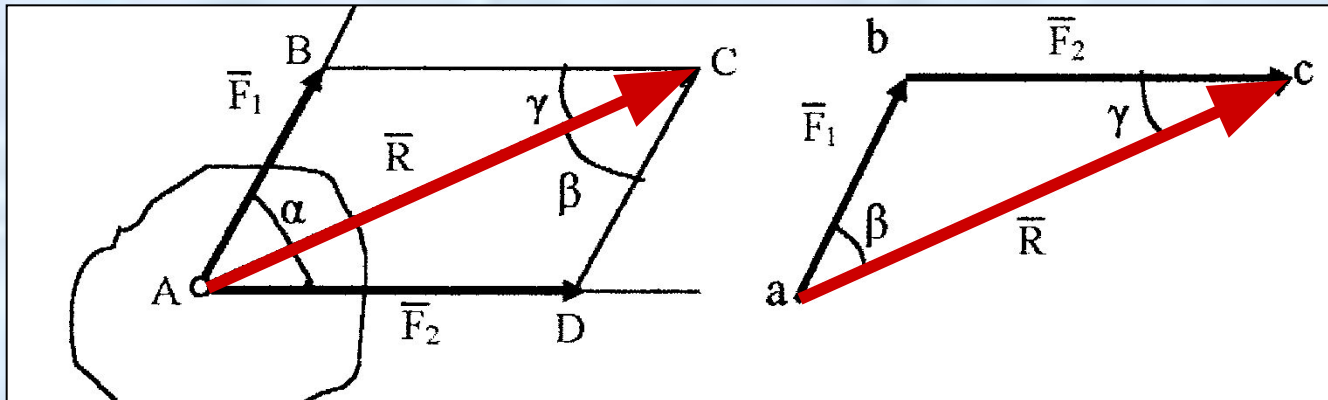
СПОСОБЫ СЛОЖЕНИЯ И РАЗЛОЖЕНИЯ СИЛ

Введение в статику

1. Сложение двух сил

Величину, равную геометрической сумме сил системы, называют **главным вектором этой системы сил**

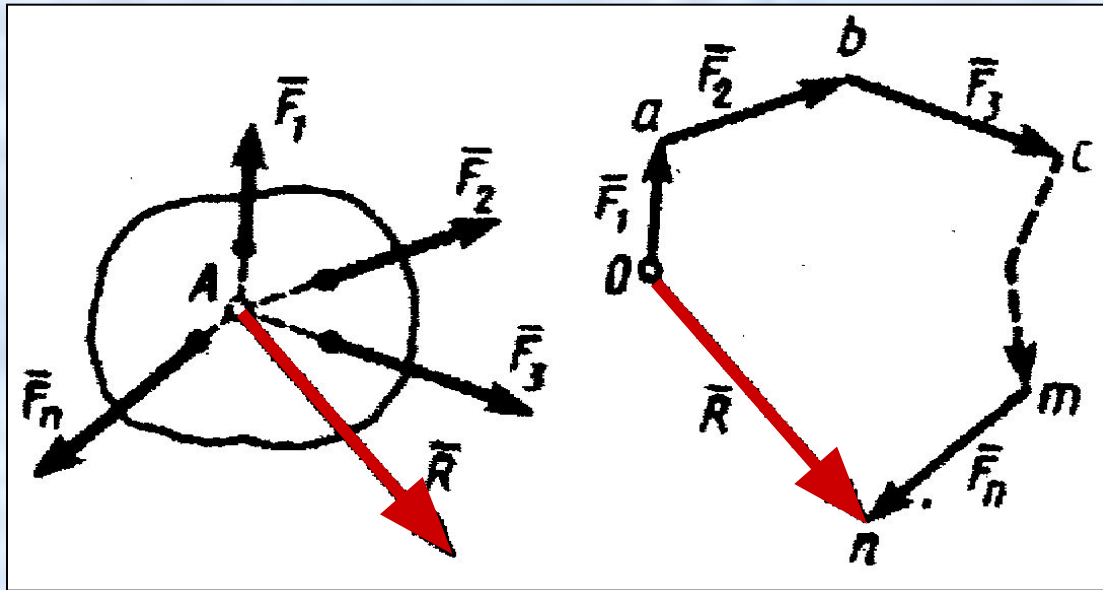
$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 \quad R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha}$$



СПОСОБЫ СЛОЖЕНИЯ И РАЗЛОЖЕНИЯ СИЛ

2. Сложение системы сил

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_n = \sum_{i=1}^n \bar{F}_k$$



Аналитический способ сложения сил

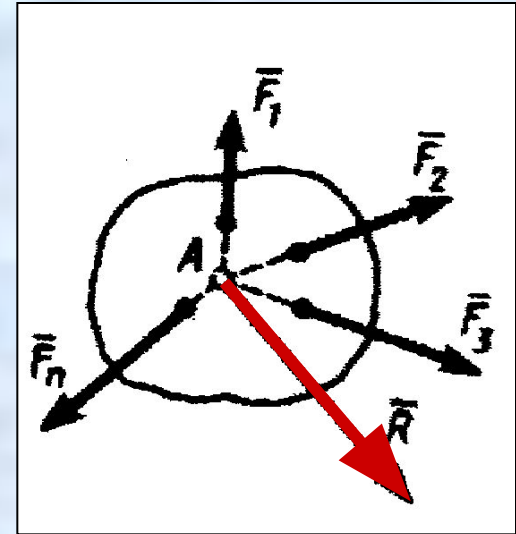
$$\begin{aligned} R_x &= \sum F_{kx}; \\ R_y &= \sum F_{ky}; \\ R_z &= \sum F_{kz} \end{aligned}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2};$$

$$\cos \alpha = R_x / R,$$

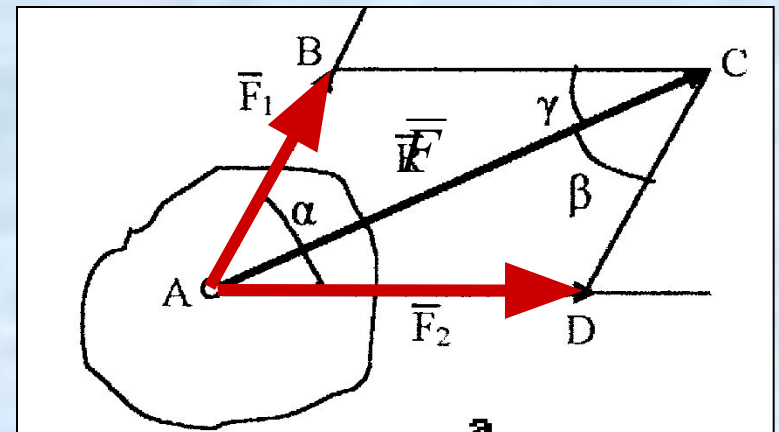
$$\cos \beta = R_y / R,$$

$$\cos \gamma = R_z / R.$$



Разложение сил

$$\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$$

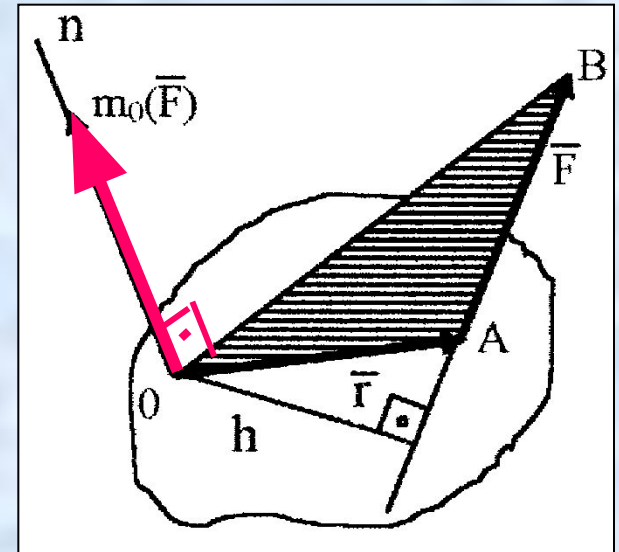


Момент силы относительно точки

Векторный момент силы относительно центра O - это приложенный в центре O вектор

$$\vec{m}_0(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$$

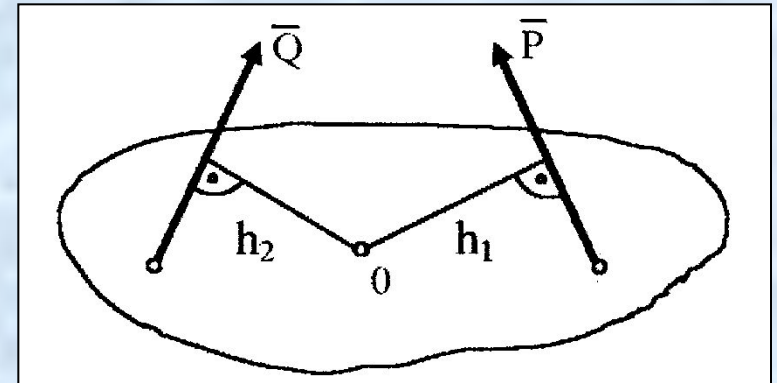
где $\vec{OA} = \vec{r}$ - радиус-вектор точки A , проведенный из центра O .



Алгебраический момент силы относительно центра

$$m_0(\vec{F}) = \pm F h.$$

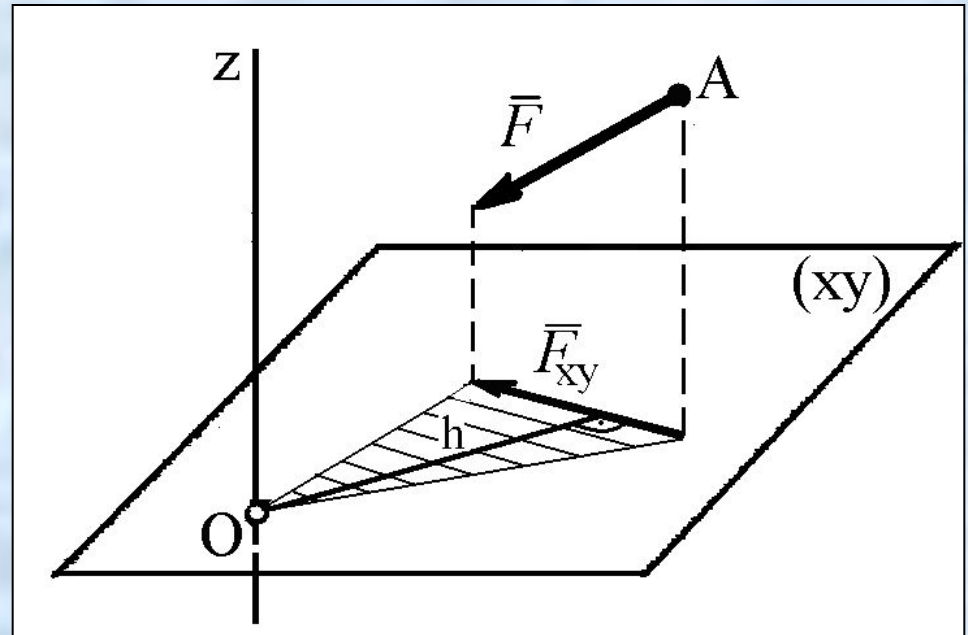
$$m_0(\vec{P}) = P h_1, \quad m_0(\vec{Q}) = -Q h_2$$



Момент силы относительно оси

- это момент проекции вектора силы на плоскость перпендикулярную оси относительно точки пересечения оси с этой плоскостью

$$m_z(\bar{F}) = \pm |F_{xy}| h$$



Пара сил, момент пары

Плоскость действия пары - плоскость, проходящая через линии действия сил пары

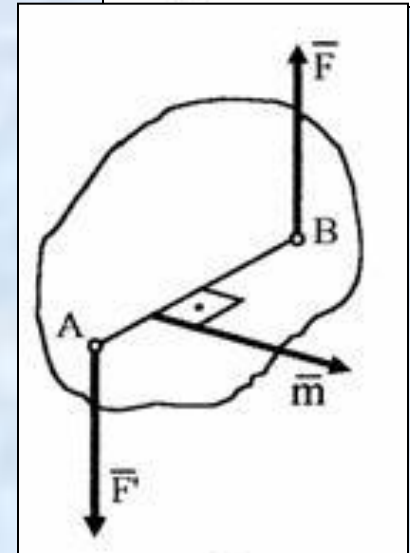
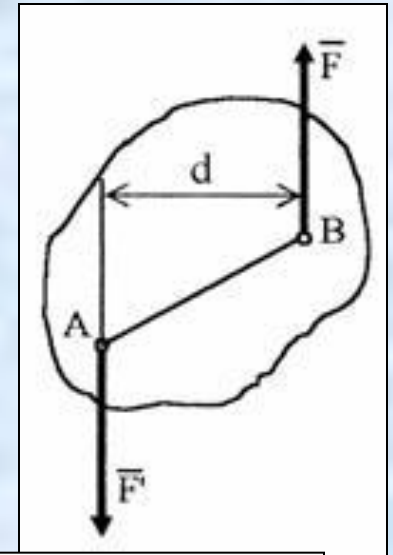
Алгебраический момент пары

$$m = \pm F d$$

Плечо пары d - кратчайшее расстояние между линиями действия сил пары

Векторный момент пары - это вектор \vec{m} , направленный перпендикулярно плоскости действия пары в ту сторону, откуда пара видна стремящейся повернуть тело против хода часовой стрелки

Этот вектор называется **скользящим**





Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
МЕХАНИКА

СТАТИКА

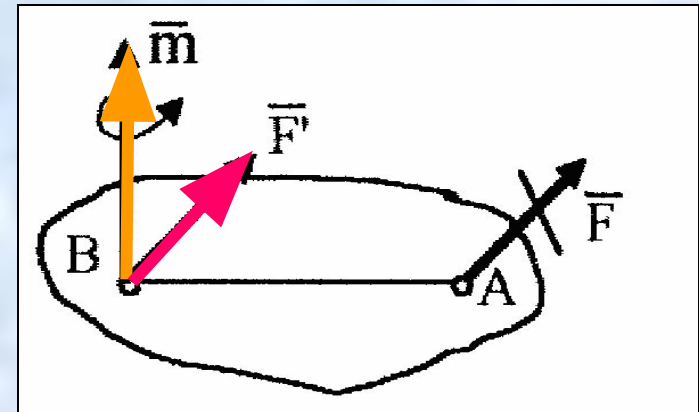
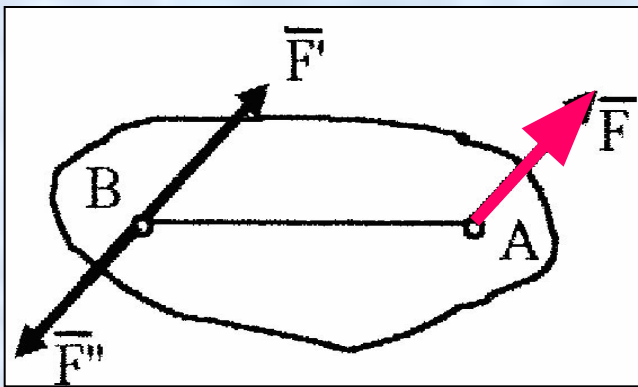
Введение в статику

ЛЕКЦИЯ 3

План:

- 3.1. Теорема о параллельном переносе силы.
- 3.2. Приведение системы сил к центру. Главный вектор и главный момент системы сил

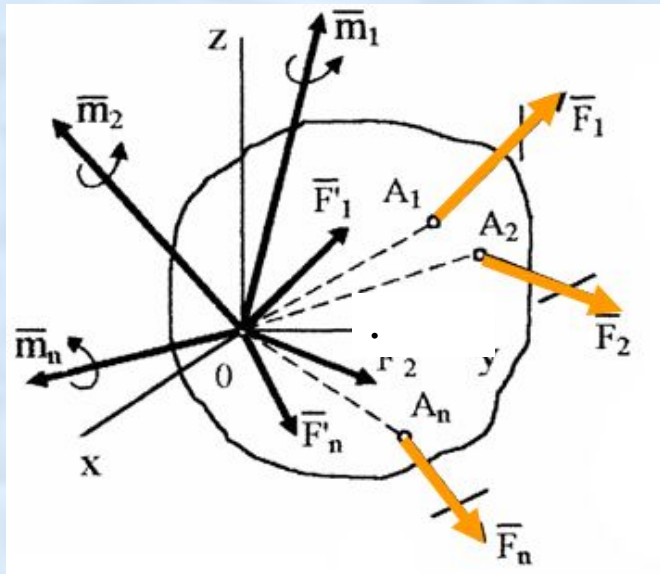
Теорема о параллельном переносе силы



Силу, приложенную к абсолютно твердому телу, можно, не изменяя её действия, переносить из данной точки в новый произвольный центр, прибавляя при этом пару с моментом, равным моменту переносимой силы относительно нового центра

Приведение системы сил к центру

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n) = (\bar{F}'_1, \bar{F}'_2, \dots, \bar{F}'_n) + (\bar{m}_1, \bar{m}_2, \dots, \bar{m}_n)$$



$$\bar{F}'_1 = \bar{F}_1, \text{ и т.д. } \bar{m}_1 = \bar{m}_0(\bar{F}_1) \text{ и т.д.}$$

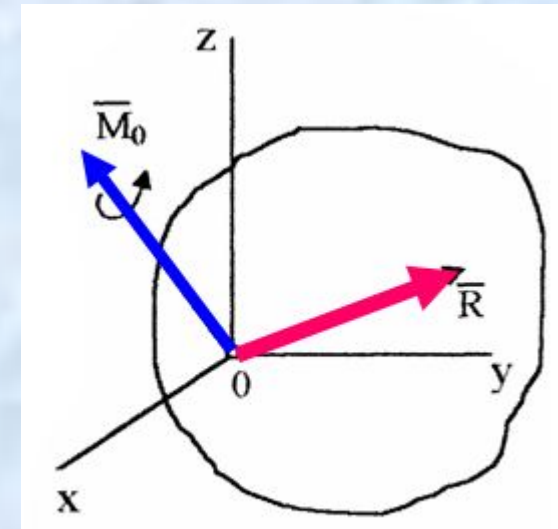
$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n) = \bar{R}, \bar{M}_0$$

$$\bar{R} = \sum \bar{F}_k$$

$$\bar{M}_0 = \sum \bar{m}_0(\bar{F}_k)$$

\bar{R} - **главный вектор** системы сил;

\bar{M}_0 - **главный момент** системы сил относительно центра O



Приведение системы сил к центру

Частные случаи приведения системы сил к центру:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{R} = 0 \\ \bar{M}_0 \neq 0 \end{array} \right\} \text{данная система сил приводится к одной паре сил}$$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{R} \neq 0 \\ \bar{M}_0 = 0 \end{array} \right\} \text{данная система сил приводится к одной силе, т. е. к равнодействующей}$$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{R} = 0 \\ \bar{M}_0 = 0 \end{array} \right\} \text{данная система сил будет уравновешенной}$$

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
МЕХАНИКА

СТАТИКА

Условия равновесия

ЛЕКЦИЯ 4

План:

- 4.1. Теорема Вариньона.
- 4.2. Условия равновесия различных систем сил.

ТЕОРЕМА ВАРИНЬОНА

Пусть система сил
приводится к
равнодействующей

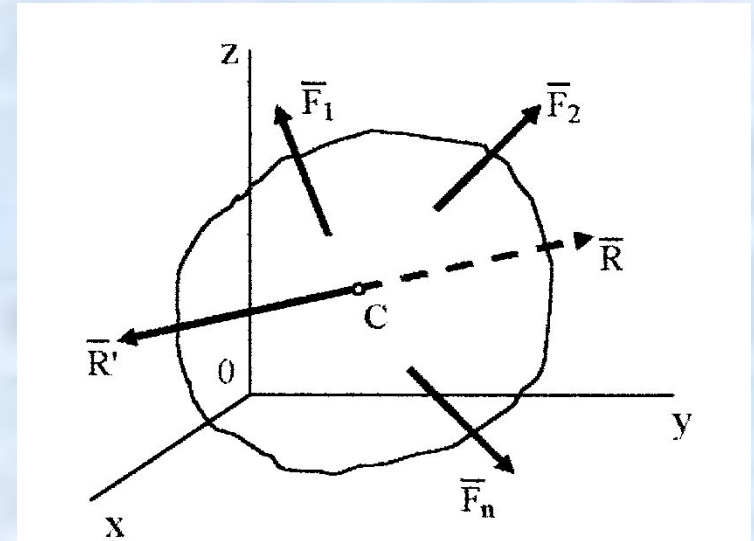
$$\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n = \bar{R}$$

Приложим в точке C силу $\bar{R}' = \bar{R}$

Система сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n, \bar{R}'$
будет находиться в равновесии и для нее

$$\bar{M}_0 = 0 \quad \text{или} \quad \sum \bar{m}_0(\bar{F}_k) + \bar{m}_0(\bar{R}') = 0$$

$$-\bar{m}_0(\bar{R}') = \bar{m}_0(\bar{R}) = \sum \bar{m}_0(\bar{F}_k)$$



Если данная система сил имеет равнодействующую, то момент равнодействующей относительно любого центра O равен сумме моментов сил системы относительно того же центра

УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМ СИЛ

**Равновесие
пространственной
системы произвольно
расположенных сил**

$$\bar{R} = 0 \quad \bar{M}_0 = 0$$

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} &= 0, & \sum m_x(\bar{F}_k) &= 0, \\ \sum F_{ky} &= 0, & \sum m_y(\bar{F}_k) &= 0, \\ \sum F_{kz} &= 0, & \sum m_z(\bar{F}_k) &= 0. \end{aligned}$$

**Равновесие
пространственной
системы параллельных
сил**

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} &= 0, \\ \sum F_{ky} &= 0, \\ \sum m_z(\bar{F}_k) &= 0. \end{aligned}$$

В случае, когда все действующие на тело силы параллельны оси z

УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМ СИЛ

Равновесие системы сходящихся сил

$$\bar{R} = \sum \bar{F}_k = 0$$

в геометрической форме: необходимо и достаточно, чтобы силовой многоугольник, построенный из векторов сил, был замкнутым

в аналитической форме:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = 0, \text{ или}$$

$$R_x = 0, \quad R_y = 0, \quad R_z = 0,$$

$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0, \quad \sum F_{kz} = 0$$

УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМ СИЛ

Равновесие плоской системы произвольных сил

①

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} &= 0, \\ \sum F_{ky} &= 0, \\ \sum m_O(\bar{F}_k) &= 0 \end{aligned}$$

②

$$\begin{aligned} \sum m_A(\bar{F}_k) &= 0, \\ \sum m_B(\bar{F}_k) &= 0, \\ \sum F_{kx} &= 0 \end{aligned}$$

ось Ox , **не**
перпендикулярна
прямой AB

③

$$\begin{aligned} \sum m_A(\bar{F}_k) &= 0, \\ \sum m_B(\bar{F}_k) &= 0, \\ \sum m_C(\bar{F}_k) &= 0 \end{aligned}$$

центры A , B и C ,
не лежат
на одной прямой

УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМ СИЛ

Равновесие плоской системы параллельных сил

$$\begin{aligned}\sum F_{ky} &= 0, \\ \sum m_0(\bar{F}_k) &= 0\end{aligned}$$

В случае, когда все действующие на тело силы параллельны оси Oy

$$\begin{aligned}\sum m_A(\bar{F}_k) &= 0, \\ \sum m_B(\bar{F}_k) &= 0\end{aligned}$$

точки A и B не должны лежать на прямой, параллельной векторам сил.

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
МЕХАНИКА

СТАТИКА

Условия равновесия

ЛЕКЦИЯ 5

План:

- 5.1. Равновесие систем тел.
- 5.2. Равновесие тела при наличии трения

РАВНОВЕСИЕ СИСТЕМ ТЕЛ

Внутренние связи – это связи, соединяющие части конструкции

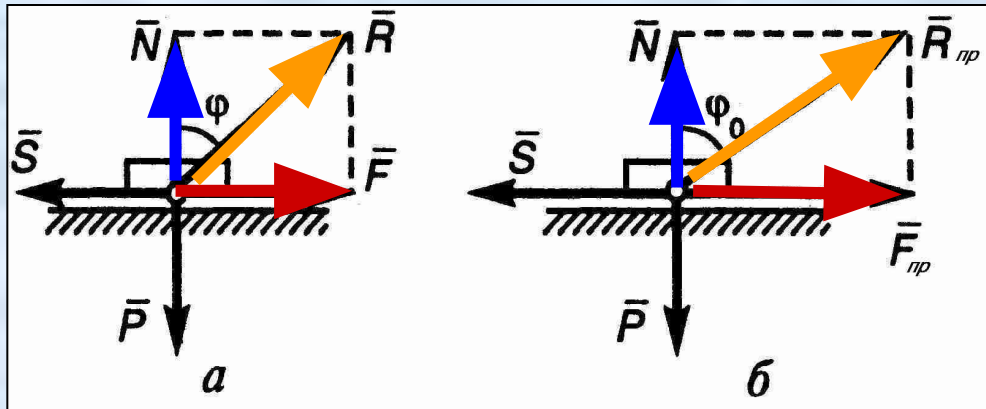
*Два способа решения задач
на равновесие составной конструкции:*

1 способ. Рассматривают равновесие всей конструкции как единое целое (не учитывая реакции внутренних связей) и дополнительно равновесие какой-нибудь одной или нескольких частей конструкции с учетом реакций внутренних связей.

2 способ. Конструкцию расчленяют на части и рассматривают равновесие каждой части, учитывая при этом реакции внутренних связей. При этом реакции внутренних связей будут попарно равны по модулю и противоположны по направлению.

РАВНОВЕСИЕ ТЕЛ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ

Сцепление и трение скольжения



Условие
равновесия:

$$S \leq f_0 N$$

$$\bar{F}_{\text{ТР}} = -\bar{S}$$

ϕ_0 - угол трения покоя

$$0 \leq F_{\text{ТР}} \leq F_{\text{ПР}}$$

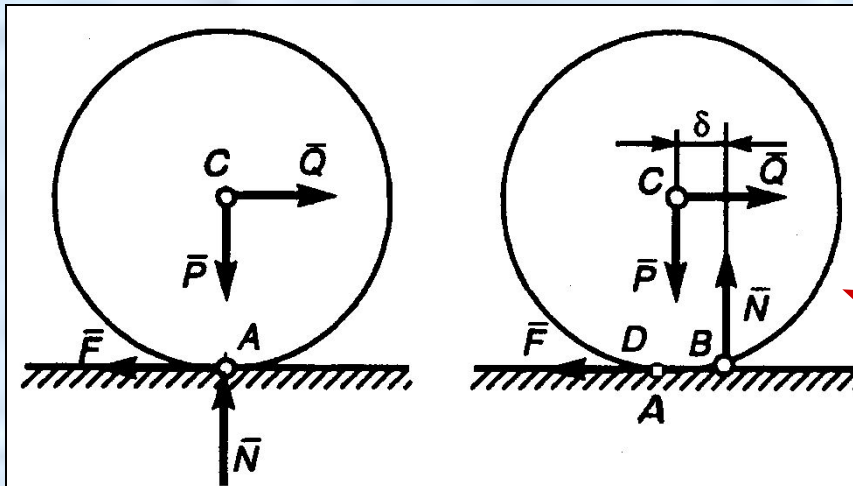
$$\text{tg} \phi_0 = F_{\text{ПР}} / N.$$

$$F_{\text{ПР}} = f_0 N$$

$$\text{tg} \phi_0 = f_0.$$

РАВНОВЕСИЕ ТЕЛ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ

Трение качения



(\bar{Q}, \bar{F}) – пара сил

(\bar{N}, \bar{P}) – пара сил

$$\Sigma m_A(\bar{F}_k) = 0$$

$$N\delta - Q_{\text{тр}}R = 0$$

$$Q_{\text{тр}} = (\delta / R) N.$$

Условие равновесия:

$$Q \leq \frac{\delta}{R} N$$

$$Q \leq f_0 N$$

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

СТАТИКА

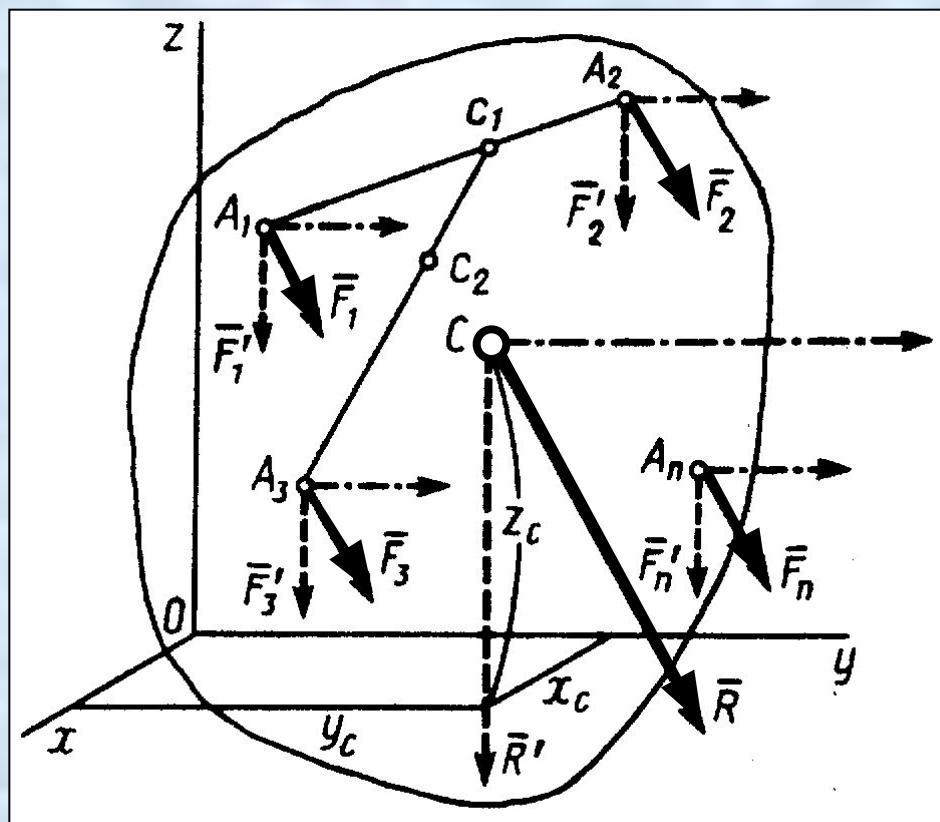
ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

ЛЕКЦИЯ 5

План:

- 6.1. Центр параллельных сил
- 6.2. Центр тяжести твердого тела

ЦЕНТР ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ



$$m_y(\bar{R}') = \sum m_y(\bar{F}'_k) = R \cdot x_C$$

$$R x_C = F_1 x_1 + F_2 x_2 + \dots + F_n x_n$$

$$R x_C = \sum F_k x_k.$$

Координаты центра
параллельных сил:

$$x_c = \frac{\sum F_k x_k}{R}$$

$$y_c = \frac{\sum F_k y_k}{R}$$

$$z_c = \frac{\sum F_k z_k}{R}$$

ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

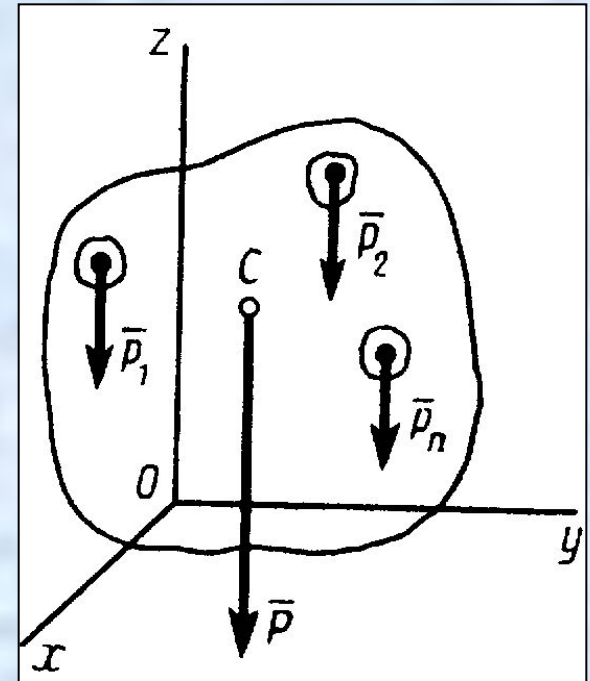
Силовое поле – это область, в которой на каждую материальную точку действует сила, зависящая от положения этой точки,

Поле тяжести вблизи земной поверхности можно назвать **однородным полем тяжести**.

Модуль равнодействующей сил тяжести называется **весом тела P**

Координаты центра тяжести:

$$x_C = \frac{\sum p_k x_k}{P} \quad y_C = \frac{\sum p_k y_k}{P} \quad z_C = \frac{\sum p_k z_k}{P}$$



ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Центр тяжести некоторых однородных тел

1 Для однородного объемного твердого тела (вес пропорционален объему):

$$x_C = \frac{\sum V_k x_k}{V} \quad y_C = \frac{\sum V_k y_k}{V} \quad z_C = \frac{\sum V_k z_k}{V}$$

2. Для тела, представляющего собой однородную пластину (вес пропорционален площади):

$$x_C = \frac{\sum S_k x_k}{S} \quad y_C = \frac{\sum S_k y_k}{S} \quad z_C = \frac{\sum S_k z_k}{S}$$

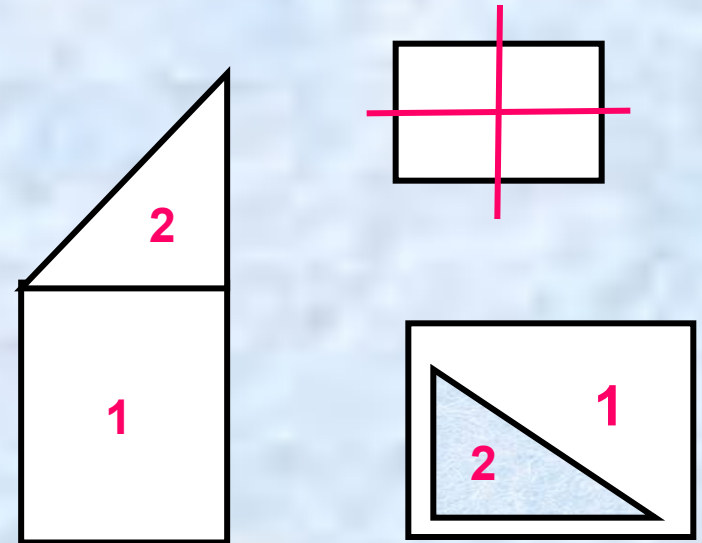
3. Координаты центра тяжести тонкого прямого стержня (вес пропорционален длине):

$$x_C = \frac{\sum l_k x_k}{L} \quad y_C = \frac{\sum l_k y_k}{L} \quad z_C = \frac{\sum l_k z_k}{L}$$

ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Способы нахождения положения центров тяжести тел сложной формы:

- Способ симметрии
- Способ разбиения
- Способ дополнения
- Способ интегрирования



$$x_C = \frac{1}{V} \int_{(V)} x dV,$$

$$y_C = \frac{1}{V} \int_{(V)} y dV,$$

$$z_C = \frac{1}{V} \int_{(V)} z dV.$$

МЕХАНИКА

Теоретическая механика

Модуль 1

Раздел 2 – КИНЕМАТИКА

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

ЛЕКЦИЯ 7

ЛЕКЦИЯ 8

КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО
ТЕЛА

ЛЕКЦИЯ 9

СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

ЛЕКЦИЯ 10

ЛЕКЦИЯ 11

ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ
ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

ЛЕКЦИЯ 12

ЛЕКЦИЯ 13

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
МЕХАНИКА

КИНЕМАТИКА

Кинематика точки

ЛЕКЦИЯ 7

План:

- 7.1. Векторный способ задания движения точки.
- 7.2. Координатный способ задания движения

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

Кинематикой называется раздел механики, в котором изучаются геометрические свойства движения тел без учета их инертности и действующих на них сил.

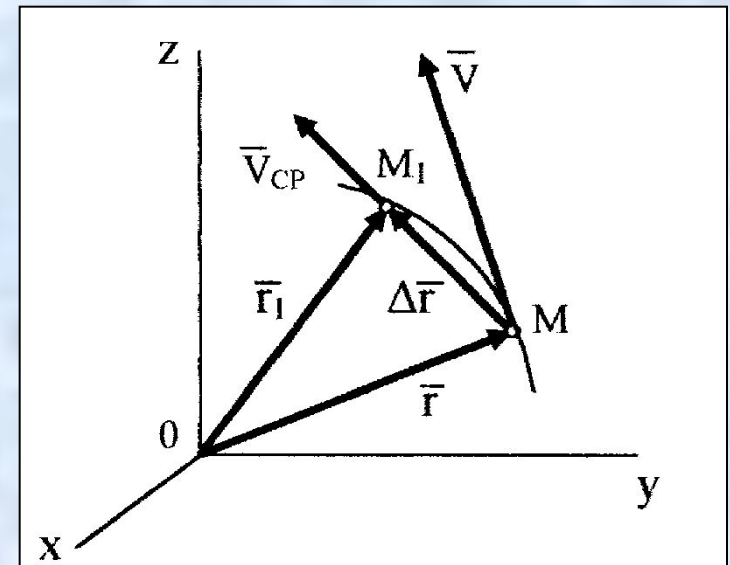
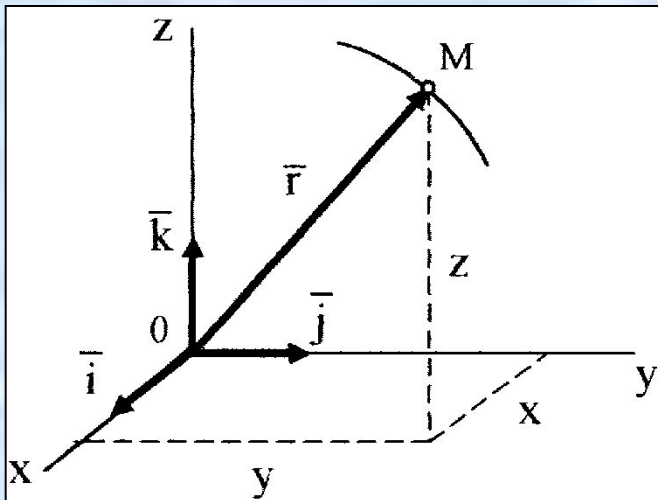
Траекторией точки называется непрерывная линия, которую описывает движущаяся точка относительно данной системы отсчета.

Для задания движения точки можно применять способы:

- *векторный;*
- *координатный;*
- *естественный.*

Векторный способ задания движения точки

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad \text{закон движения точки}$$



Скорость точки в момент времени t

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Ускорение точки в момент времени t

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.$$

Координатный способ задания движения точки

$$f_1(t);$$

$$y =$$

$$f_2(t);$$

$$z =$$

$$f_3(t).$$

закон движения точки

скорость точки

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt}$$

$$\cos \alpha = v_x / v$$

$$v_z = \frac{dz}{dt}$$

$$\cos \beta = v_y / v$$

$$\cos \gamma = v_z / v.$$

ускорение точки

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2},$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2},$$

$$\cos \alpha_1 = a_x / a,$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2},$$

$$\cos \beta_1 = a_y / a,$$

$$\cos \gamma_1 = a_z / a.$$

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
МЕХАНИКА

КИНЕМАТИКА

Кинематика точки

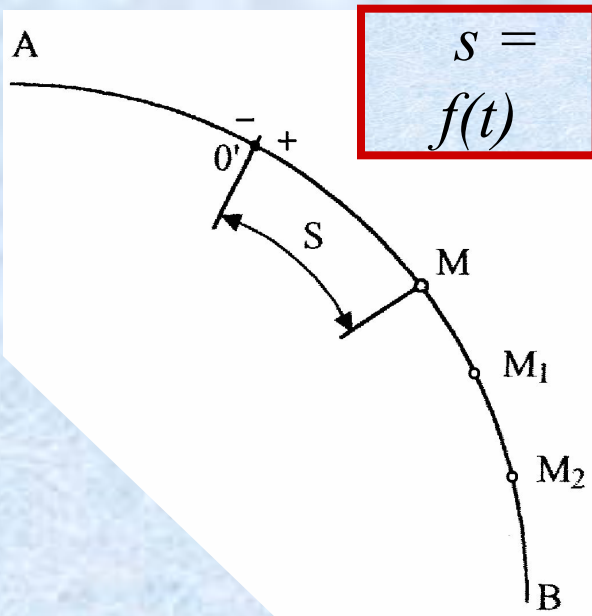
ЛЕКЦИЯ 8

План:

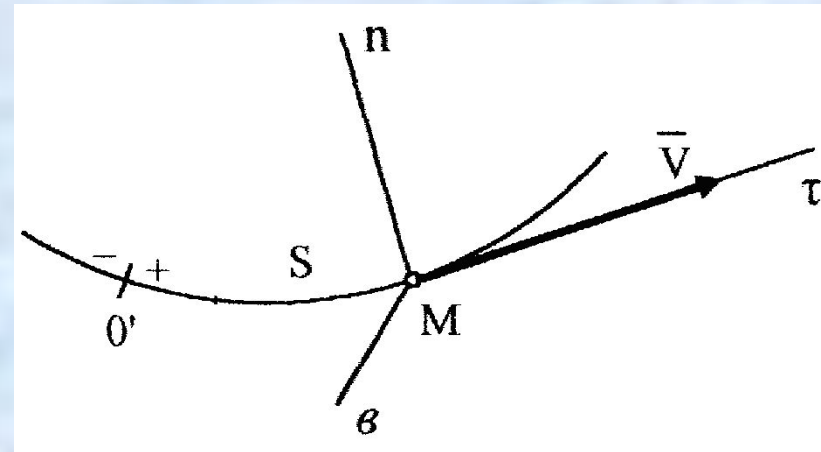
- 8.1. Естественный способ задания движения точки.
- 8.2. Частные случаи движения точки

Естественный способ задания движения точки

Закон движения точки



Оси естественного трехгранника



ось $M\tau$ - касательная

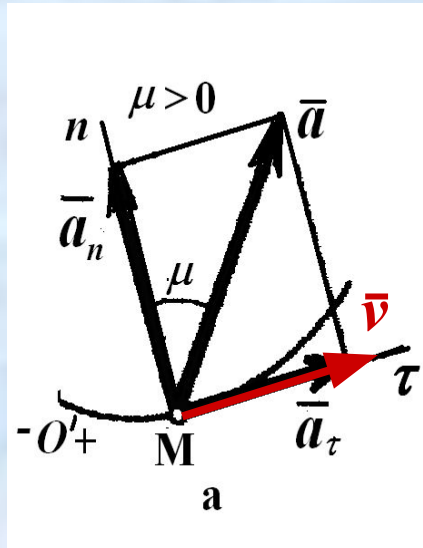
ось Mn - главная нормаль

ось Mb - бинормаль

Естественный способ задания движения точки

Скорость точки

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \text{или} \quad v = \frac{ds}{dt}$$



Кривизна траектории

в точке M

$$k = 1/\rho,$$

для прямой линии $\rho = \infty$;

для окружности $\rho = R$.

Ускорение точки

$$a_\tau \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{a_\tau}{a_n}$$

Естественный способ задания движения точки

Частные случаи движения точки

Прямолинейное движение

$$\rho = \infty$$

Тогда

$$a_n = v^2 / \rho = 0$$

Полное ускорение :

$$a = a_\tau = dv/dt.$$

При равномерном движении

$$v = \text{const}, a_\tau = 0, \\ a = 0$$

Криволинейное движение

- равномерное движение

$$a_\tau = dv/dt = 0$$

$$a = a_n =$$

- равнопеременное движение

$$a_\tau = \text{const} \quad a_n = v^2/\rho.$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$



Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
МЕХАНИКА

КИНЕМАТИКА

Кинематика твердого тела.
Простейшие движения

ЛЕКЦИЯ 9

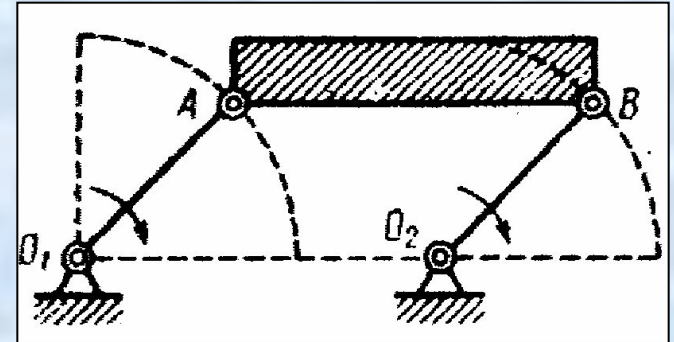
План:

9.1. Поступательное движение тела.

9.2. Вращение твёрдого тела вокруг неподвижной оси.

Поступательное движение тела

Поступательным называется движение твердого тела, при котором любая прямая, проведенная в этом теле, перемещается, оставаясь параллельной своему начальному направлению.



Свойства поступательного движения:

1. Все точки тела описывают одинаковые траектории
2. Все точки тела имеют в каждый момент времени одинаковые по модулю и направлению скорости и ускорения

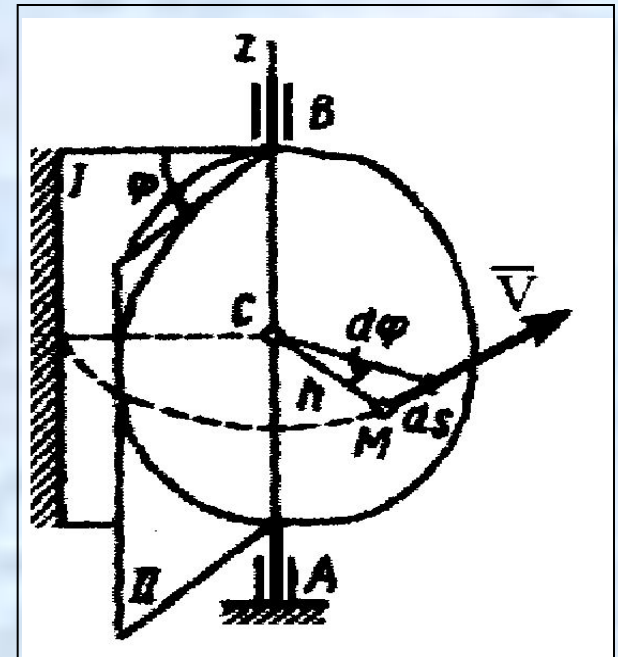
ВРАЩЕНИЕ ТВЁРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

Вращательным движением *твердого тела* вокруг неподвижной оси называется движение, при котором какие-нибудь две точки, принадлежащие телу (или неизменно с ним связанные), остаются во все время движения неподвижными

Проходящая через неподвижные точки прямая - **ось вращения**.

$$\phi = f(t)$$

ϕ - угол поворота тела



закон вращательного движения
твердого тела вокруг неподвижной оси.

ВРАЩЕНИЕ ТВЁРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

Угловая скорость тела

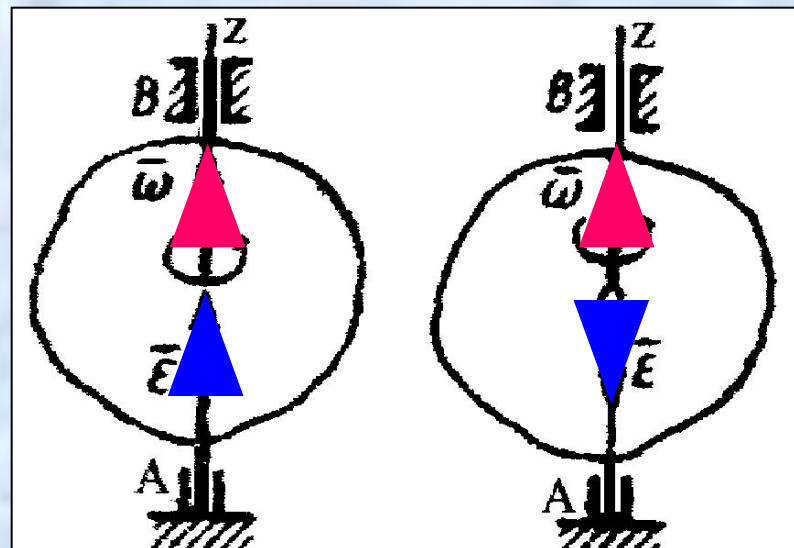
$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

Единица измерения ω
рад/с, 1/с, с⁻¹.

Угловое ускорение тела

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

Единица измерения ε
рад/с², 1/с², с⁻².

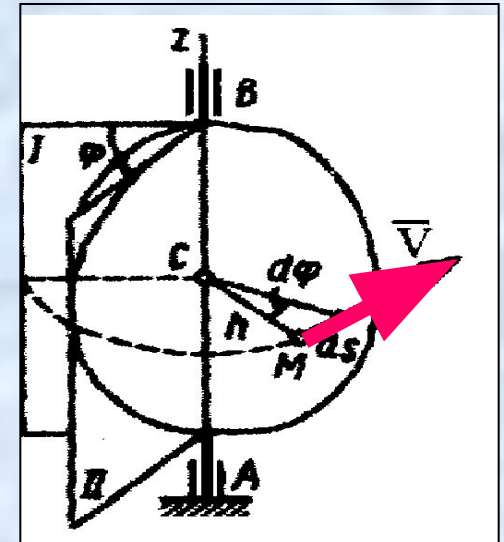


ВРАЩЕНИЕ ТВЁРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

Скорости точек вращающегося тела

$$v = \frac{ds}{dt} = h \frac{d\varphi}{dt}$$

$v = h \omega$ -линейная или окружная
скорость точки M .

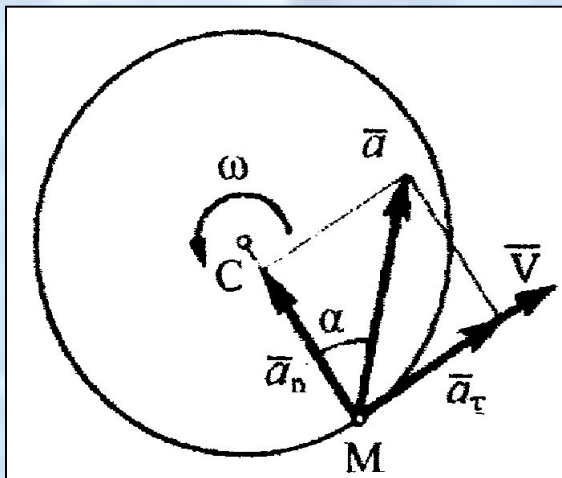


Ускорение точки M

$$a = \sqrt{a_{\tau}^2 + a_n^2}$$

$$a_{\tau} = h \varepsilon, \quad a_n = h \omega^2.$$

$$a = h \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$



Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
МЕХАНИКА

КИНЕМАТИКА

СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

ЛЕКЦИЯ 10

План:

10.1. Основные определения.

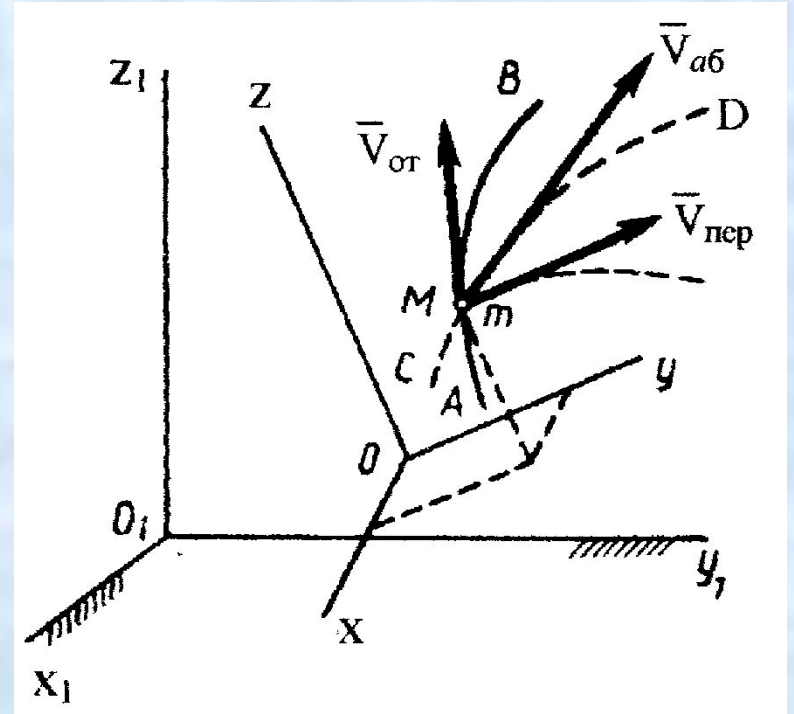
10.2. Теорема о сложении скоростей (теорема Кориолиса).

Основные определения

Сложное движение точки
 – это такое движение, при котором точка одновременно участвует в нескольких движениях.

Две системы отсчёта:

- **подвижная система** отсчета - $Oxyz$
- **неподвижная система** отсчета $O_1x_1y_1z_1$



Основные определения

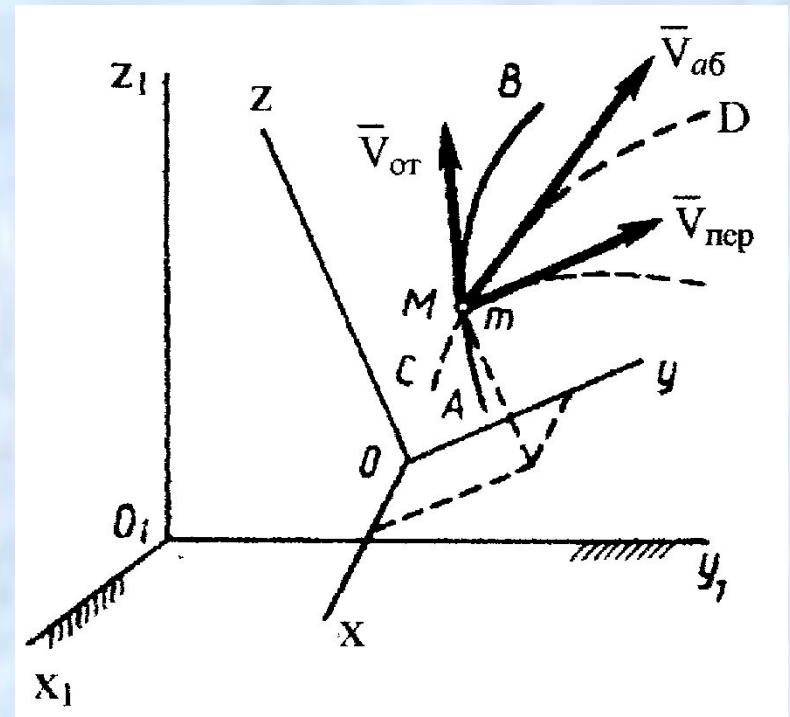
Относительное движение - движение точки по отношению к подвижной системе отсчета

$$\bar{v}_{от} \quad \bar{a}_{от}$$

Переносное движение - движение, совершаемое подвижной системой отсчета по отношению к неподвижной системе

$$\bar{v}_{пер} \quad \bar{a}_{пер}$$

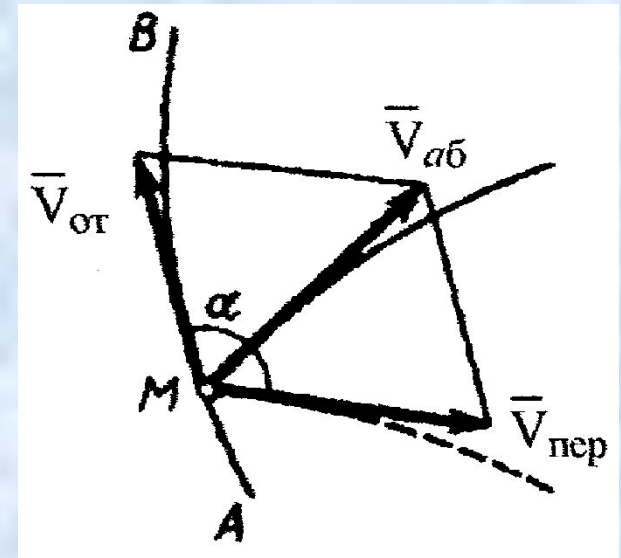
Абсолютное движение - движение, совершаемое точкой по отношению к неподвижной системе отсчета



Теорема о сложении скоростей

$$\vec{v}_{a\bar{b}} = \vec{v}_{от} + \vec{v}_{пер}$$

$$v_{a\bar{b}} = \sqrt{v_{от}^2 + v_{пер}^2 + 2v_{от}v_{пер}\cos\alpha}$$



при сложном движении абсолютная скорость точки равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей.

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
МЕХАНИКА

КИНЕМАТИКА

СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

ЛЕКЦИЯ 8

План:

11.1. Теорема о сложении ускорений.

11.2. Ускорение Кориолиса.

ТЕОРЕМА О СЛОЖЕНИИ УСКОРЕНИЙ (ТЕОРЕМА КОРИОЛИСА)

$$\bar{a}_{a\bar{b}} = \frac{d\bar{v}_{a\bar{b}}}{dt} = \frac{d\bar{v}_{от}}{dt} + \frac{d\bar{v}_{пер}}{dt}$$

$$\bar{a}_{a\bar{b}} = \frac{(d\bar{v}_{от})_{от}}{dt} + \frac{(d\bar{v}_{от})_{пер}}{dt} + \frac{(d\bar{v}_{пер})_{от}}{dt} + \frac{(d\bar{v}_{пер})_{пер}}{dt}$$

$$\bar{a}_{a\bar{b}} = \bar{a}_{от} + \bar{a}_{пер} + \bar{a}_{кор}$$

$$a_{кор} = \frac{(d\bar{v}_{пер})_{от}}{dt} + \frac{(d\bar{v}_{пер})_{пер}}{dt} \quad \text{- кориолисово ускорение}$$

(ускорение Кориолиса)

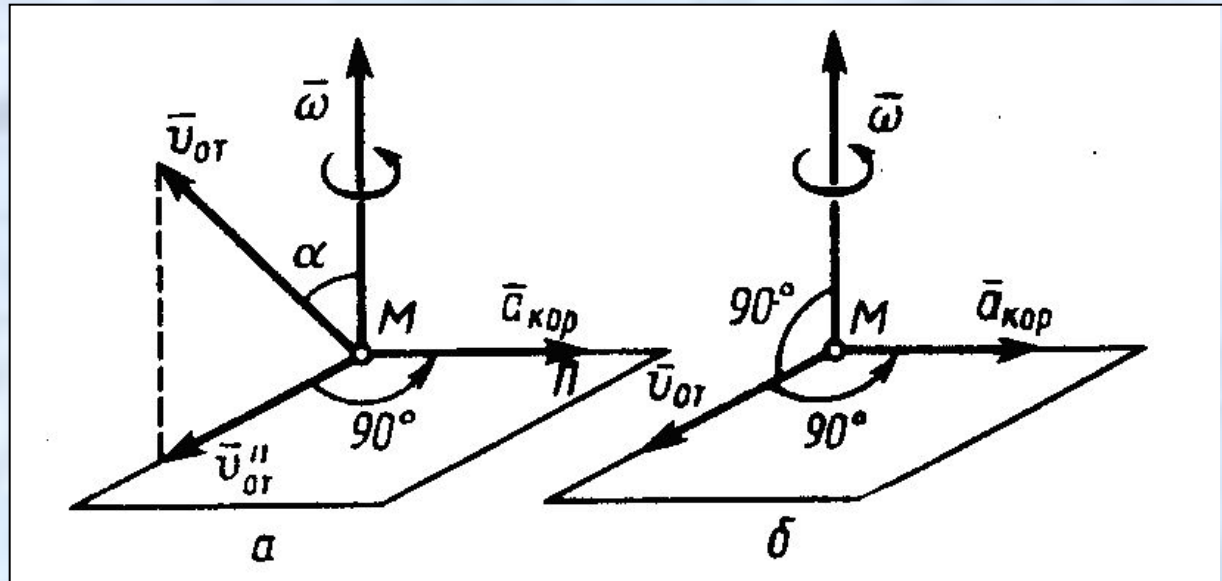
УСКОРЕНИЕ КОРИОЛИСА

$$\bar{a}_{\text{кор}} = 2(\bar{\omega} \times \bar{v}_{\text{от}})$$

$$a_{\text{кор}} = 2|\omega| \cdot |v_{\text{от}}| \sin\alpha$$

Направление вектора $\bar{a}_{\text{кор}}$
можно найти двумя способами:

- по **правилу Жуковского**;
- по **правилу векторного произведения**



УСКОРЕНИЕ КОРИОЛИСА

$$\bar{a}_{\text{кор}} = 0$$

$$\bar{a}_{\text{кор}} = 2(\bar{\omega} \times \bar{v}_{\text{от}})$$

в следующих случаях:

- когда $\omega = 0$, т. е. переносное движение является поступательным;

- когда относительная скорость в данный момент времени обращается в нуль;

- когда угол между векторами $\bar{\omega}$ и $\bar{v}_{\text{от}}$ $\alpha = 0$, или $\alpha = 180^\circ$, т.е. когда $\bar{v}_{\text{от}}$ параллелен оси переносного вращения



Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
МЕХАНИКА

КИНЕМАТИКА

Плоскопараллельное движение твёрдого тела

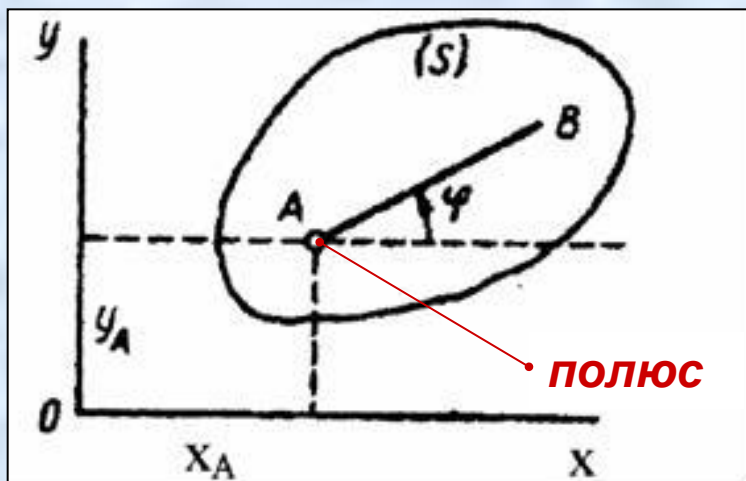
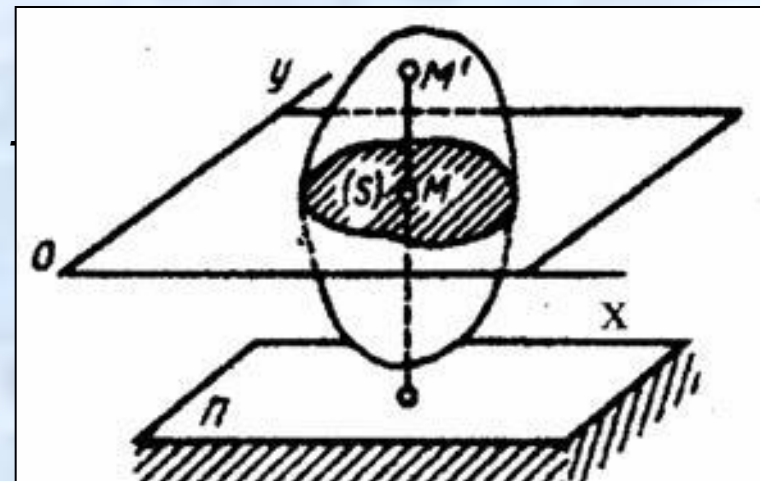
ЛЕКЦИЯ 12

План:

- 12.1. Понятие плоскопараллельного движения тела
- 12.2. Определение скоростей точек плоской фигуры
- 12.3. Понятие МЦС и способы его нахождения

Понятие о плоскопараллельном движении тела

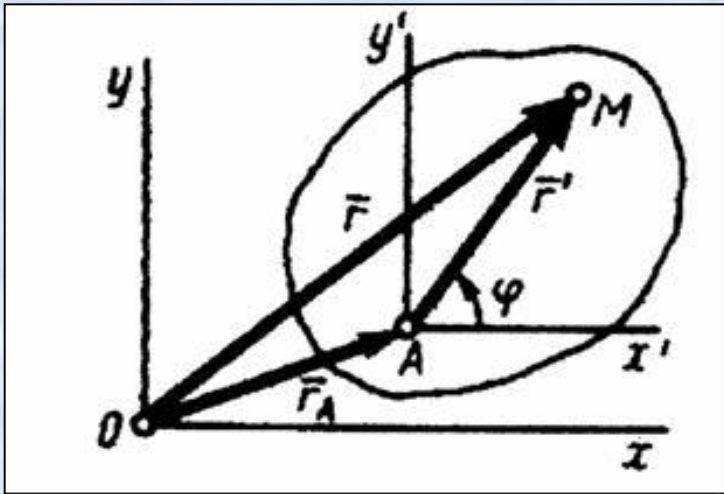
Плоскопараллельное (плоское) движение такое движение твердого тела, при котором все его точки перемещаются параллельно некоторой фиксированной плоскости Π



Закон движения плоской фигуры:

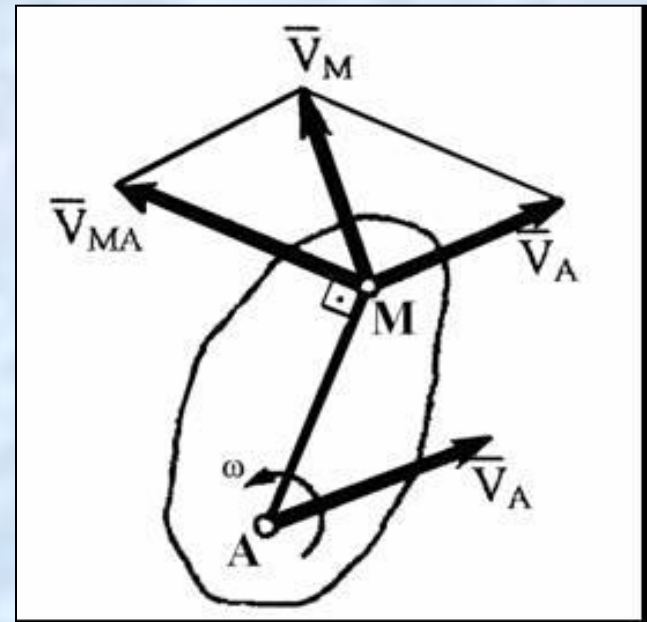
$$\begin{aligned}
 &x_A = \\
 &f_1(t); \\
 &y_A = \\
 &f_2(t); \\
 &\phi = f_3(t)
 \end{aligned}$$

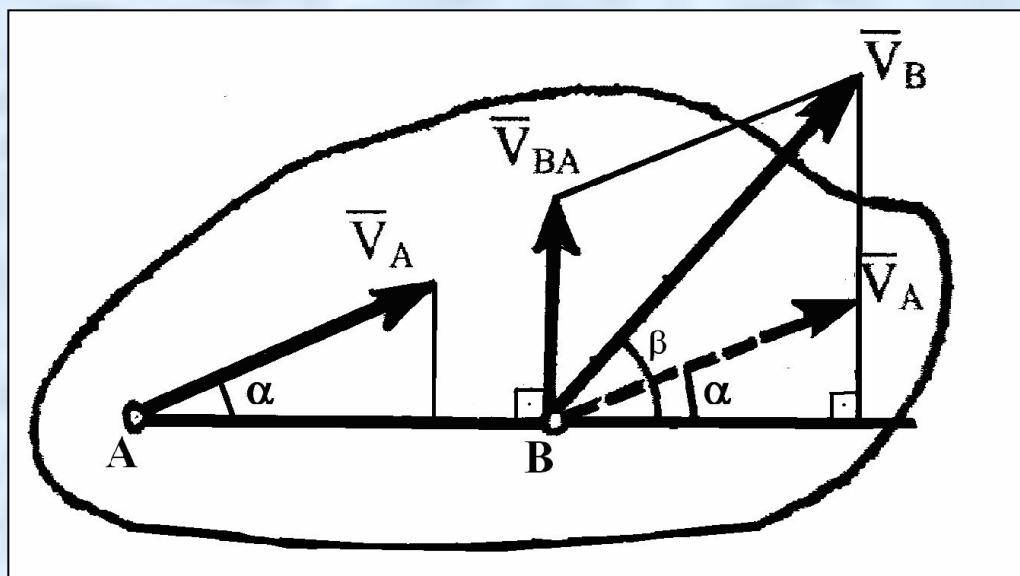
ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ ТОЧЕК ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ



$$\bar{v}_M = \bar{v}_A + \bar{v}_{MA}$$

$$\bar{v}_M = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d\bar{r}'}{dt},$$



**ТЕОРЕМА О ПРОЕКЦИЯХ СКОРОСТЕЙ
ТОЧЕК ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ**

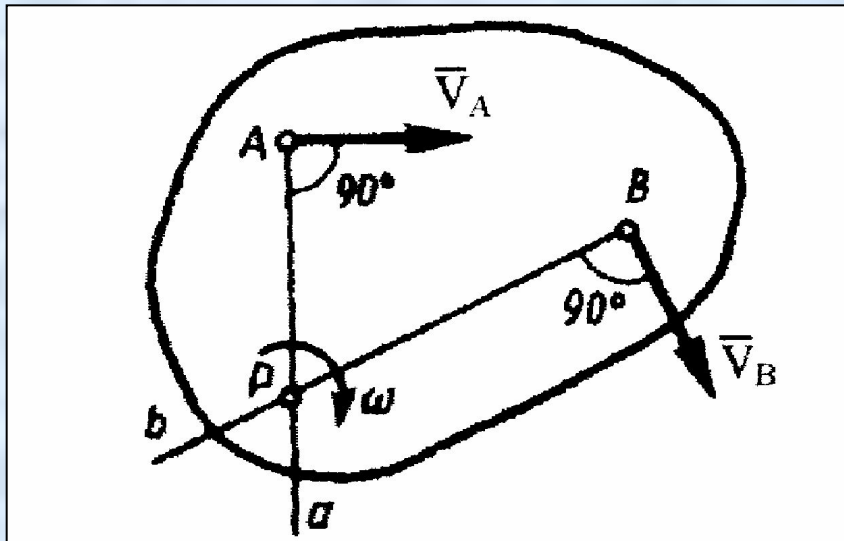
$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}$$

$$v_B \cos \beta = v_A \cos \alpha.$$

Проекции скоростей точек плоской фигуры на прямую, проходящую через эти точки, равны, между собой.

Понятие МЦС и способы его нахождения

Мгновенным центром скоростей (МЦС) называется точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю



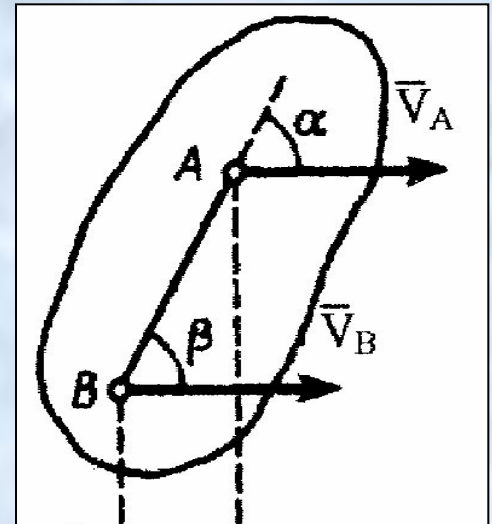
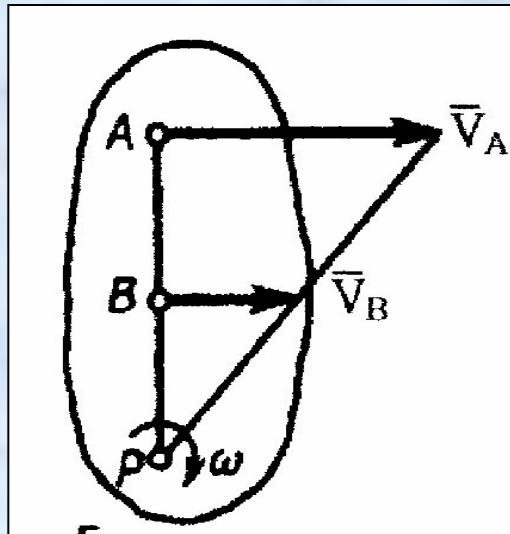
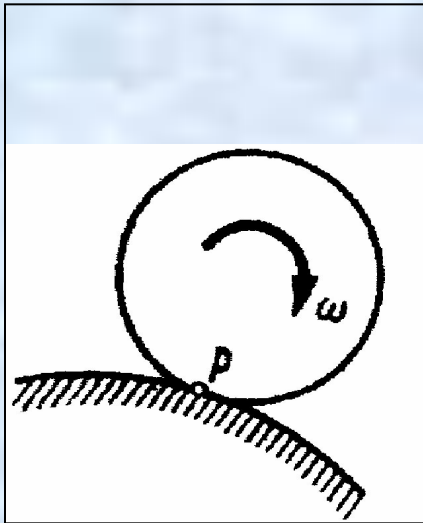
$$\vec{v}_A = \vec{v}_P + \vec{v}_{PA} = \vec{v}_{PA}$$

$$\frac{v_A}{PA} = \frac{v_B}{PB}$$

$$\omega = \frac{v_A}{PA} = \frac{v_B}{PB}$$

● ● ●
Понятие МЦС и способы
его нахождения

Частные случаи определения мгновенного центра скоростей





Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
МЕХАНИКА

КИНЕМАТИКА

Плоскопараллельное движение
твёрдого тела

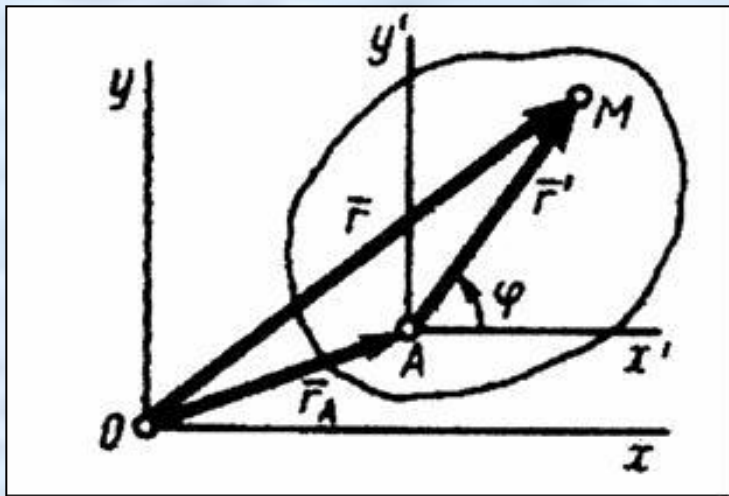
ЛЕКЦИЯ 13

План:

13.1. Определение ускорений точек плоской фигуры

13.2. Мгновенный центр ускорений

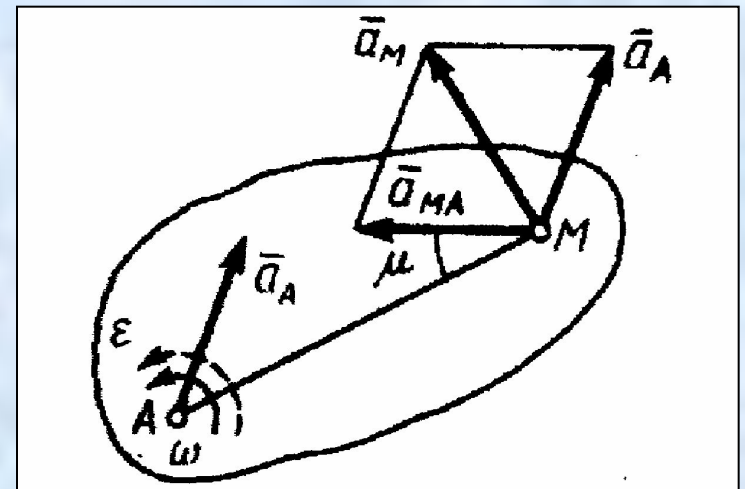
ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЙ ТОЧЕК ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ



$$\bar{a}_M = \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \frac{d^2 \bar{r}_A}{dt^2} + \frac{d^2 \bar{r}'}{dt^2}$$

$$\bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{a}_{MA}$$

$$\bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{a}_{MA}^\tau + \bar{a}_{MA}^n$$



$$a_{MA}^\tau = MA \cdot \varepsilon$$

$$a_{MA}^n = \omega^2 MA$$

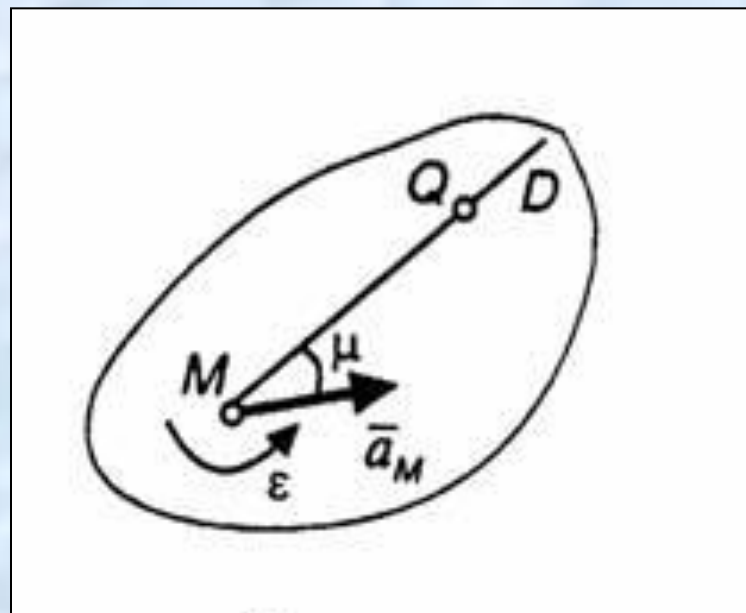
МГНОВЕННЫЙ ЦЕНТР УСКОРЕНИЙ

Точка, ускорение которой в данный момент времени равно нулю называется **мгновенным центром ускорений (МЦУ)**.

$$\bar{a}_M = \bar{a}_Q + \bar{a}_{MQ} = \bar{a}_{MQ}$$

$$a_M = MQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

$$\operatorname{tg}\mu = \varepsilon/\omega;$$



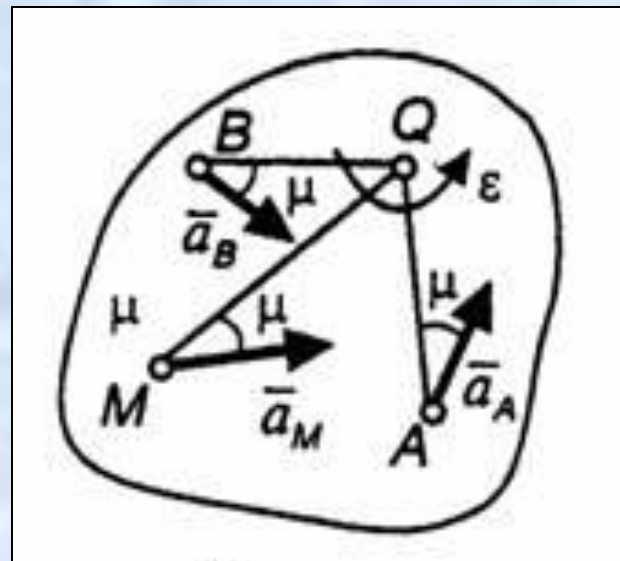
МГНОВЕННЫЙ ЦЕНТР УСКОРЕНИЙ

$$a_M = MQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

$$\operatorname{tg} \mu = \varepsilon/\omega;$$

Частные случаи :

- если $\varepsilon = 0$, $\omega \neq 0$, то угол $\mu = 0$ и ускорения всех точек будут направлены к МЦУ;
- если $\varepsilon \neq 0$, $\omega = 0$, то угол $\mu = 90^\circ$ и ускорения всех точек направлены перпендикулярно к отрезкам, соединяющим эти точки с МЦУ



МЕХАНИКА

Теоретическая механика

Модуль 1

Раздел 3 – ДИНАМИКА ТОЧКИ

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

ЛЕКЦИЯ 14

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

ЛЕКЦИЯ 15

ЛЕКЦИЯ 16

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ДИНАМИКА ТОЧКИ

Общие сведения

ЛЕКЦИЯ 14

План:

14.1. Основные законы механики

14.2. Дифференциальные уравнения движения материальной точки

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Динамика - это раздел механики, в котором изучается движение материальных точек, тел и механических систем под действием приложенных сил

Основные законы механики

Первый закон (закон инерции)

Второй закон (основной закон динамики)

$$m\bar{a} = \bar{F}$$

Третий закон (закон равенства действия и противодействия)

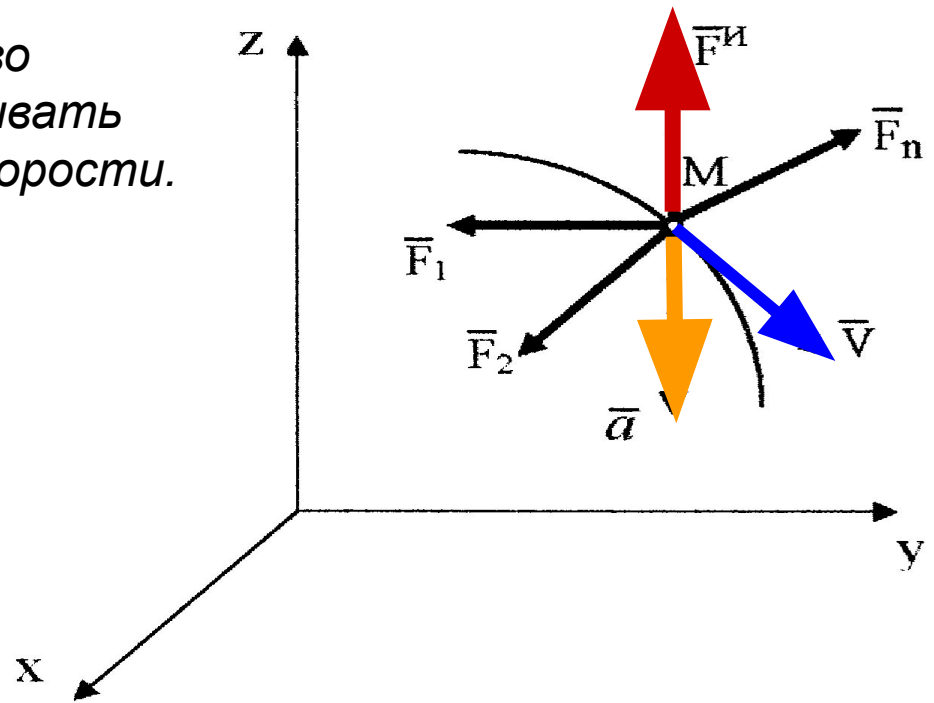
Четвертый закон (закон независимости действия сил)

$$\bar{a} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \dots + \bar{a}_n$$

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Инерция – это свойство материальной точки оказывать сопротивление изменению скорости.

$$-m\bar{a} = \bar{F}^u$$



Сила инерции материальной точки направлена противоположно ускорению точки и приложена к телу, сообщаемому точке это ускорение

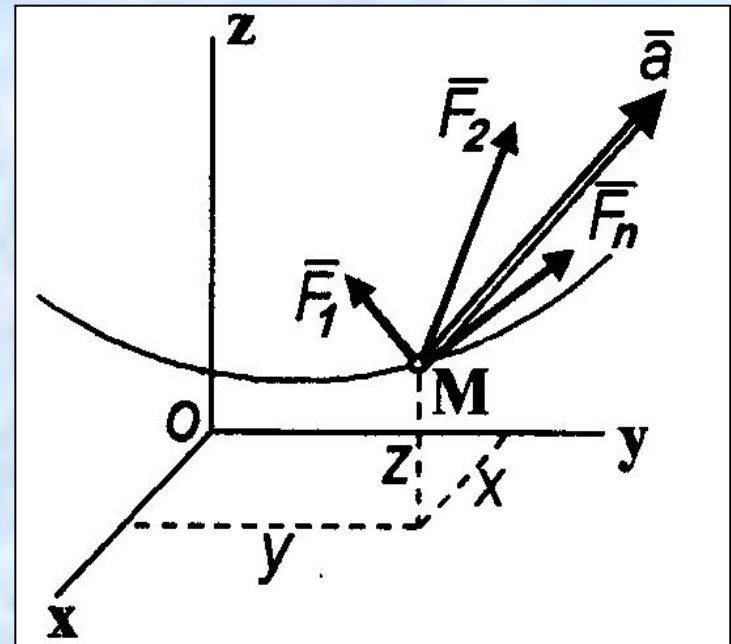
Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Дифференциальные уравнения движения точки
в проекциях на декартовы оси:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \sum F_{kx}$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = \sum F_{ky}$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = \sum F_{kz}$$



Закон движения точки:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = f_1(t); \\ y = f_2(t); \\ z = f_3(t) \end{array} \right.$$

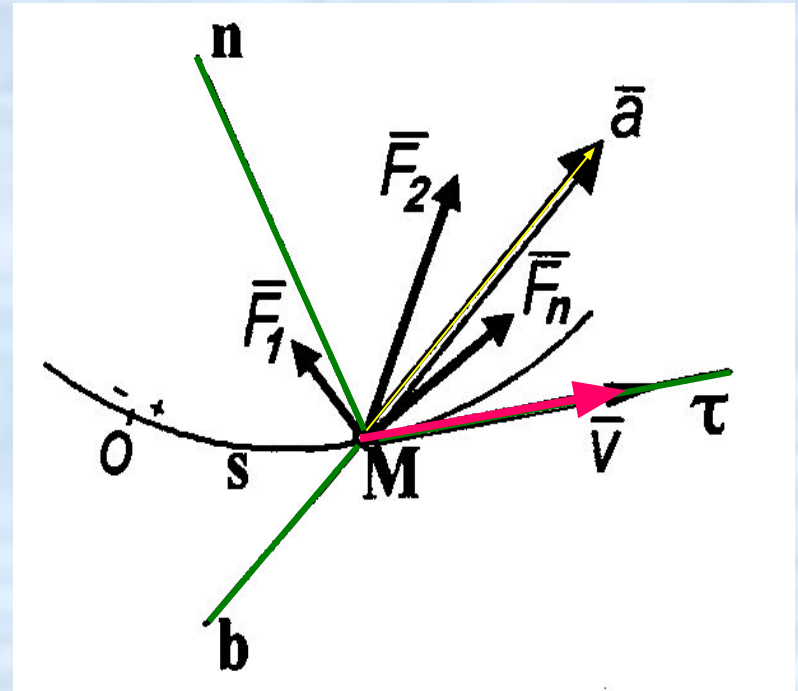
Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Дифференциальные уравнения в проекциях на оси естественного трехгранника

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

$$m \frac{dv}{dt} = \sum F_{k\tau}$$

$$m \frac{v^2}{\rho} = \sum F_{kn}$$



Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ДИНАМИКА ТОЧКИ

**Дифференциальные уравнения
движения материальной точки**

ЛЕКЦИЯ 15

План:

15.1. Две задачи динамики.

15.2. Решение задач

Дифференциальные уравнения движения материальной точки

$$m \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \sum \bar{F}_k$$

ДВЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ

Первая задача динамики: по известному закону движения материальной точки находят приложенные к ней силы.

Вторая (основная) задача динамики: при известных действующих на материальную точку силах, определяют закон движения точки

Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Решение задач динамики точки:

Первая задача динамики:

- *составить и решать дифференциальные уравнения движения материальной точки*

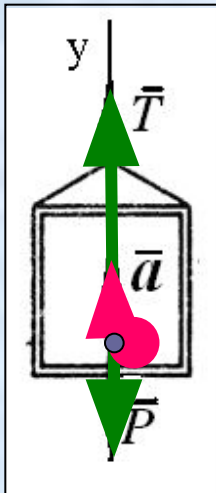
Вторая задача динамики:

- *выбрать систему координат и записать начальные условия;*
- *изобразить движущуюся точку в произвольном положении и все действующие на точку силы;*
- *составить дифференциальные уравнения движения точки;*
- *проинтегрировать полученные уравнения, определив постоянные интегрирования из начальных условий.*
- *найти искомые величины из полученных выражений.*

Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Лифт весом P начинает подъем по закону:

$$y = at^2.$$



Определить:
натяжение троса T

Решение. На лифт действуют сила тяжести \bar{P} и реакция троса \bar{T}

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = \sum F_{ky}$$

$$m a = P_y + T_y$$

$$(P/g) 2a = T - P,$$

$$T = P (1 + 2a/g).$$

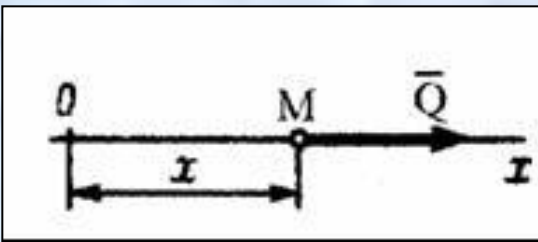
Если лифт опускается с таким же ускорением:

$$T = P (1 - 2a/g).$$

Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Задача 2.

Материальная точка с массой m движется под действием постоянной силы \bar{Q}



Найти:

закон движения точки при начальных условиях:

$$t=0, x=x_0, v_x=v_0.$$

Решение:

Учитывая, что $Q_x = Q$:

$$m \frac{dv_x}{dt} = Q$$

$$v_x = (Q/m) t + C_1.$$

$$\frac{dx}{dt} = (Q/m) t + C_1.$$

$$x = (Q/2m) t^2 + C_1 t + C_2$$

$$v_0 = C_1, x_0 = C_2$$

$$x = x_0 + v_0 t + (Q/2m) t^2.$$

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ДИНАМИКА ТОЧКИ

**Дифференциальные уравнения
движения материальной точки**

ЛЕКЦИЯ 16

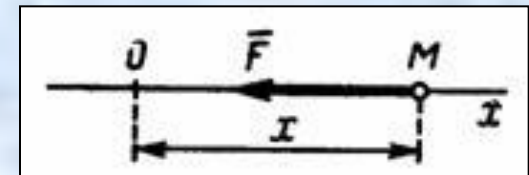
План:

- 16.1. Свободные прямолинейные колебания материальной точки
- 16.2. Влияние постоянной силы на свободные колебания точки

Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Свободные прямолинейные колебания материальной точки

Восстанавливающая сила F - сила, стремящаяся вернуть точку в положение равновесия (всегда направлена к положению равновесия и зависит от величины отклонения точки от положения равновесия x).



$$F_x = -cx$$

Сила сопротивления R , зависящая от скорости движения

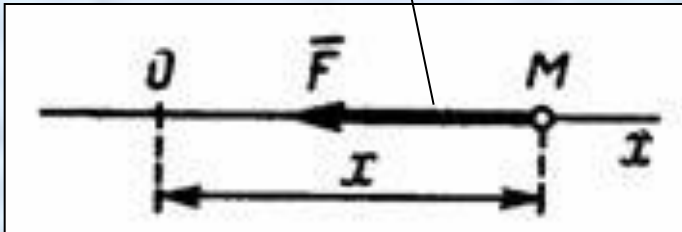
$$R_x = -\mu \dot{x}$$

Возмущающая сила, т.е. сила, являющаяся заданной функцией времени.

Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Свободные прямолинейные колебания материальной точки

Восстанавливающая сила



$$F_x = -cx$$

$$m\ddot{x} = F_x, \text{ или}$$

$$m\ddot{x} = -cx$$

если $c/m = k^2$, то

$$\ddot{x} + k^2 x = 0$$

дифференциальное уравнение свободных колебаний при отсутствии сопротивления.

Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Свободные прямолинейные колебания материальной точки

$$\ddot{x} + k^2 x = 0$$

Характеристическое уравнение:

$$x = e^{nt}$$

$$n^2 + k^2 = 0, n_{1,2} = \pm ik$$

общее
решение

$$x = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt,$$

Пусть

$$C_1 = A \cos \alpha,$$

$$C_2 = A \sin \alpha,$$

$$x = A (\sin kt \cos \alpha + \cos kt \sin \alpha)$$

или

закон гармонических колебаний точки:

$$x = A \sin (kt + \alpha).$$

Скорость точки: $v_x = Ak \cos (kt + \alpha).$

Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Свободные прямолинейные колебания материальной точки

$$x = A \sin (kt + \alpha)$$

A - амплитуда колебаний.

$(kt + \alpha) = \phi$ - фаза колебаний.

α - начальная фаза колебаний.

k - круговая частота колебаний

Период колебаний T -
промежуток времени, в течение
которого точка совершает одно
полное колебание

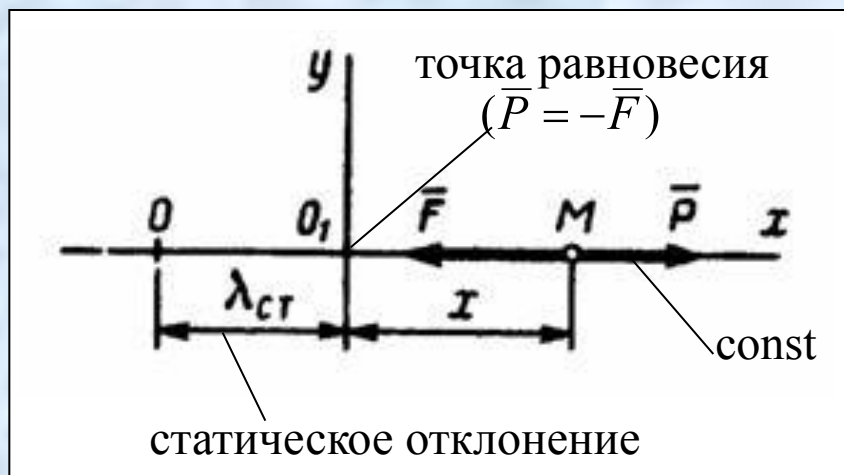
$$T = \frac{2\pi}{k}$$

Частота колебаний ν - число
колебаний, совершаемых за 1с

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{k}{2\pi}$$

Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Влияние постоянной силы на свободные колебания точки



$$P = \text{const}$$

$$F = cx$$

В точке равновесия при $x = \lambda_{ст}$

$$F = P = c\lambda_{ст}$$

$$F_x = -c(x + \lambda_{ст})$$

В результате

$$m\ddot{x} = -cx$$

или

$$\ddot{x} + k^2 x = 0$$

$$T = 2\pi\sqrt{m\lambda_{ст} / P}$$

МЕХАНИКА

Теоретическая механика

Модуль 1

Раздел 4 – ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ

ТЕОРЕМА О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС

ЛЕКЦИЯ 17

ЛЕКЦИЯ 18

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА
ДВИЖЕНИЯ

ЛЕКЦИЯ 19

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ
КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

ЛЕКЦИЯ 20

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ
ЭНЕРГИИ

ЛЕКЦИЯ 21

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ

ТЕОРЕМА О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС

ЛЕКЦИЯ 17

План:

- 17.1. Введение в динамику системы. Свойства внутренних сил.
- 17.2. Центр масс механической системы
- 17.3. Теорема о движении центра масс механической системы
- 17.4. Закон сохранения движения центра масс.
- 17.5. Примеры применения теоремы о движении центра масс.

ТЕОРЕМА О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС

Введение в динамику системы

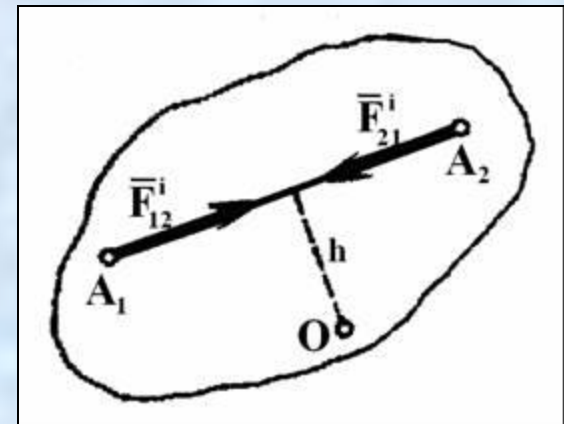
Механическая система - совокупность материальных точек или тел, находящихся в механическом взаимодействии

\bar{F}_k^e - **Внешние силы**, действующие на точки системы со стороны точек или тел, не входящих в состав данной системы

\bar{F}_k^i - **Внутренние силы**, с которыми точки или тела данной системы действуют друг на друга

Свойства внутренних сил:

$$\sum \bar{F}_k^i = 0 \quad \sum \bar{m}_0(\bar{F}_k^i) = 0$$



Центр масс механической системы

Масса системы: $M = \sum m_k$

Центром масс (центром инерции) механической системы называется геометрическая точка C , координаты которой :

$$x_C = \frac{\sum m_k x_k}{M} \quad y_C = \frac{\sum m_k y_k}{M} \quad z_C = \frac{\sum m_k z_k}{M}$$

Радиус-вектор центра масс:

$$\bar{r}_C = \frac{\sum m_k \bar{r}_k}{M}$$

ТЕОРЕМА О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС

Для каждой точки системы

$$m_k \bar{a}_k = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i$$

$$\sum m_k \bar{a}_k = \sum \bar{F}_k^e + \sum \bar{F}_k^i$$

$$\sum m_k \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2} = M \frac{d^2 \bar{r}_C}{dt^2}$$

$$\left[\begin{array}{l} \bar{r}_C = \frac{\sum m_k \bar{r}_k}{M} \\ \sum m_k \bar{r}_k = M \bar{r}_C \end{array} \right]$$

$$\sum m_k \bar{a}_k = M \bar{a}_C$$

\bar{a}_C — ускорение центра
масс системы

$$M \bar{a}_C = \sum \bar{F}_k^e$$

$$\begin{aligned} M \frac{d^2 x_C}{dt^2} &= \sum F_{kx}^e \\ M \frac{d^2 y_C}{dt^2} &= \sum F_{ky}^e \\ M \frac{d^2 z_C}{dt^2} &= \sum F_{kz}^e \end{aligned}$$

Дифференциальные уравнения
движения центра масс в проекциях
на оси координат


 ТЕОРЕМА О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС

$$M\bar{a}_C = \sum \bar{F}_k^e$$

Закон сохранения движения центра масс

1. Пусть сумма внешних сил, действующих на систему, равна нулю

$$\sum \bar{F}_k^e = 0 \longrightarrow \bar{a}_C = 0 \longrightarrow \bar{v}_C = \text{const}$$

2. Пусть сумма внешних сил системы, не равна нулю, но сумма их проекций на какую-нибудь ось равна нулю

$$\sum \bar{F}_k^e \neq 0$$

$$\sum F_{kx}^e = 0 \longrightarrow M \ddot{x}_C = 0 \longrightarrow \ddot{x}_C = 0 \longrightarrow \dot{x}_C = v_{Cx} = \text{const}$$

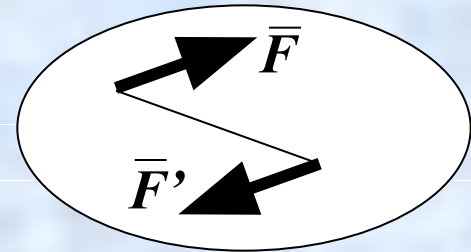
ТЕОРЕМА О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС

Примеры применения теоремы о движении центра масс

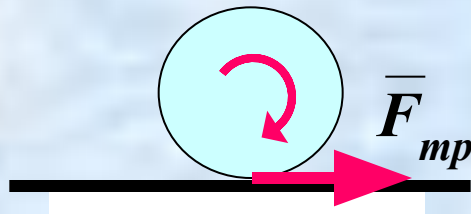
Действие пары сил на тело

$$\sum \bar{F}_k^e = \bar{F} + \bar{F}' = 0$$

$$\bar{a}_C = 0 \quad \bar{v}_C = \text{const} = \bar{v}_{0C} = 0$$



Движение по горизонтальной плоскости



Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

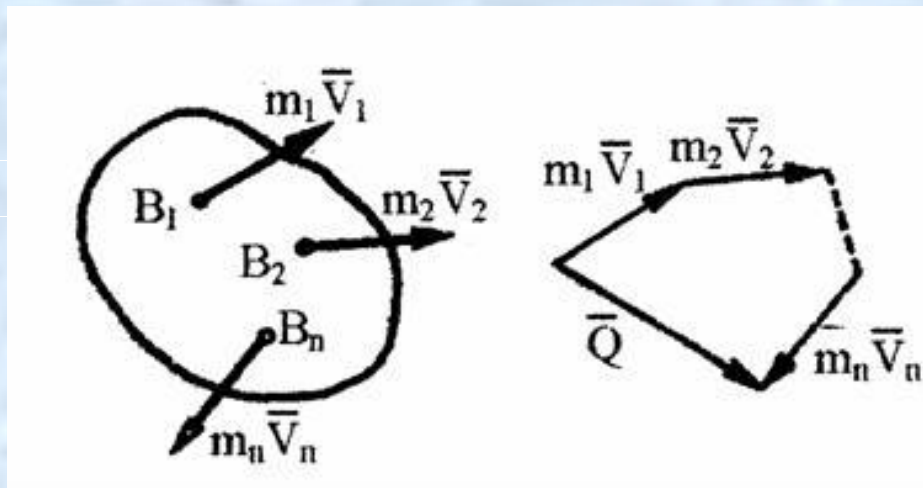
ЛЕКЦИЯ 18

План:

- 18.1. Количество движения.
- 18.2. Импульс силы.
- 18.3. Теорема об изменении количества движения
- 18.4. Закон сохранения количества движения.

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

Количество движения



$m\bar{v}$ - Количество движения материальной точки

Количество движения механической системы

$$\bar{Q} = \sum m_k \bar{v}_k.$$

Количество движения твердого тела

$$\bar{Q} = M\bar{v}_C$$

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

Импульс силы

Элементарный импульс силы: $d\bar{S} = \bar{F} dt$

Импульс силы за конечный промежуток времени t_1 : $\bar{S} = \int_0^{t_1} \bar{F} dt.$

Проекции импульса на координатные оси

$$S_y = \int_0^{t_1} F_y dt. \quad S_x = \int_0^{t_1} F_x dt. \quad S_z = \int_0^{t_1} F_z dt.$$

Единицей измерения импульса силы в системе СИ является 1
 $\text{кг} \cdot \text{м/с} = 1 \text{ Н/с}.$

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

Дифференциальное уравнение движения точки $\frac{d(m\bar{v})}{dt} = \sum \bar{F}_k$.

$$m\bar{v} - m\bar{v}_0 = \sum \int_0^{t_1} \bar{F}_k dt.$$

$$m\bar{v} - m\bar{v}_0 = \sum \bar{S}_k$$

Теорема об изменении количества движения материальной точки

$$mv_{1x} - mv_{0x} = \sum S_{kx},$$

$$mv_{1y} - mv_{0y} = \sum S_{ky},$$

$$mv_{1z} - mv_{0z} = \sum S_{kz}.$$

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

Для всех точек механической системы

$$\sum m_k \bar{a}_k = \frac{d}{dt} \sum m_k \bar{v}_k = \frac{d\bar{Q}}{dt}.$$

$$\sum m_k \bar{a}_k = \sum \bar{F}_k^e + \sum \bar{F}_k^i = 0$$

Теорема об изменении количества движения системы:

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum \bar{F}_k^e.$$

$$\bar{Q}_1 - \bar{Q}_0 = \sum \int_0^{t_1} \bar{F}_k^e dt$$

$$\bar{Q}_1 - \bar{Q}_0 = \sum \bar{S}_k^e$$

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum F_{kx}^e, \quad \frac{dQ_y}{dt} = \sum F_{ky}^e, \quad \frac{dQ_z}{dt} = \sum F_{kz}^e.$$

$$Q_{1x} - Q_{0x} = \sum S_{kx}^e$$

$$Q_{1y} - Q_{0y} = \sum S_{ky}^e$$

$$Q_{1z} - Q_{0z} = \sum S_{kz}^e$$



ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

Закон сохранения количества движения

$$1. \quad \sum \bar{F}_k^e = 0.$$

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum \bar{F}_k^e = 0$$

$$\bar{Q} = \text{const}$$

$$2. \quad \sum F_{kx}^e = 0.$$

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum F_{kx}^e = 0$$

$$Q_x = \text{const}$$

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

ЛЕКЦИЯ 19

План:

- 19.1. Осевые моменты инерции тела.
- 19.2. Момент количества движения материальной точки.
- 19.3. Теорема об изменении момента количества движения точки

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

Осевые моменты инерции тела

$$I_z = \sum m_k h_k^2$$

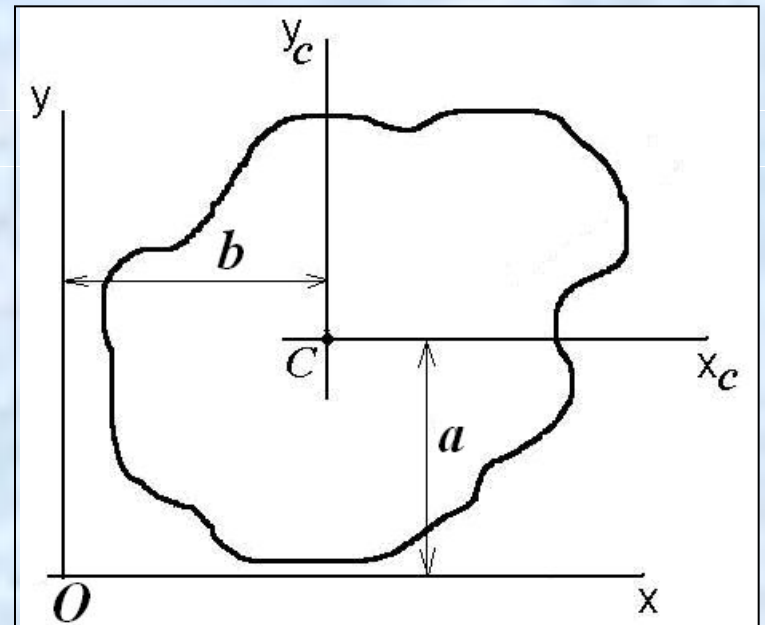
$$I_z = M \rho_z^2$$

ρ - радиус инерции тела

Теорема Гюйгенса

$$I_{Ox} = I_{Cx} + M a^2;$$

$$I_{Oy} = I_{Cy} + M b^2.$$



ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

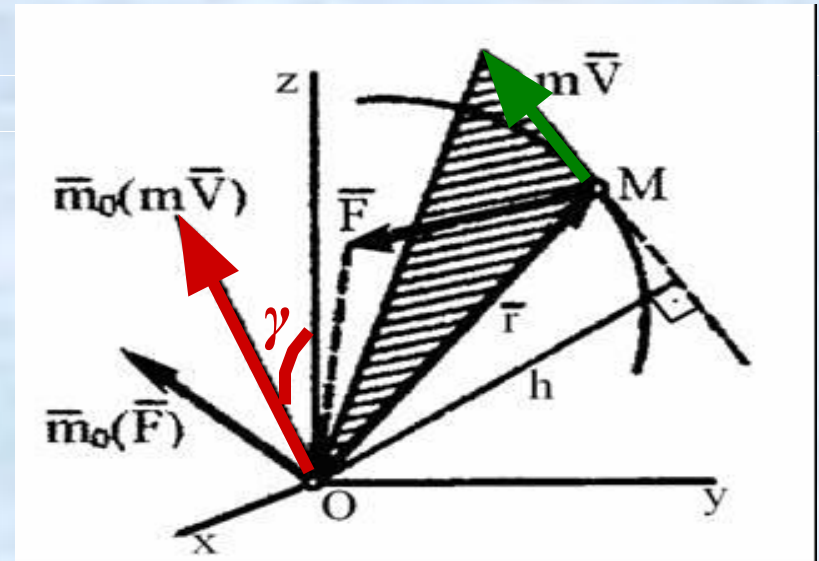
Момент количества движения материальной точки

$$\bar{m}_0(m\bar{v}) = \bar{r} \times m\bar{v}$$

$$|\bar{m}_0(m\bar{v})| = mvh$$

$$m_z(m\bar{v}) = [\bar{m}_0(m\bar{v})]_z =$$

$$= |\bar{m}_0(m\bar{v})| \cos \gamma$$



ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

Теорема об изменении момента количества движения точки

$$\frac{d}{dt}(\bar{r} \times m\bar{v}) = \left(\frac{d\bar{r}}{dt} \times m\bar{v} \right) + \left(\bar{r} \times m \frac{d\bar{v}}{dt} \right) = (\bar{v} \times m\bar{v}) + (\bar{r} \times m\bar{a}).$$

$$\bar{v} \times m\bar{v} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(\bar{r} \times m\bar{v}) = \bar{r} \times \bar{F} \quad \text{или}$$

$$\frac{d}{dt}[\bar{m}_0(m\bar{v})] = \bar{m}_0(\bar{F})$$

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ
КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

ЛЕКЦИЯ 20

План:

- 20.1. Теорема об изменении кинетического момента.
- 20.2. Дифференциальное уравнение вращения твёрдого тела

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

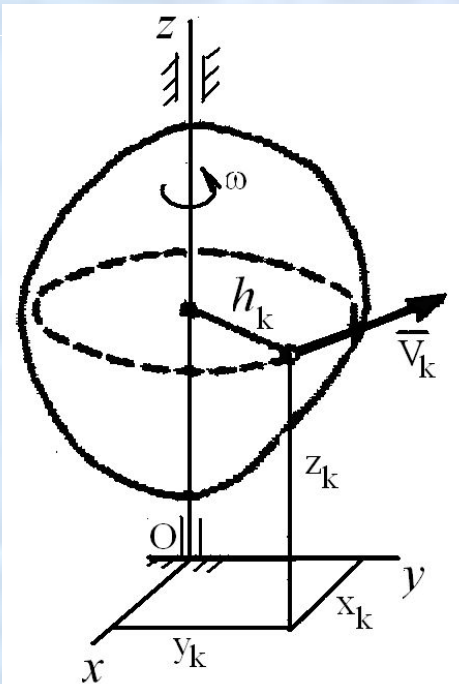
Кинетический момент системы

$$\bar{K}_0 = \sum \bar{m}_0 (m_k \bar{v}_k)$$

$$K_x = \sum m_x (m_k \bar{v}_k)$$

$$K_y = \sum m_y (m_k \bar{v}_k)$$

$$K_z = \sum m_z (m_k \bar{v}_k)$$



Кинетический момент вращающегося тела

$$m_z (m_k \bar{v}_k) = m_k v_k h_k \quad K_z = \sum m_z (m_k \bar{v}_k)$$

$$K_z = \sum m_k v_k h_k = \sum m_k \omega h_k^2$$

$$K_z = I_z \omega$$

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

Если рассмотреть одну точку системы:

$$\frac{d}{dt} [\bar{m}_0 (m_k \bar{v}_k)] = \bar{m}_0 (\bar{F}_k^e) + \bar{m}_0 (\bar{F}_k^i),$$

для всех точек системы:

$$\frac{d}{dt} [\sum \bar{m}_0 (m_k \bar{v}_k)] = \sum \bar{m}_0 (\bar{F}_k^e) + \underbrace{\sum m_0 (\bar{F}_k^i)}_{= 0}.$$

$$\frac{d\bar{K}_0}{dt} = \sum \bar{m}_0 (\bar{F}_k^e)$$

$$\begin{aligned} \frac{dK_x}{dt} &= \sum m_x (\bar{F}_k^e) \\ \frac{dK_y}{dt} &= \sum m_y (\bar{F}_k^e) \\ \frac{dK_z}{dt} &= \sum m_z (\bar{F}_k^e) \end{aligned}$$

*Теорема об изменении кинетического
момента механической системы*

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

следствия из теоремы:

$$\frac{d\bar{K}_0}{dt} = \sum \bar{m}_0 (\bar{F}_k^e)$$

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum m_z (\bar{F}_k^e)$$

1. Если сумма моментов всех внешних сил, действующих на систему, относительно центра O равна нулю

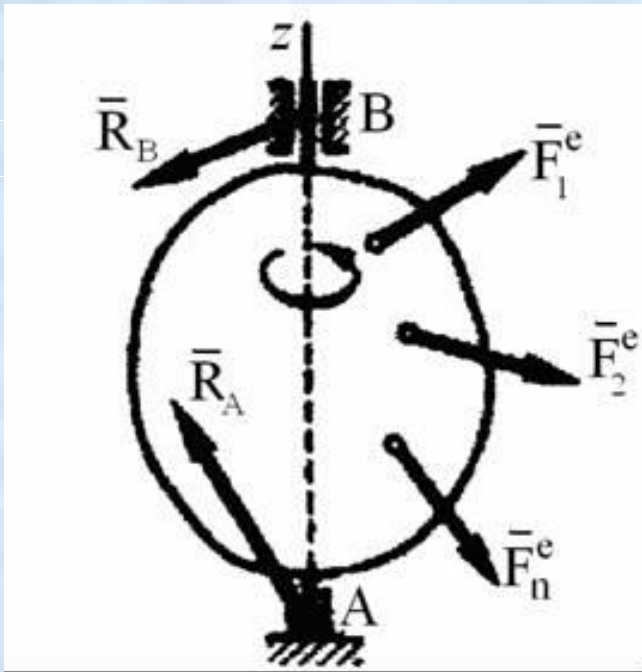
$$\sum \bar{m}_0 (\bar{F}_k^e) = 0 \quad \text{то} \quad \bar{K}_0 = \text{const}$$

2. Если сумма моментов всех внешних сил, действующих на систему, относительно некоторой неподвижной оси равна нулю

$$\sum m_z (\bar{F}_k^e) = 0 \quad \text{то} \quad K_z = \text{const}$$

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

Дифференциальное уравнение вращения
тела вокруг неподвижной оси



$$\frac{dK_z}{dt} = \sum m_z (\bar{F}_k^e) + \sum m_z (\bar{R}_k) = M_z$$

$$K_z = I_z \omega$$

$$\frac{dK_z}{dt} = \frac{d(I_z \omega)}{dt} = I_z \frac{d\omega}{dt}$$

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = I_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_z$$

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ
КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

ЛЕКЦИЯ 21

План:

21.1. Работа силы и мощность

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Работа силы. Мощность

Элементарная работа силы

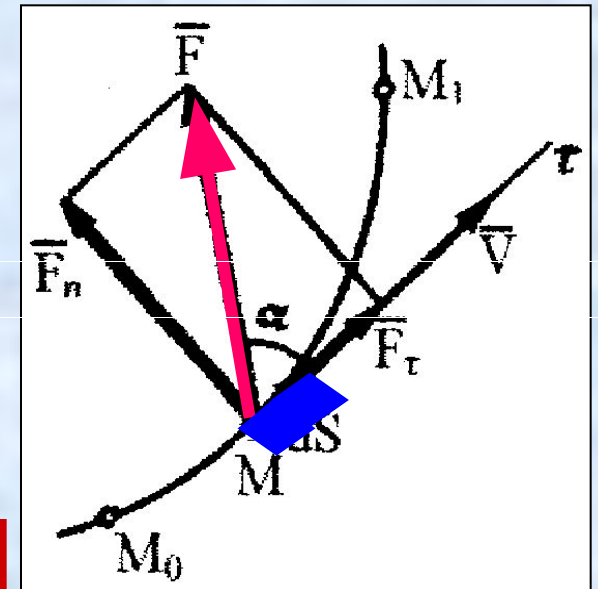
$$dA = F_{\tau} ds, \text{ где } F_{\tau} = F \cos \alpha,$$

$$dA = F ds \cos \alpha.$$

Работа силы на конечном перемещении

$$1. (\bar{F} \neq \text{const}) \quad A_{(M_0 M_1)} = \int_{(M_0)}^{(M_1)} F_{\tau} ds$$

$$2. (\bar{F} = \text{const}) \quad A_{(M_0 M_1)} = F_{\tau} s_1 = F s_1 \cos \alpha$$

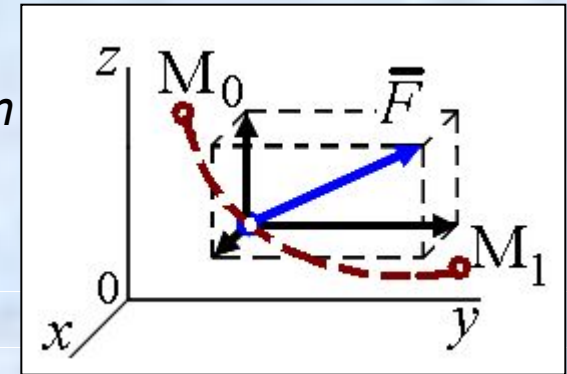


ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Работа силы. Мощность

Если вектор силы спроецировать на оси координат

$$A_{(M_0 M_1)} = \int_{(M_0)}^{(M_1)} (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$



Единицей измерения работы в системе СИ является - 1 джоуль
(1 Дж = 1Н·м = 1 кг·м²/с²).

Мощность - это величина, определяющая работу, совершаемую силой в единицу времени.

$$N = dA/dt = F\tau ds/dt = F\tau v.$$

Единицей измерения мощности в системе СИ является ватт
(1 Вт = 1Дж/с). В технике - 1 л.с. = 736 Вт.

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

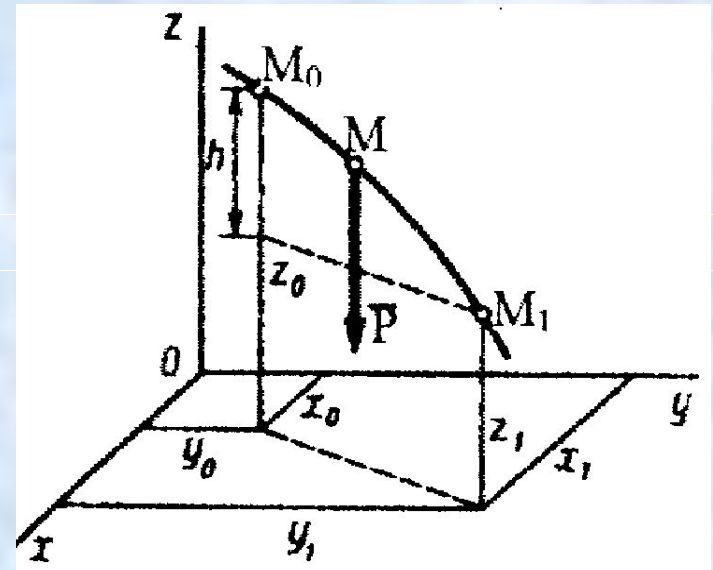
Примеры вычисления работы

Работа силы тяжести

$$A_{(M_0M_1)} = \int_{z_0}^{z_1} (-P) dz = P(z_0 - z_1)$$

$$z_0 - z_1 = h$$

$$A_{(M_0M_1)} = \pm P \cdot h$$



Работа силы тяжести не зависит от формы траектории точки её приложения. Силы, обладающие таким свойством, называются **потенциальными силами**.

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

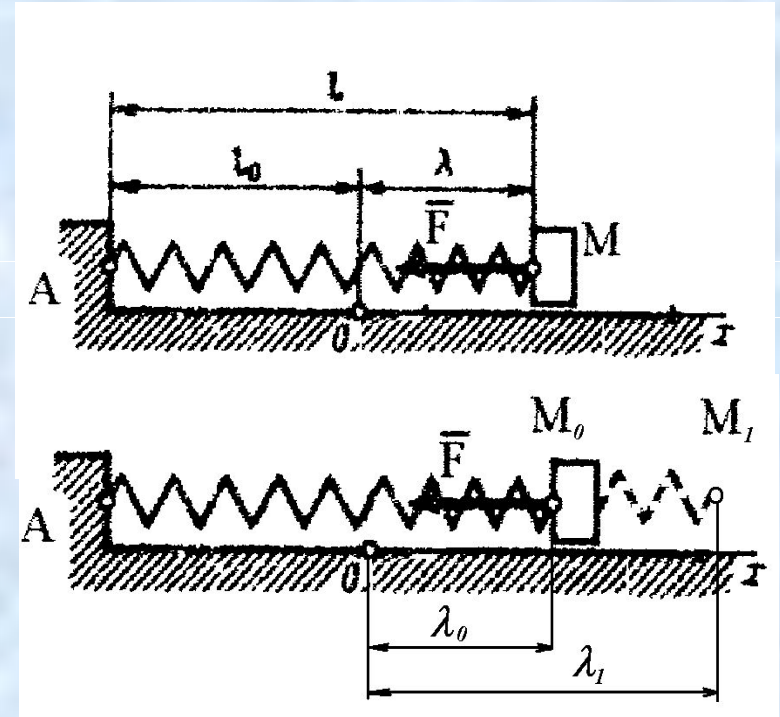
Работа силы. Мощность

Работа силы упругости

$$F = c\lambda = c|x| \text{ и } F_x = -cx.$$

$$A_{(M_0M_1)} = \int_{x_0}^{x_1} (-cx) dx = \frac{c}{2} (x_0^2 - x_1^2).$$

$$A_{(M_0M_1)} = \frac{c}{2} (\lambda_0^2 - \lambda_1^2),$$



ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Работа силы. Мощность

Работа силы, приложенной к вращающемуся телу

$$dA = F_{\tau} ds \quad \text{где} \quad ds = h d\varphi$$

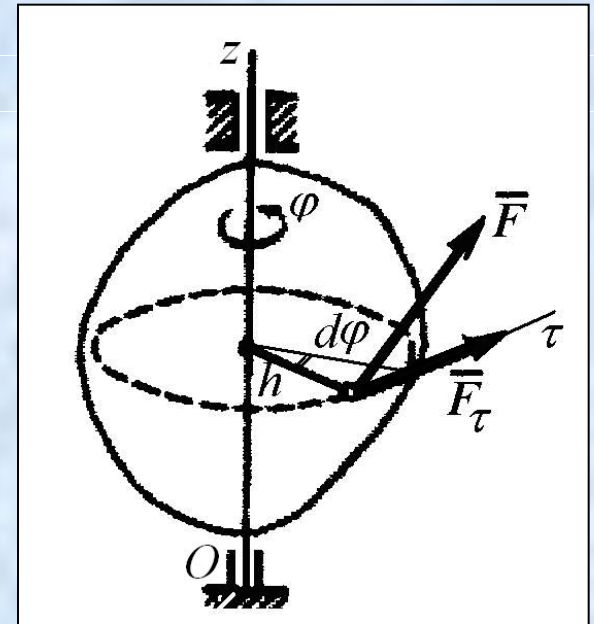
$$dA = F_{\tau} h d\varphi.$$

$$F_{\tau} h = m_z(\bar{F}) = M_z$$

$$dA = M_z d\varphi$$

$$A = \int_0^{\varphi_1} M_z d\varphi \quad \text{или}$$

$$A = \pm M_z \cdot \varphi.$$



Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ
КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

ЛЕКЦИЯ 22

План:

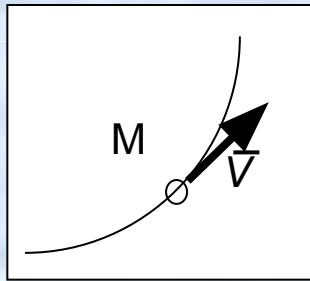
22.1. Кинетическая энергия.

22.2. Теорема об изменении кинетической энергии

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Кинетическая энергия

для материальной точки



$$m \frac{v^2}{2}$$

*для механической системы
из n материальных точек*

$$T = \sum_{k=1}^n m_k \frac{v_k^2}{2}$$

Кинетическая энергия - скалярная величина

Единица измерения кинетической энергии в системе СИ - 1 Дж.

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Кинетическая энергия

для твердого тела

Поступательное движение

$$M \frac{v_C^2}{2}$$

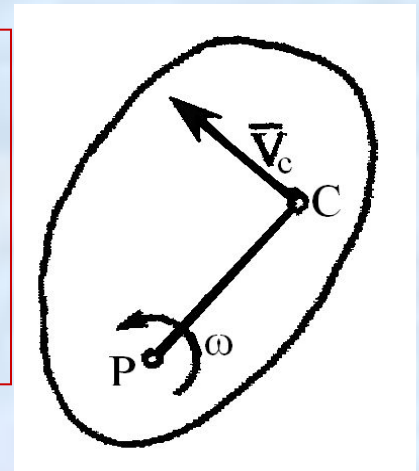
Вращательное движение

$$T = I_z \frac{\omega^2}{2}$$

Плоскопараллельное движение

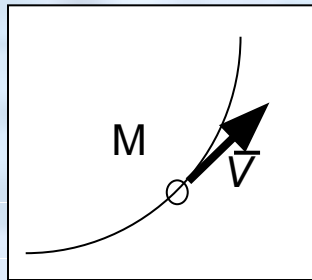
$$T_{\text{пл}} = I_P \frac{\omega^2}{2}$$

$$T_{\text{пл}} = M \frac{v^2}{2} = I_c \frac{\omega^2}{2}$$



ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Рассмотрим материальную точку с массой m



$$ma_{\tau} = \sum F_{k\tau}$$

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{dv}{ds}$$

$$mv \frac{dv}{ds} = \sum F_{k\tau}$$

$$mvdv = \sum dA_k$$

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \sum dA_k$$

*теорема об изменении
кинетической энергии точки
в дифференциальной форме*

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A_{(M_0M_1)}$$

*теорема об изменении
кинетической энергии точки
в конечном виде*

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Рассмотрим материальную точку механической системы с массой m_k

$$d\left(\frac{m_k v_k^2}{2}\right) = \sum dA_k^e + \sum dA_k^i$$

Для всей механической системы

$$d\sum\left(\frac{m_k v_k^2}{2}\right) = \sum dA_k^e + \sum dA_k^i$$

$$dT = \sum dA_k^e + \sum dA_k^i$$

**теорема об изменении
кинетической энергии системы
в дифференциальной форме**

$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i$$

**теорема об изменении
кинетической энергии системы
в интегральной форме**

МЕХАНИКА

Теоретическая механика

Модуль 1

Раздел 5 – АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА

ЛЕКЦИЯ 23

ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

ЛЕКЦИЯ 24

ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ

ЛЕКЦИЯ 25

ЛЕКЦИЯ 18

УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА

ЛЕКЦИЯ 26

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА

ЛЕКЦИЯ 23

План:

- 23.1. Сила инерции.
- 23.2. Принцип Даламбера для материальной точки и механической системы.
- 23.3. Главный вектор и главный момент сил инерции
- 23.4. Динамические реакции.

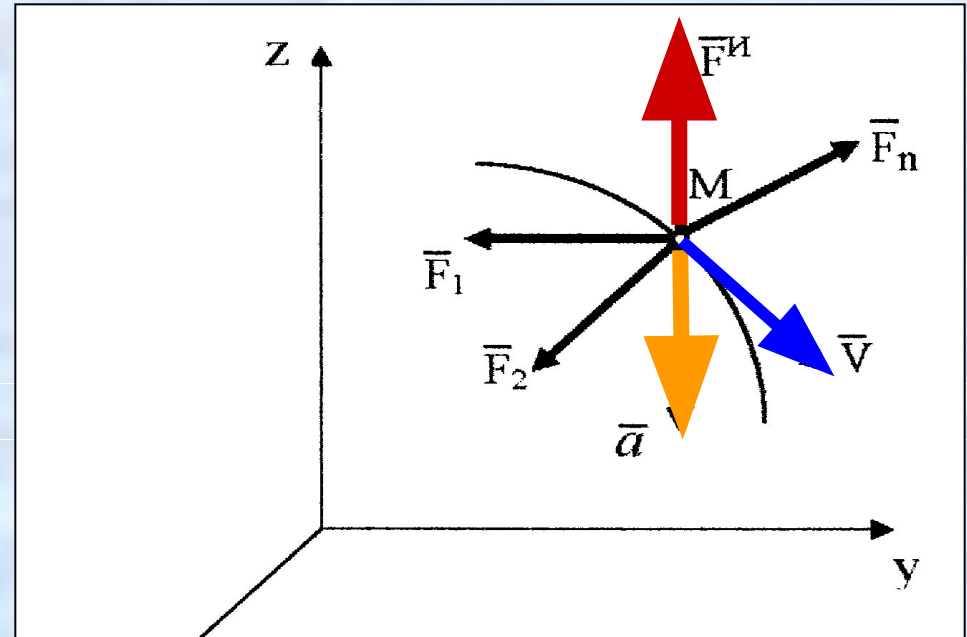
ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА

Рассмотрим движение материальной точки M

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_k = \bar{F}^a + \bar{R}$$

$$\bar{F}^a + \bar{R} - m\bar{a} = 0.$$

$$-m\bar{a} = \bar{F}^u$$



Сила инерции материальной точки направлена противоположно ее ускорению и **приложена к телу**, сообщаемому точке это ускорение

$$\bar{F}^a + \bar{R} + \bar{F}^u = 0$$

принцип Даламбера для материальной точки.



ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА

Рассмотрим материальную точку механической системы:

$$\overline{F}_k^a + \overline{R}_k + \overline{F}_k^u = 0$$

для всех точек полученная система сил будет произвольной пространственной и уравновешенной:

$$\left. \begin{aligned} \sum (\overline{F}_k^e + \overline{F}_k^i + \overline{F}_k^u) &= 0 \\ \sum [\overline{m}_0(\overline{F}_k^e) + \overline{m}_0(\overline{F}_k^i) + \overline{m}_0(\overline{F}_k^u)] &= 0 \end{aligned} \right\}$$

**Принцип Даламбера
для системы**

$$\left. \begin{aligned} \sum \overline{F}_k + \overline{R}^u &= 0 \\ \sum \overline{m}_0(\overline{F}_k) + \overline{M}_0^u &= 0 \end{aligned} \right\}$$

**Принцип Даламбера
для твердого тела**



ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА

Главный вектор и главный момент сил инерции механической системы

Главный вектор сил инерции $\bar{R}^u = \sum \bar{F}_k^u$

$$\bar{R}^u = -m\bar{a}_C \quad \bar{R}_\tau^u = -m\bar{a}_{C\tau} \quad \bar{R}_n^u = -m\bar{a}_{Cn}$$

Главный момент сил инерции $\bar{M}_0^u = \sum \bar{m}_0(\bar{F}_k^u)$

$$\bar{M}_0^u = \frac{d\bar{K}_0}{dt} \quad M_z^u = \frac{dK_z}{dt}$$

ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА

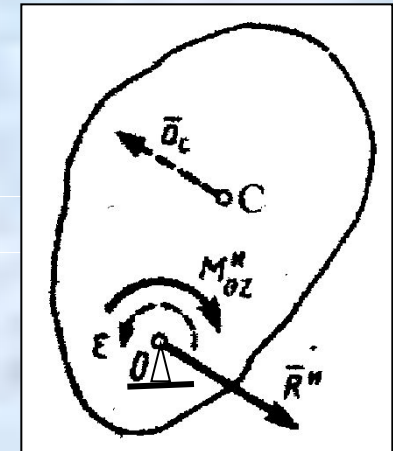
Частные случаи приведения сил инерции твердого тела

1. Поступательное движение

$$\bar{R}^u = -m\bar{a}_C$$

2. Вращательное движение (общий случай)

$$\bar{R}^u = -m\bar{a}_C \quad M_{Oz}^u = -J_{Oz} \cdot \frac{d\omega}{dt} = -J_{Oz} \cdot \varepsilon$$



3. Вращение вокруг оси, проходящей через центр масс тела

$$M_{Cz}^u = -J_{Cz} \cdot \varepsilon$$

4. Плоскопараллельное движение

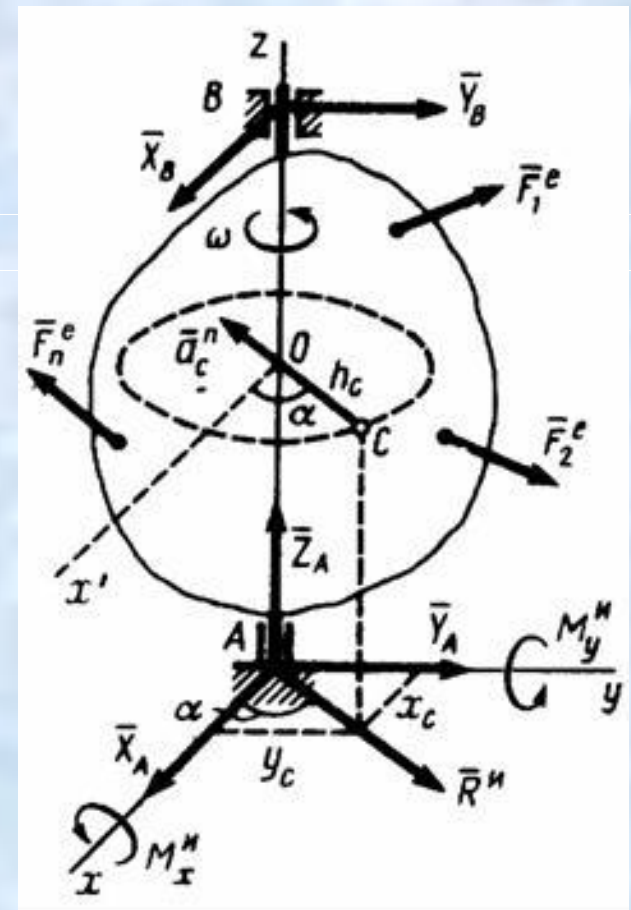
$$\bar{R}^u = -m\bar{a}_C \quad M_{Cz}^u = -J_{Cz} \cdot \varepsilon$$

ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА

Динамические реакции вращающегося тела

$$\left. \begin{aligned} X_A + X_B + R_x^e + R_x^u &= 0; & -Y_B b + M_x^e + M_x^u &= 0; \\ Y_A + Y_B + R_y^e + R_y^u &= 0; & X_B b + M_y^e + M_y^u &= 0; \\ Z_A + R_z^e + R_z^u &= 0; & M_z^e + M_z^u &= 0. \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} X_A + X_B &= -R_x^e - m x_C \omega^2; \\ Y_A + Y_B &= -R_y^e - m y_C \omega^2; \\ Z_A &= -R_z^e; \\ X_B b &= -M_y^e - J_{xz} \omega^2; \\ Y_B b &= M_x^e - J_{yz} \omega^2. \end{aligned} \right\}$$



Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
МЕХАНИКА

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

ЛЕКЦИЯ 24

План:

- 24.1. Классификация связей.
- 24.2. Возможные перемещения системы. Идеальные связи.
- 24.3. Принцип возможных перемещений

ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Классификация связей

Связи - это любого вида ограничения, которые налагаются на положения и скорости точек механической системы

- Стационарные
- Нестационарные

- Геометрические
- Кинематические
(дифференциальные)

- Интегрируемые
- Неинтегрируемые

- Голономные
- Неголономные

- Удерживающие
- Неудерживающие

ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Возможные перемещения системы

Возможное перемещение механической системы - это совокупность воображаемых элементарных перемещений точек системы из занимаемого в данный момент положения, которые допускаются всеми наложенными на систему связями

действительное перемещение - $d\vec{r}$

дифференциал $\vec{r} = \vec{r}(t)$

возможное перемещение - $\delta\vec{r}$ — $\left\{ \begin{array}{l} \delta x, \delta y, \delta z - \text{проекции } \delta\vec{r} \\ \text{на координатные оси} \\ \delta s = |\delta\vec{r}| \end{array} \right.$

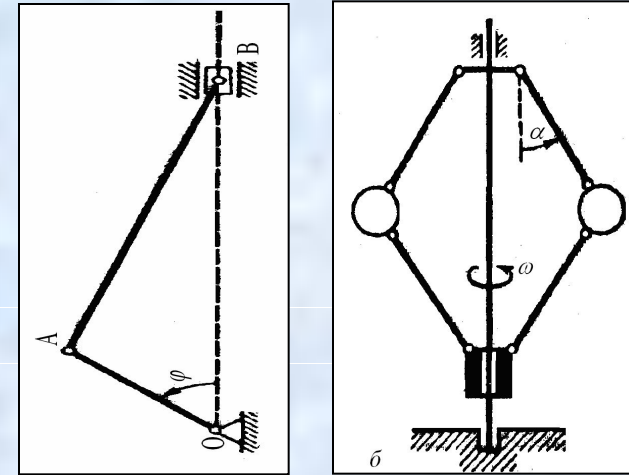
вариация $\vec{r} = \vec{r}(t)$

ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Число степеней свободы системы - это число независимых, между собой возможных перемещений механической системы

Возможная работа - элементарная работа, которую действующая на материальную точку сила могла бы совершить на перемещении, совпадающем с возможным перемещением этой точки:

$$\delta A = \bar{F} \cdot \delta \bar{r}$$



Идеальная связь – это связь, для которой сумма элементарных работ ее реакций на любом возможном перемещении системы равна нулю:

$$\sum \delta A_k^R = \sum \bar{R}_k \cdot \delta \bar{r}_k = 0$$

ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

(общее условие равновесия механической системы)

Для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех активных сил на любом возможном перемещении системы была равна нулю:

$$\sum \delta A_k^a = 0$$

$$\sum \bar{F}_k^a \cdot \delta \bar{r}_k = \sum \bar{F}_k^a \cdot \delta s_k \cos \alpha_k = 0$$

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
МЕХАНИКА

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ

ЛЕКЦИЯ 25

План:

- 25.1. Обобщённые координаты и обобщённые скорости.
- 25.2. Обобщённые силы.
- 25.3. Общее уравнение динамики

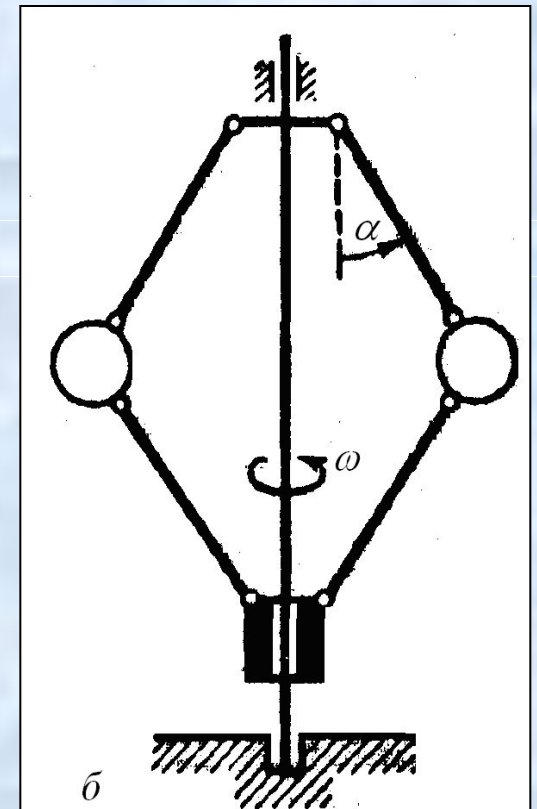
ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ

Обобщенные координаты механической системы - независимые между собой параметры любой размерности, однозначно определяющие положение системы, число которых равно числу степеней свободы:

$$q_1, q_2, \dots, q_s$$

Положение любой точки механической системы:

$$\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_s,)$$



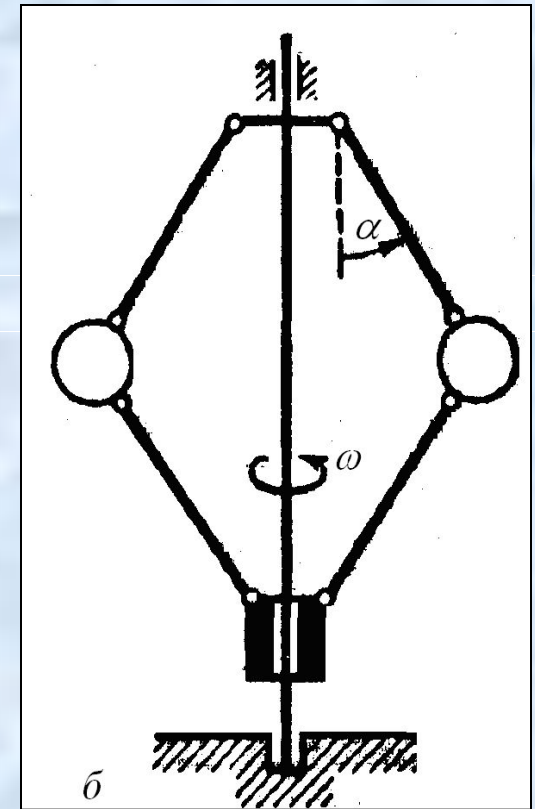
ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ

Кинематические уравнения движения системы в обобщенных координатах

$$\begin{aligned} q_1 &= f_1(t), \\ q_2 &= f_2(t), \\ &\dots\dots\dots \\ q_s &= f_s(t) \end{aligned}$$

Обобщенные скорости - производные от обобщенных координат по времени :

$$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s$$



ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ

Обобщённые силы

Пусть механическая система состоит из n материальных точек, на которые действуют силы: $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$

Сумма элементарных работ всех сил на возможном перемещении системы δq :

$$\sum \delta A_k = \bar{F}_1 \delta \bar{r}_1 + \bar{F}_2 \delta \bar{r}_2 + \bar{F}_n \delta \bar{r}_n$$

$$\delta \bar{r}_k \rightarrow \delta q$$

$$\sum \delta A_1 = Q_1 \delta q_1$$

$$Q_1 = \frac{\sum \delta A_1}{\delta q_1}$$

- **обобщенная сила**, соответствующая обобщенной координате q

ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ

Если ко всем точкам системы кроме активных сил и реакций связей прибавить силы инерции, то по **принципу Даламбера** полученная система сил будет уравновешенной

Тогда, согласно **принципу возможных перемещений**:

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^u + \sum \delta A_k^R = 0$$

$\Rightarrow 0$ для идеальных связей

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^u = 0$$

общее уравнение динамики
(**принцип Даламбера–Лагранжа**)

ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ

Общее уравнение динамики в обобщенных координатах:

$$\Sigma(Q_j + Q_j^u) \delta q_j = 0$$

обобщенная
активная сила

обобщенная сила инерции,
соответствующая
обобщенной координате q_j

Т.к. величины δq_j независимы, то:

$$\left[\begin{array}{l} Q_1 + Q_1^u = 0 \\ Q_2 + Q_2^u = 0 \\ \dots\dots\dots, \\ Q_S + Q_S^u = 0 \end{array} \right.$$

26.1

МЕХАНИКА

Модуль 1

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
МЕХАНИКА

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА

ЛЕКЦИЯ 26

План:

26.1. Уравнения Лагранжа

УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА

Лагранж получил формулу, вычисляющую обобщенные силы инерции Q_j^u через кинетическую энергию системы:

$$Q_j^u = -\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j}$$

где T - кинетическая энергия системы

Согласно общему уравнению динамики: $Q_j + Q_j^u = 0$

обобщенная сила системы: $Q_j = -Q_j^u = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j}$

УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА

Чтобы составить уравнения Лагранжа для данной механической системы, необходимо:

- - установить число степеней свободы системы и выбрать обобщенные координаты;
- - изобразить систему в произвольном положении, все действующие силы (для систем с идеальными связями только активные);
- - вычислить обобщенные силы, при этом каждое возможное перемещение должно быть положительным;
- - записать кинетическую энергию системы и выразить ее через обобщенные координаты и обобщенные скорости;
- - вычислить частные производные согласно уравнениям Лагранжа;