

Побудова епюр  $M$ ,  $Q$  та  $N$  у  
балках та рамах. Визначення  
розмірів перерізу

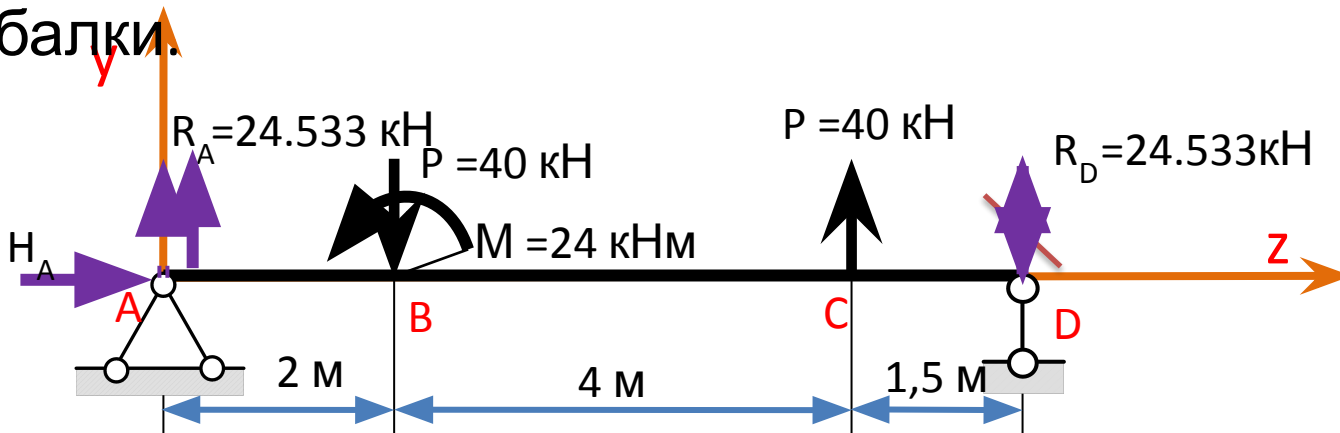
Для заданных балок, закрепленных и нагруженных как показано на рисунке, требуется:

- 1) определить опорные реакции;
- 2) построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, определив их значения во всех характерных точках, При этом для каждого участка записать аналитические выражения  $M_x$  и  $Q_y$  с полным их исследованием.

# Задача 1.

Рисуем расчетную схему, заданной

балки.



1. Определяем опорные

реакции:  $H_A = 0$

$$\overset{\circ}{a} M_A = 0: - 2 \times P + 6 \times P + 7,5 \times R_D + M = 0$$

$$R_D = \frac{2 \times 40 - 6 \times 40 - 24}{7,5} = - 24,533 ( \quad )$$

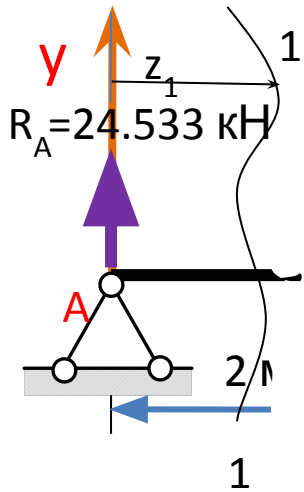
$$\overset{\circ}{a} M_D = 0: 5,5 \times P - 1,5 \times P - 7,5 \times R_A + M = 0$$

$$R_A = \frac{5,5 \times 40 - 1,5 \times 40 + 24}{7,5} = 24,533 ( \quad )$$

Проверка

$$\overset{ag}{a} F_y = 0: - P + P + R_A - R_D = - 40 + 40 + 24,533 - 24,533 = 0$$

## 2. Определяем значения поперечных сил и изгибающих моментов.



$$0 \leq z_1 \leq 2$$

$$M_x(z_1) = R_A \cdot z_1;$$

$$M_x(0) = 24,533 \cdot 0 = 0 \text{ (кНм)};$$

$$M_x(2) = 24,533 \cdot 2 = 49,067$$

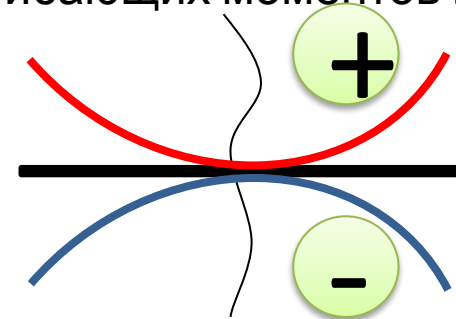
кНм;

$$Q_y(z_1) = R_A = 24.533 \text{ кН} - \text{const}$$

### Правило

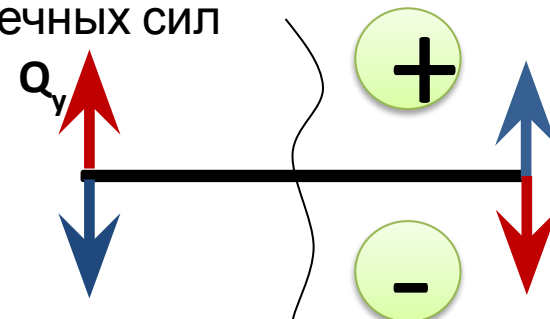
### знаков

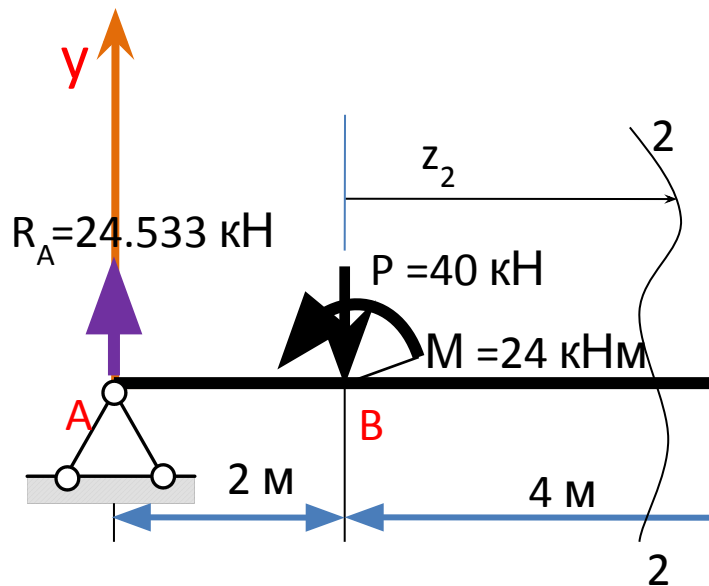
при определении  
изгибающих моментов  $M_x$



при

определении  
поперечных сил





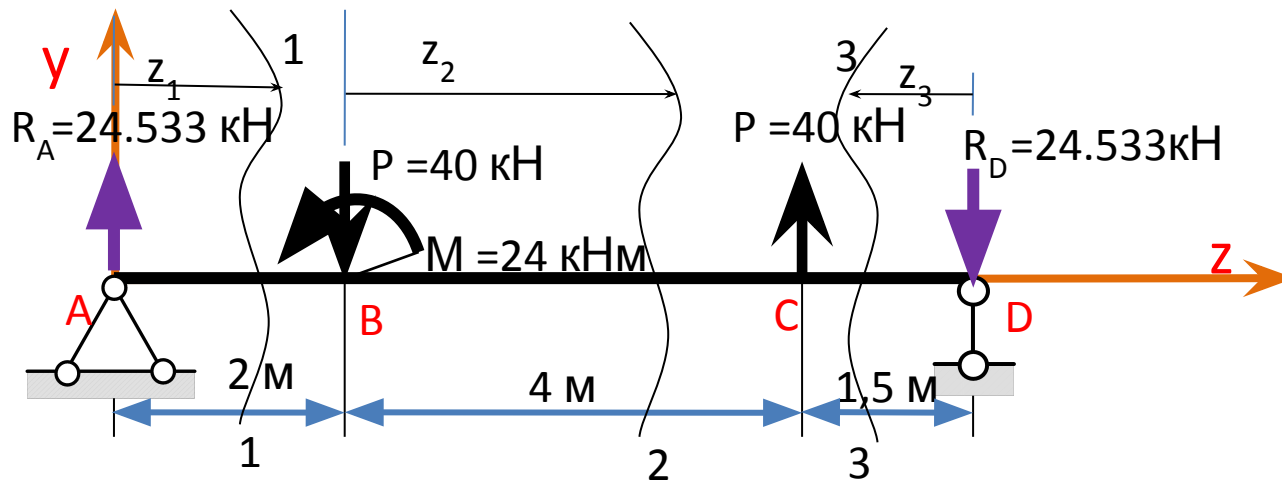
$$0 \leq z_2 \leq 4 \text{ m}$$

$$M_x(z_2) = R_A \cdot (2 + z_2) - P \cdot z_2 - M;$$

$$M_x(0) = 24,533 \cdot (2 + 0) - 40 \cdot 0 - 24 = 25,067 \text{ (кНм)};$$

$$M_x(4) = 24,533 \cdot (2 + 4) - 40 \cdot 4 - 24 = -36,8 \text{ (кНм)};$$

$$Q_y(z_2) = R_A - P = 24,533 - 40 = 15,467 \text{ (кН)} - \text{const};$$



$$0 \leq z_3 \leq 1,5\text{M}$$

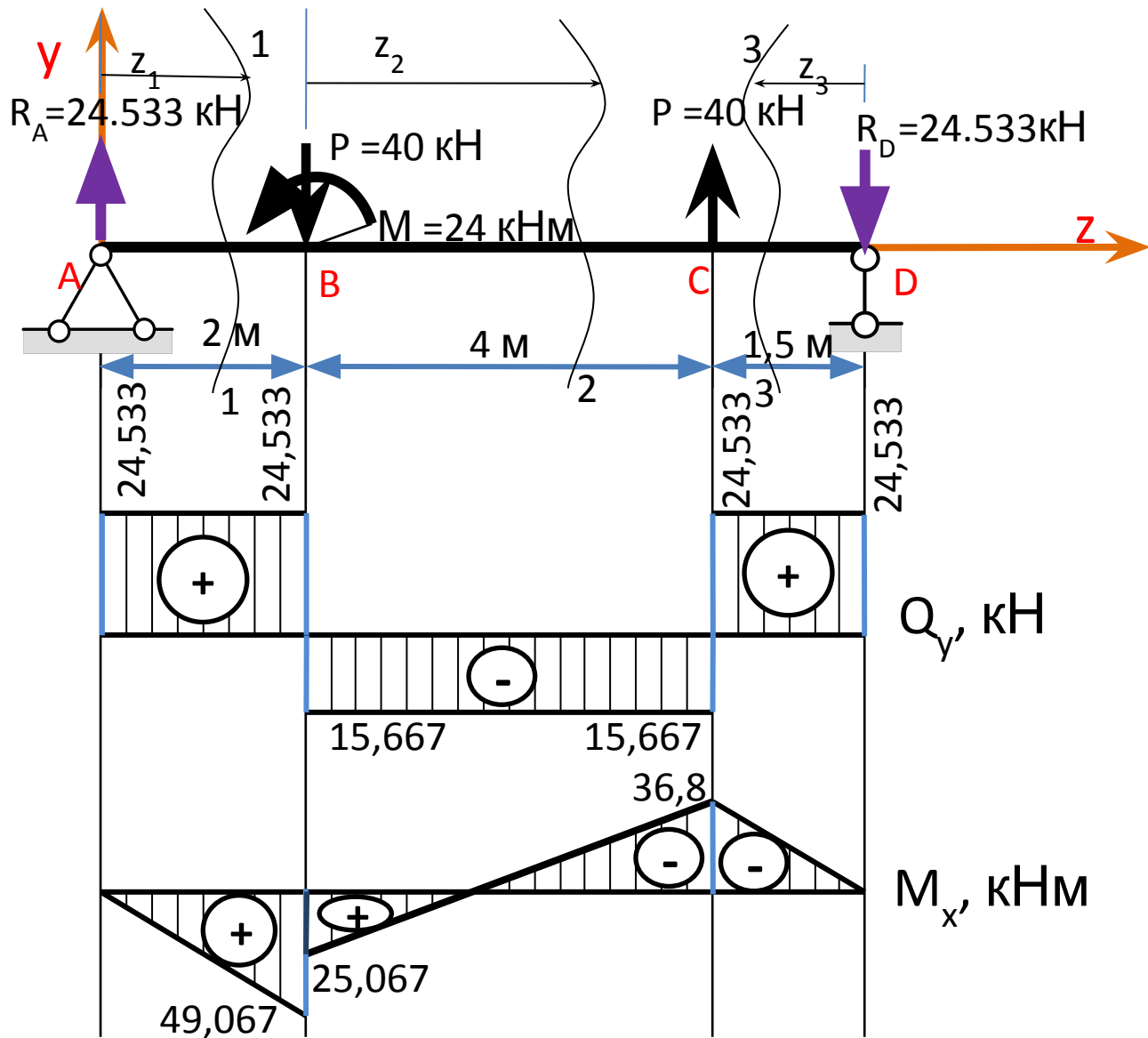
$$M_x(z_3) = -R_D \cdot z_3;$$

$$M_x(0) = -24,533 \cdot 0 = 0 \text{ (кНм)};$$

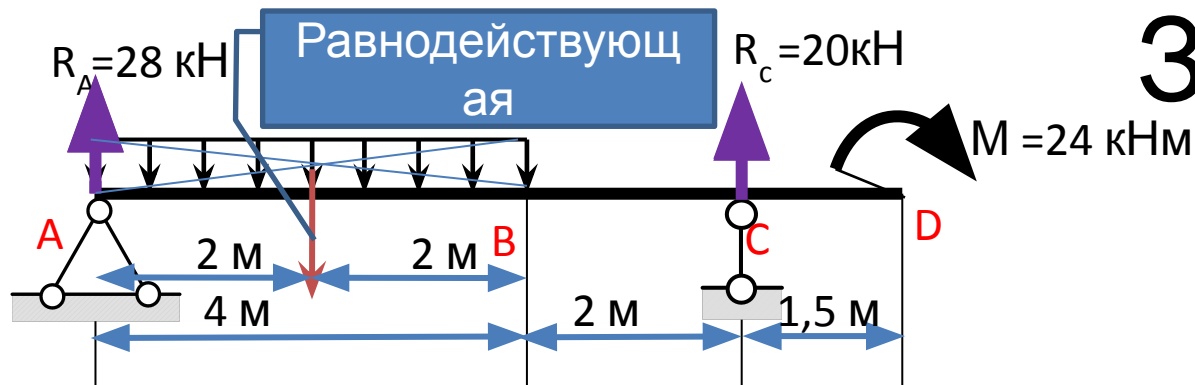
$$M_x(1,5) = -24,533 \cdot 1,5 = -36,8 \text{ (кНм)};$$

$$Q_y(z_3) = R_D = 24,533 \text{ (кН)} - \text{const};$$

### 3. Построение эпюр поперечных сил $Q_y$ и изгибающих моментов $M_x$ .



# Задача 2.



1. Определяем опорные

реакции.  $\sum M_A = 0: 4 \times q \times 2 + 6 \times R_C - M = 0$

$$R_C = \frac{4 \times 12 \times 2 + 24}{6} = 20 \text{ ( )}$$

$\sum M_C = 0: 4 \times q \times 4 - 6 \times R_A - M = 0$

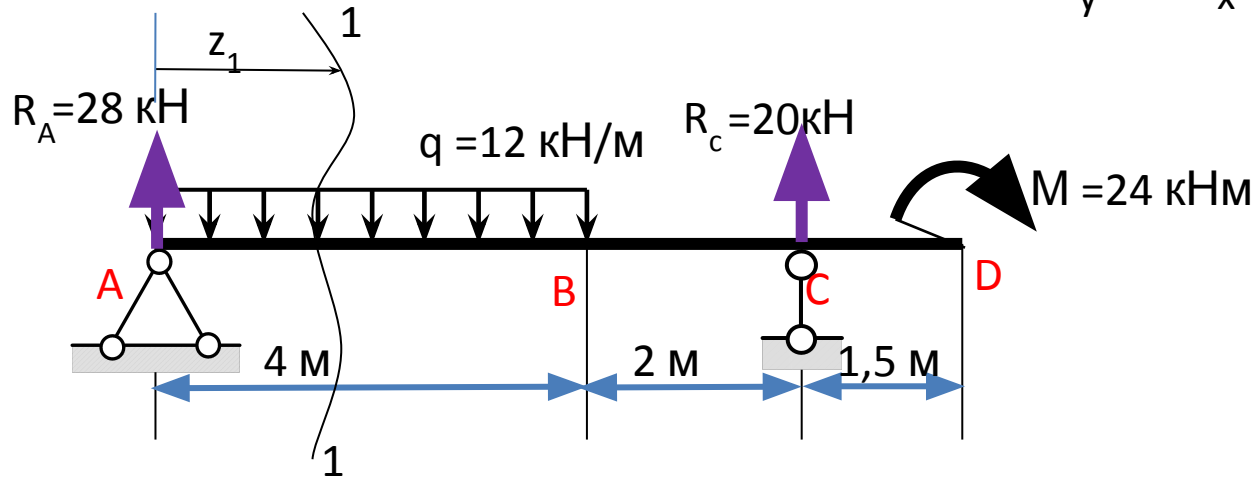
$$R_A = \frac{4 \times 12 \times 4 - 24}{6} = 28 \text{ ( )}$$

Проверка

$\sum F_y = 0: - 4 \times q - R_A + R_C = - 4 \times 12 + 28 + 20 = - 48 + 48 = 0$



## 2. Определение внутренних усилий $Q_y$ и $M_x$ .



$$0 \leq z_1 \leq 4 \text{ м}$$

$$M_x(z_1) = R_A \cdot z_1 - z_1 \cdot q \cdot z_1 / 2;$$

$$Q_y(z_1) = R_A - z_1 \cdot q;$$

$$M_x(0) = 28 \cdot 0 - 0 \cdot 12 \cdot 0 / 2 = 0;$$

$$Q_y(0) = 28 - 0 \cdot 12 = 28 \text{ (кН)};$$

$$M_x(4) = 28 \cdot 4 - 4 \cdot 12 \cdot 4 / 2 = 16 \text{ (кНм)};$$

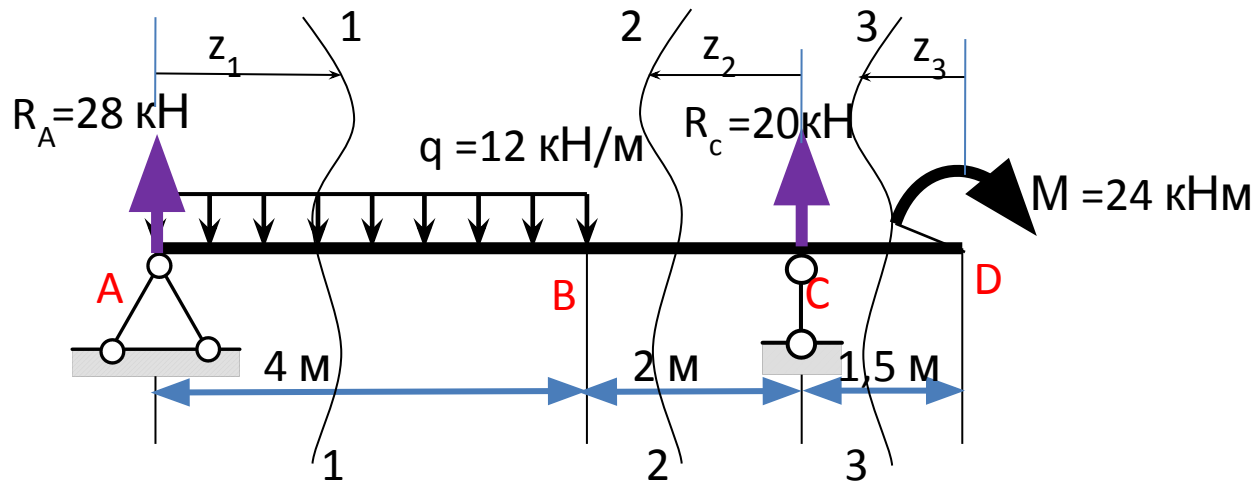
$$Q_y(4) = 28 - 4 \cdot 12 = -20 \text{ (кН)};$$

Определим экстремум функции  $M_x$

$$\frac{dM_x(z_1)}{dz_1} = R_A - z_1 \cdot q = 0$$

$$z_{1,\max} = \frac{R_A}{q} = \frac{28}{12} = 2.33 \text{ ( )}$$

$$M_{x,\max}(2,33) = 28 \cdot 2,33 + 2,33 \cdot 12 \cdot 2,33 / 2 = 32,67 \text{ (кНм)};$$



$$0 \leq z_2 \leq 2M$$

$$M_x(z_2) = R_C \cdot z_2 - M;$$

$$M_x(0) = 20 \cdot 0 - 24 = -24 \text{ (кНМ)};$$

$$M_x(2) = 20 \cdot 2 - 24 = 16 \text{ (кНМ)};$$

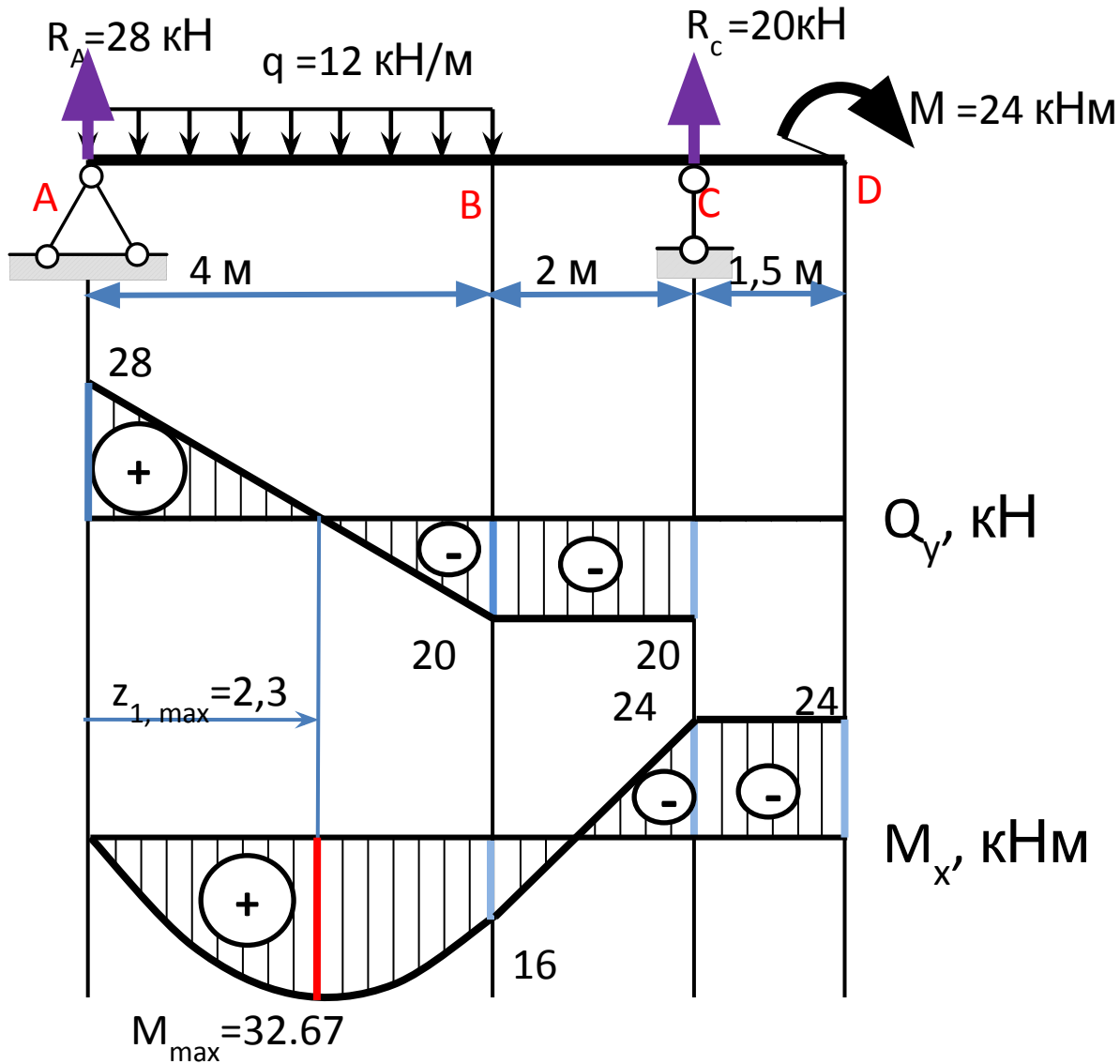
$$Q_y(z_2) = -R_C = -20 \text{ (кН)} - \text{const};$$

$$0 \leq z_3 \leq 1,5M$$

$$M_x(z_3) = -M = -24 \text{ (кНМ)} - \text{const};$$

$$Q_y(z_3) = 0;$$

### 3. Построение эпюр поперечных сил $Q_y$ и изгибающих моментов $M_x$ .

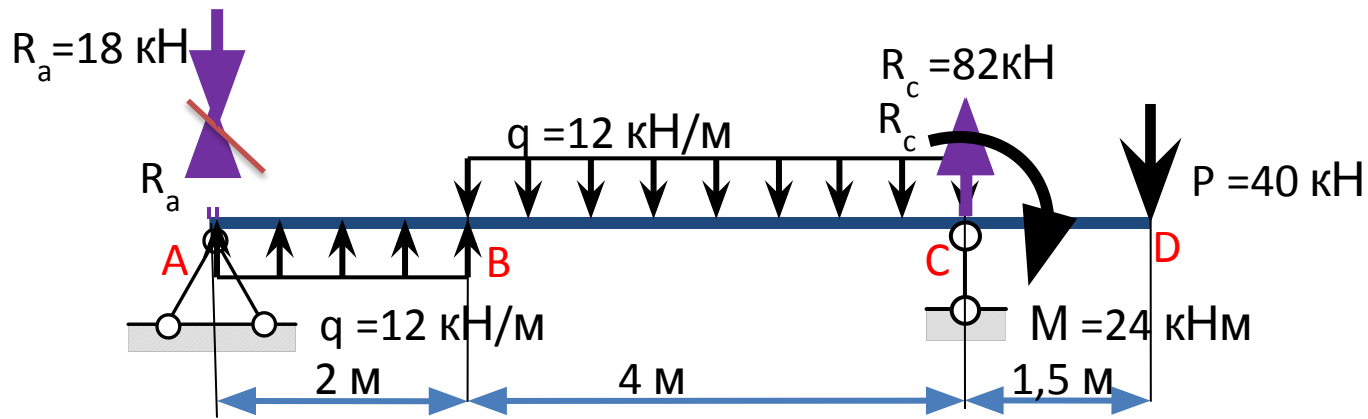


$$\frac{d^2 M_x(z_2)}{dz_2^2} = -q;$$



$Q_y$ , кН

$M_x$ , кНм



1. Определяем опорные реакции.

$$\overset{\circ}{\text{a}} M_A = 0: - 7,5 \times P + 2 \times q \times 1 - 4 \times q \times 4 + 6 \times R_c - M = 0$$

$$R_c = \frac{7,5 \times 40 - 2 \times 12 \times 1 + 4 \times 12 \times 4 + 24}{6} = 82 ( \quad )$$

$$\overset{\circ}{\text{a}} M_C = 0: 1,5 \times P - 2 \times q \times 5 + 4 \times q \times 2 - 6 \times R_A - M = 0$$

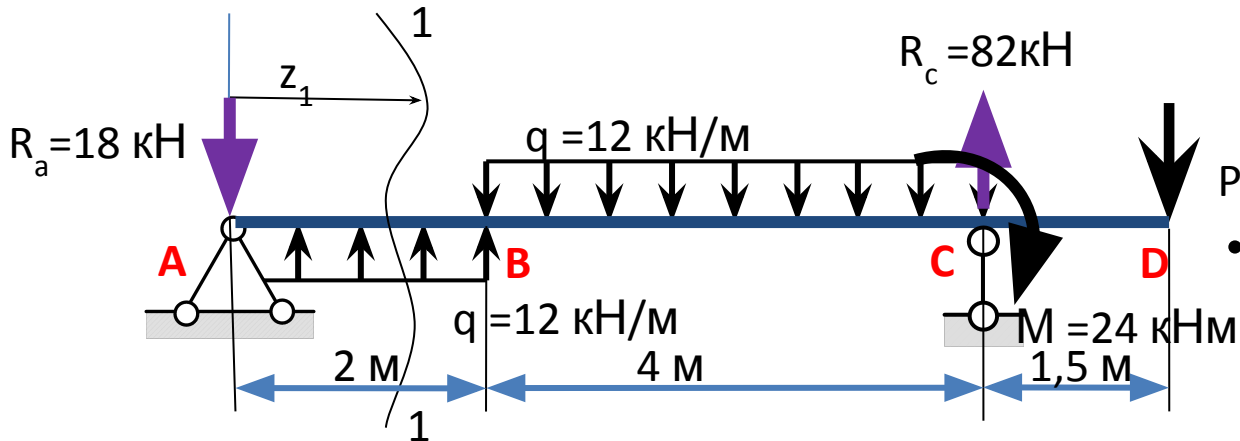
$$R_A = \frac{1,5 \times 40 - 2 \times 12 \times 5 + 4 \times 12 \times 2 - 24}{6} = - 18 ( \quad )$$

Проверка

$$\overset{\circ}{\text{a}} F_y = 0: - P + 2 \times q - 4 \times q - R_A + R_c = - 40 + 2 \times 12 - 4 \times 12 - 18 + 82 =$$

$$= 106 - 106 = 0$$

2. Определяем значения поперечных сил и изгибающих моментов.



- Балка имеет 3 участка: АВ, ВС, СД.

$$0 \leq z_1 \leq 2\text{ м}$$

$$M_x(z_1) = -R_A \cdot z_1 + z_1 \cdot q \cdot z_1 / 2;$$

$$Q_y(z_1) = -R_A + z_1 \cdot q;$$

$$M_x(0) = -18 \cdot 0 + 0 \cdot 12 \cdot 0 / 2 = 0;$$

$$Q_y(0) = -18 + 0 \cdot 12 = -18 (\text{кН});$$

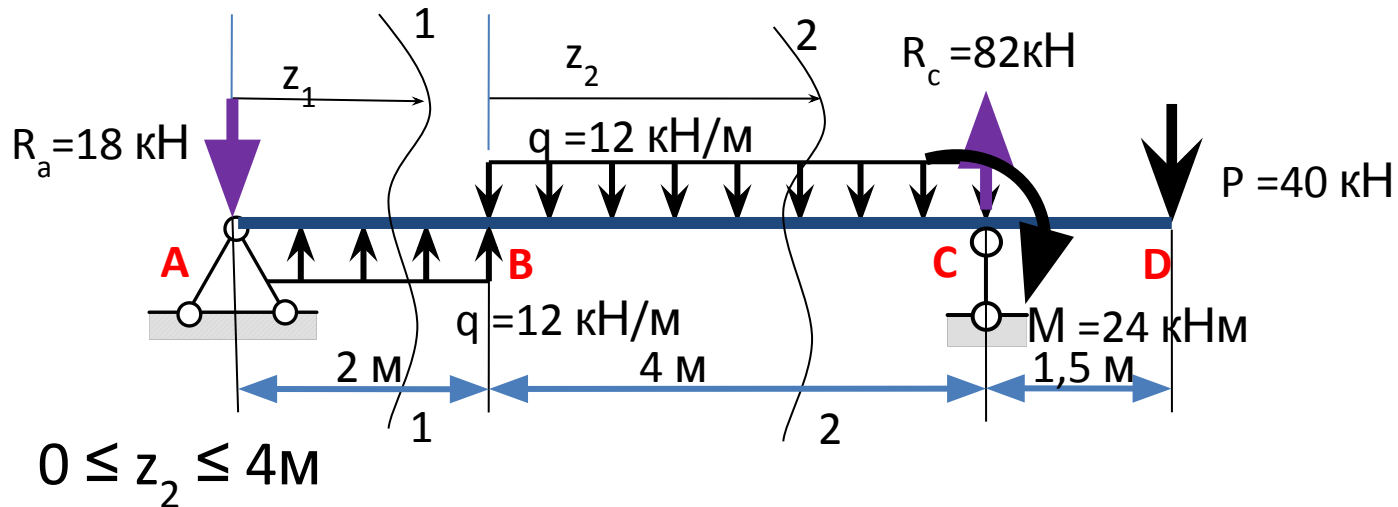
$$M_x(2) = -18 \cdot 2 + 2 \cdot 12 \cdot 2 / 2 = -12 (\text{кНм});$$

$$Q_y(2) = -18 + 2 \cdot 12 = 6 (\text{кН});$$

$$\frac{dM_x(z_1)}{dz_1} = -R_A + z_1 \cdot q = 0$$

$$z_{1,\text{max}} = \frac{R_A}{q} = \frac{18}{12} = 1.5 ( )$$

$$M_{x,\text{max}}(1.5) = -18 \cdot 1.5 + 1.5 \cdot 12 \cdot 1.5 / 2 = -13.5 (\text{кНм});$$



$$M_x(z_2) = -R_A \cdot (2+z_2) + 2 \cdot q \cdot (1+z_2) - z_2 \cdot q \cdot z_2 / 2 ;$$

$$M_x(0) = -18 \cdot (2+0) + 2 \cdot 12 \cdot (1+0) - 0 \cdot 12 \cdot 0 / 2 = -12 (\text{kHM});$$

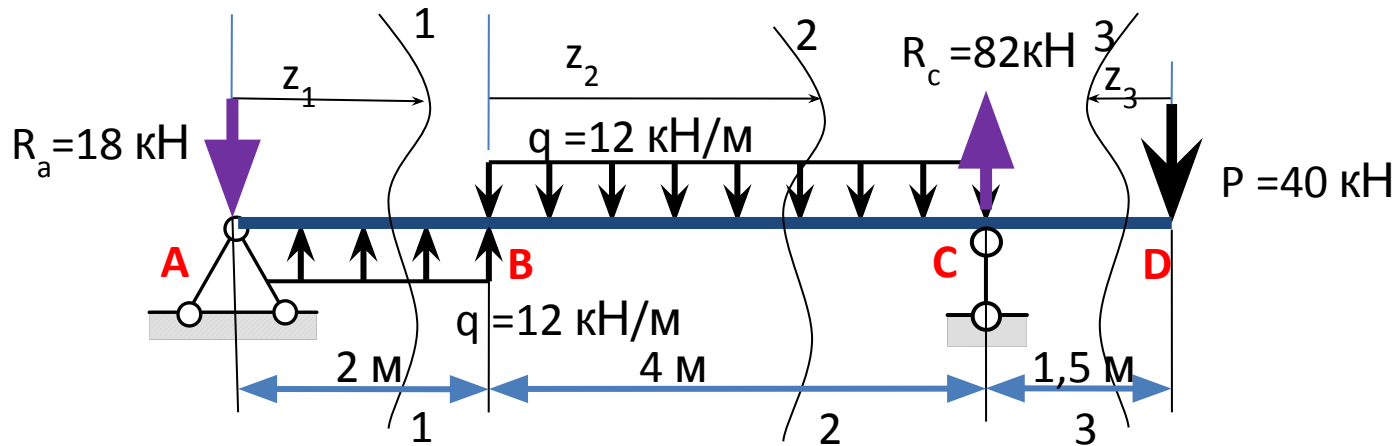
$$M_x(4) = -18 \cdot (2+4) + 2 \cdot 12 \cdot (1+4) - 4 \cdot 12 \cdot 4 / 2 = -84 (\text{kHM});$$

$$Q_y(z_2) = -R_A + 2 \cdot q - z_2 \cdot q; \quad Q_y(0) = -18 + 2 \cdot 12 - 0 \cdot 12 = 6 (\text{kH});$$

$$Q_y(4) = -18 + 2 \cdot 12 - 4 \cdot 12 = -42 (\text{kH});$$

$$\frac{dM_x(z_2)}{dz_2} = -R_A + 2 \cdot q - q \cdot z_2 = 0; \quad z_{2,\max} = \frac{-R_A + 2 \cdot q}{q} = \frac{-18 + 2 \cdot 12}{12} = 0.5 ( )$$

$$M_{x,\max}(0.5) = -18 \cdot 2,5 + 2 \cdot 12 \cdot 1,5 - 0,5 \cdot 12 \cdot 0,5 / 2 = -10,5 (\text{kHM});$$



$$0 \leq z_3 \leq 1,5 \text{ m}$$

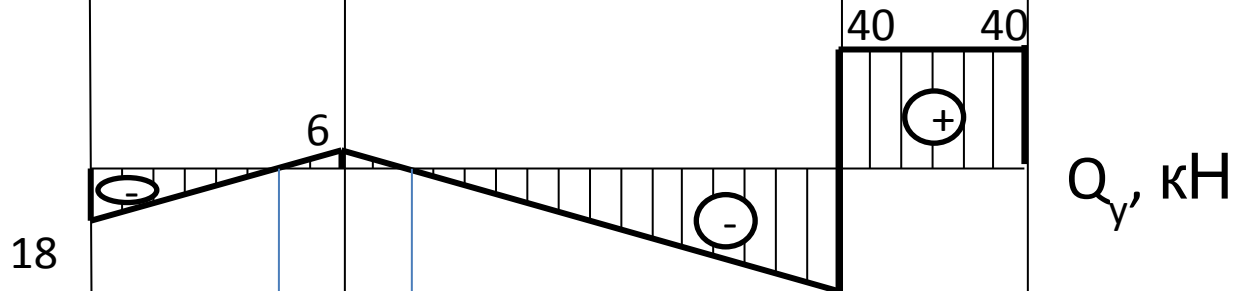
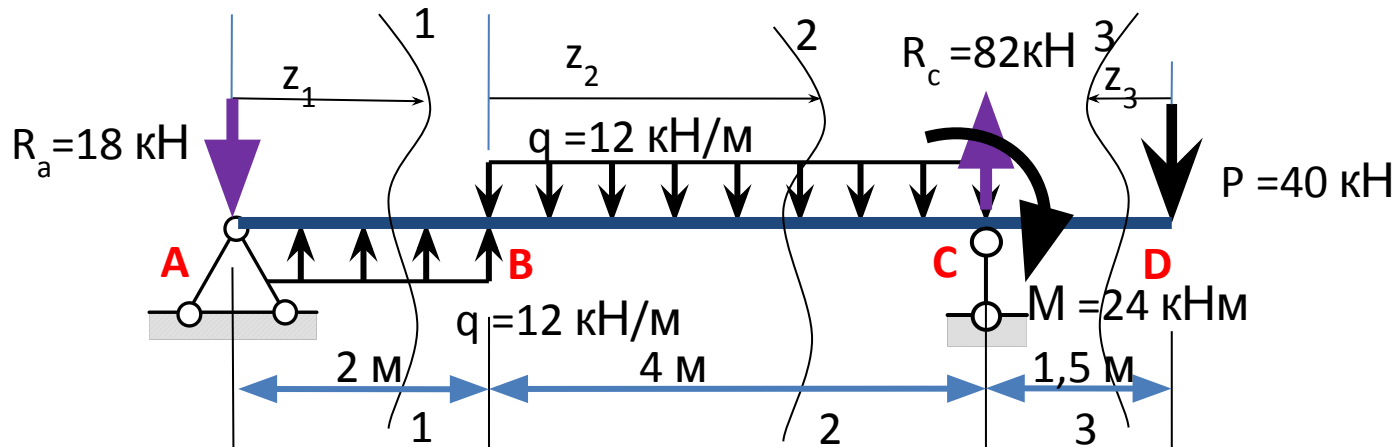
$$M_x(z_3) = -P \cdot z_3;$$

$$M_x(0) = -40 \cdot 0 = 0;$$

$$M_x(1.5) = -40 \cdot 1.5 = 60 \text{ (кНм)};$$

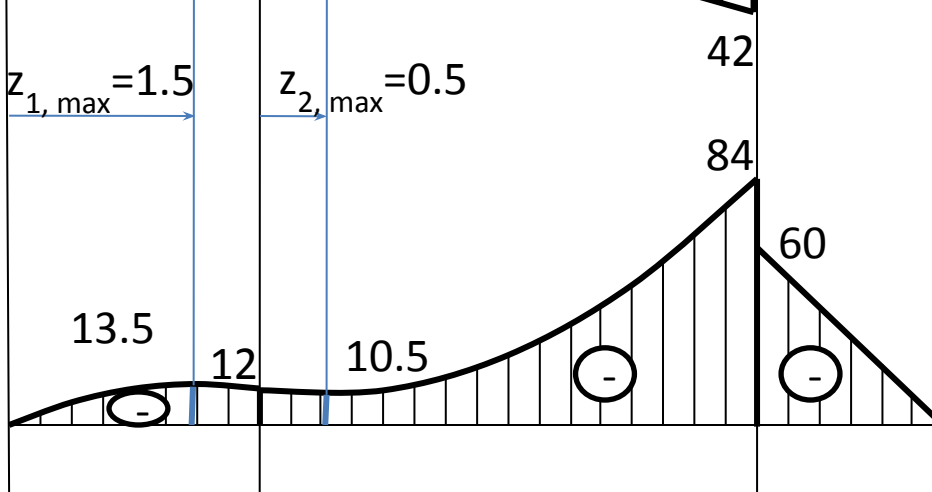
$$Q_y(z_3) = P = 40 \text{ (кН)} - \text{const};$$

3. Строим эпюры изгибающих моментов и поперечных сил.



$$\frac{d^2 M_x(z_1)}{dz_1^2} = q;$$

$$\frac{d^2 M_x(z_2)}{dz_2^2} = -q;$$



$M_x, \text{ kHm}$