

КТ

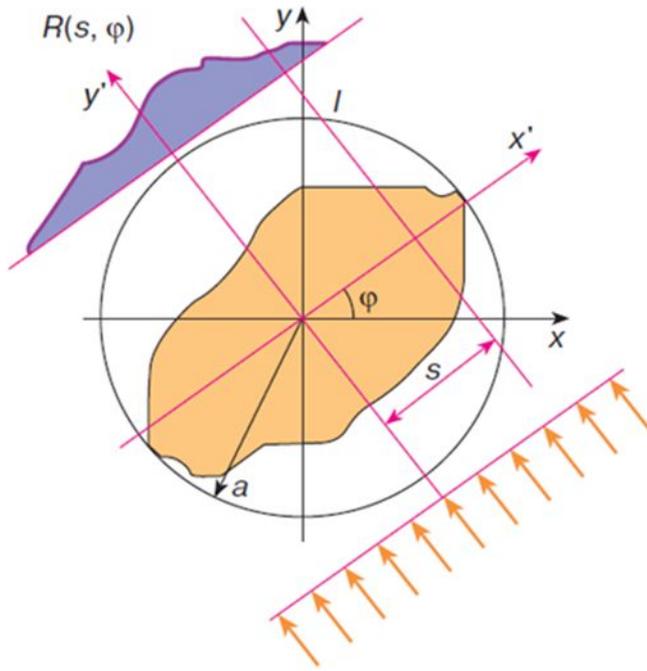
**Математические задачи компьютерной
томографии**

Преобразование Радона

— интегральное преобразование функции многих переменных, родственное преобразованию Фурье. Впервые введено в работе австрийского математика Иоганна Радона 1917-го года.

Важнейшее свойство преобразования Радона — обратимость, то есть возможность восстанавливать исходную функцию по её преобразованию Радона.

Двумерное преобразование Радона



где связь между исходной системой координат $\{x, y\}$ и повернутой на угол φ системой координат $\{x', y'\}$ определяется соотношением

$$\begin{aligned}x &= x' \cos \varphi - y' \sin \varphi, \\y &= x' \sin \varphi + y' \cos \varphi,\end{aligned}$$

Метод получения двумерного томографического изображения содержит два этапа. На первом этапе формируются проекционные данные, на втором по проекционным данным восстанавливается изображение поперечного сечения.

Пусть необходимо определить плотность распределения вещества $f(x, y)$ в сечении объекта. Исследуемый объект в пределах тонкого поперечного слоя просвечивается, например, параллельным пучком хорошо сфокусированных рентгеновских лучей (рис. 1). Направление лучей составляет некоторый угол φ с осью x . Лучи ослабляются веществом, находящимся внутри объекта, пропорционально его плотности. С противоположной стороны объекта располагается устройство, регистрирующее интенсивность каждого луча, прошедшего через объект. При этом полагается, что лучи распространяются в объекте вдоль прямой линии l , определяемой уравнением

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - s = 0, \quad (1)$$

$$R(s, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \varphi - y' \sin \varphi, s \sin \varphi + y' \cos \varphi) dy', \quad (2)$$

Регистрируемое излучение $R(s, \varphi)$ называется радоновским образом или проекцией, а преобразование (2) — преобразованием Радона. Проекции вычисляются под всевозможными углами φ и для тех значений s , при которых двумерная функция $f(x, y)$ отлична от нуля. На рассмотрение окружность радиуса a , охватывающую исследуемое поперечное сечение. В этом случае интеграл в (2) имеет вид

$$R(s, \varphi) = \int_{-\sqrt{a^2 - s^2}}^{\sqrt{a^2 - s^2}} f(s \cos \varphi - y' \sin \varphi, s \sin \varphi + y' \cos \varphi) dy'. \quad (3)$$

Таким образом, каждое значение радоновского образа $R(s, \varphi)$ есть интеграл от тех значений функции $f(x, y)$, которые она принимает вдоль луча l , определяемого параметрами s и φ .

В качестве примера вычислим радоновский образ для двух гауссовских импульсов, описываемых соотношением

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^2 \exp \left\{ -\frac{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}{2b^2} \right\}. \quad (4)$$

Подставляя (4) в (3), находим [1]

$$R(s, \varphi) = \sum_{i=1}^2 b \sqrt{2\pi} \exp \left\{ -\frac{(x_i \cos \varphi + y_i \sin \varphi - s)^2}{2b^2} \right\}.$$

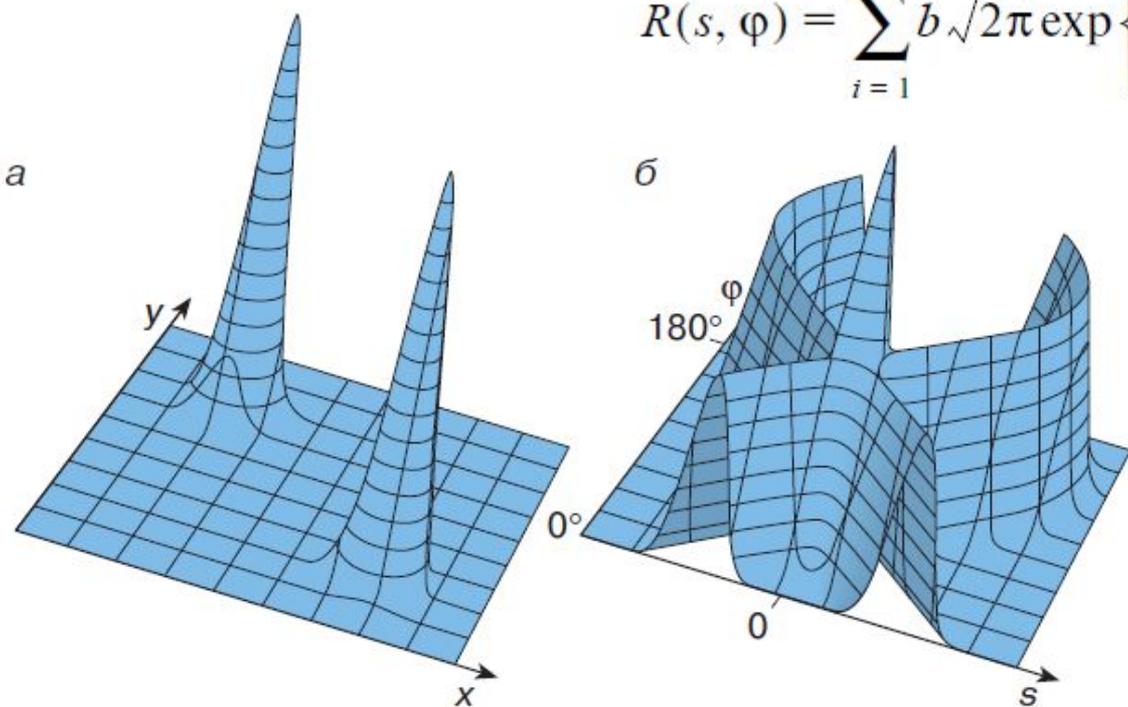


Рис. 2. Функция (а) и ее радоновский образ (б)

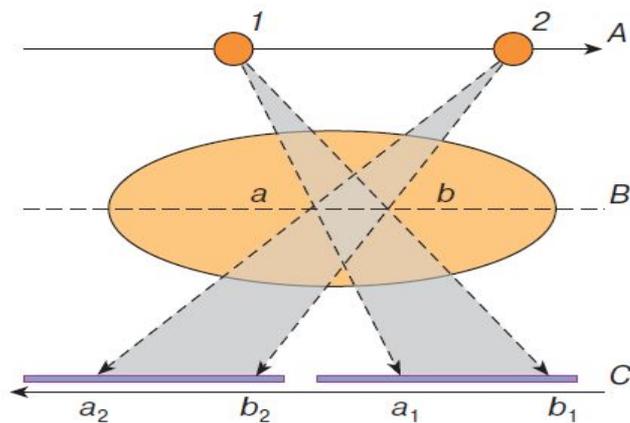


Рис. 3. Схема классической томографии

Плоскости A и C параллельны плоскости B . Источник рентгеновского излучения и фотопленка перемещаются в противоположных направлениях с одинаковой скоростью. В этом случае точка пересечения осей источника рентгеновского излучения лежит на плоскости B . Потому изображение плоскости B , в частности точек a и b (см. рис. 3), на фотопленке в плоскости C будет неподвижным. В то же время точки, которые лежат вне плоскости B , будут отображаться в различные места фотопленки на плоскости C . Поэтому на фотопленке изображение плоскости B четкое, а изображения остальных сечений объекта размазываются за счет движения, создавая искажения томографического изображения.

АЛГОРИТМ ОБРАТНОГО ПРОЕЦИРОВАНИЯ

Простейшим алгоритмом реконструкции изображений в компьютерной томографии является алгоритм обратного проецирования.

Оценка плотности $f(x, y)$ вычисляется следующим образом. Проекция $R(s, \varphi)$ функции двух переменных $f(x, y)$ для каждого значения угла φ представляет собой одномерную функцию. Ее можно преобразовать в двумерную функцию, зафиксировав угол φ и растянув (выполнив обратное проецирование) по всей плоскости (x, y) в соответствии с выражением

$$R_{\varphi}(x, y) = R(x \cos \varphi + y \sin \varphi, \varphi). \quad (5)$$

Очевидно, что сечение двумерной функции $R_\varphi(x, y)$ равно $R(s, \varphi)$, если секущая плоскость перпендикулярной плоскости (x, y) и ее проекция на плоскость (x, y) с осью x составляют угол φ . Далее осуществляется сложение всех обратных проекций $R_\varphi(x, y)$ для $0 \leq \varphi \leq \pi$. В результате получим суммарное изображение $\hat{f}_{on}(x, y)$, которое используется в качестве оценки функции плотности $f(x, y)$. Суммарное изображение определяется соотношением

$$\hat{f}_{on}(x, y) = \int_0^\pi R(x \cos \varphi + y \sin \varphi, \varphi) d\varphi. \quad (6)$$

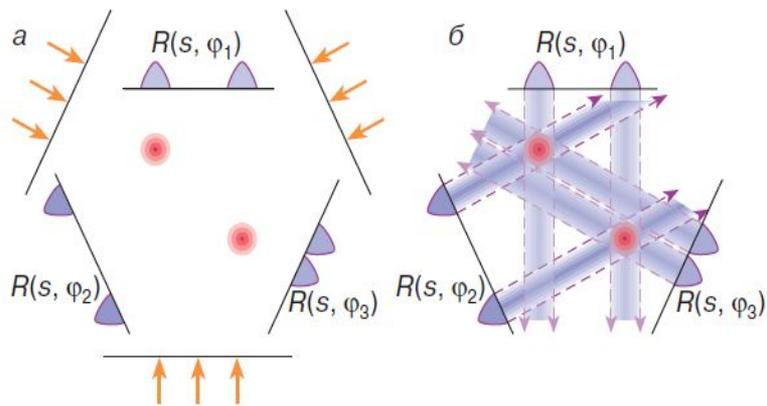


Рис. 4. Схема восстановления томограммы по алгоритму обратного проецирования: *a* – получение проекций, *б* – суммирование обратных проекций

Таким образом, идея алгоритма обратного проецирования состоит в том, что оценку плотности $f(x, y)$ в любой точке с координатами (x, y) находят путем суммирования лучей, проходящих через эту точку.

Операция обратного проецирования имеет простую геометрическую интерпретацию. На рис. 4, *a* показана схема получения трех проекций под углами φ_1 , φ_2 и φ_3 по двумерному изображению $f(x, y)$, описываемому функцией (4). Изображение $f(x, y)$ на рис. 4 представляет собой вид сверху изображения, приведенного на рис. 2, *a*, где большим значениям функции $f(x, y)$ соответствует меньший уровень яркости и наоборот. Полученные проекции $R(s, \varphi_i)$, $i = 1, 2, 3$, растягиваем в соответствии с (5) и суммируем. Результат реконструкции функции $f(x, y)$ по трем проекциям приведен на рис. 4, *б*. Видно, что, несмотря на искажения в виде полос, изображение, восстановленное лишь по трем проекциям, имеет много общего с функцией $f(x, y)$. Полосы являются результатом растягивания проекций. По их направлениям можно оценить углы проекций.

СВЕРТОЧНЫЙ АЛГОРИТМ

Невысокая эффективность алгоритма обратного проецирования объясняется тем, что он является эвристическим (полученным опытным путем). Для того чтобы точно восстановить функцию $f(x, y)$ по проекциям $R(s, \varphi)$, необходимо найти преобразование, обратное преобразованию Радона. По сути для определения неизвестной функции $f(x, y)$ необходимо решить интегральное уравнение (2) или (3). Впервые такое решение было предложено Радоном. Одной из возможных реализаций этого решения является сверточный алгоритм, который благодаря простоте и высокой точности нашел широкое применение в компьютерных томографах.

Сверточный алгоритм определяется соотношением

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} \tilde{R}(x \cos \varphi + y \sin \varphi, \varphi) d\varphi, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{R}(x \cos \varphi + y \sin \varphi, \varphi) &= \tilde{R}(s, \varphi) = \\ &= \int_{-a}^a h(s_1) R(s - s_1, \varphi) ds_1. \end{aligned} \quad (8)$$

Выражение (8) представляет собой операцию свертки проекции $R(s, \varphi)$ (при фиксированном угле φ) с функцией

$$h(s_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| \cos(\omega s_1) d\omega.$$

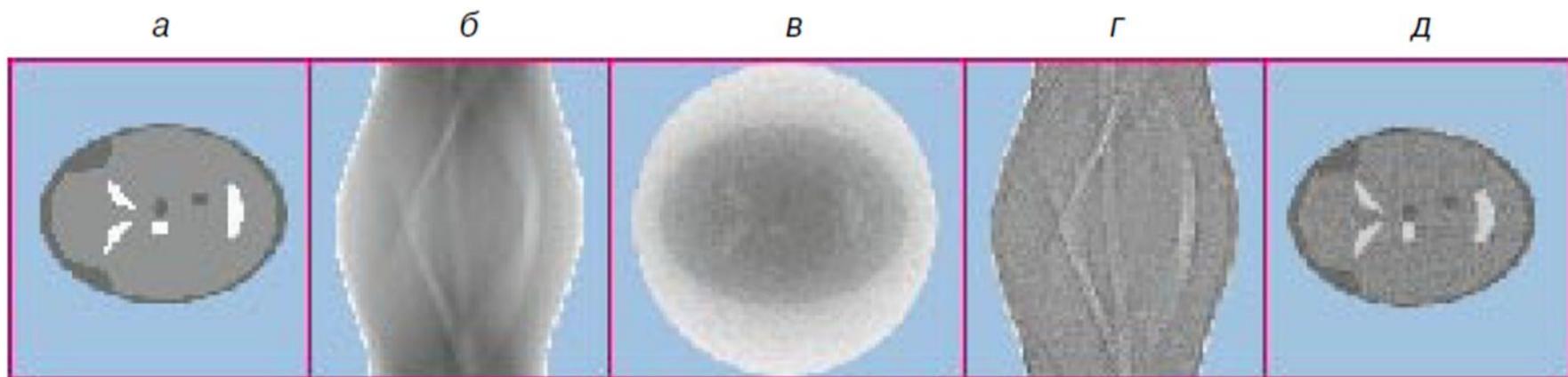


Рис. 5. Примеры восстановления томографического изображения методом обратного проецирования и сверточным алгоритмом: *a* – эталонное изображение $f(x, y)$; *б* – проекции $R(s, \varphi)$; *в* – результат восстановления алгоритмом обратного проецирования; *г* – модифицированные проекции $\tilde{R}(s, \varphi)$; *д* – результат восстановления сверточным алгоритмом

Двумерное преобразование Фурье. Формула обращения.

Двумерное преобразование Фурье от функции $f(x, y)$

$$F(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-i(k_x x + k_y y)} f(x, y)$$

Формула обращения для двумерного преоб

$$f(x, y) = \int \frac{dk_x dk_y}{(2\pi)^2} e^{i\vec{k}\vec{x}} F(k_x, k_y).$$

в полярных

$$f(x, y) = \int_0^{\infty} \frac{\omega d\omega}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\alpha e^{i\omega(x \cos \alpha + y \sin \alpha)} F(\omega \cos \alpha, \omega \sin \alpha)$$

Обозначим новые переменные

$$s = x \cos \alpha + y \sin \alpha, z = -x \sin \alpha + y \cos \alpha.$$

$$F(\omega \cos \alpha, \omega \sin \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{-i\omega s} \int_{-\infty}^{\infty} dz f(s \cos \alpha - z \sin \alpha, s \sin \alpha + z \cos \alpha)$$

или

$$F(\omega \cos \alpha, \omega \sin \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{-i\omega s} R(s, \alpha)$$

Таким образом, **одномерное преобразование Фурье по переменной s от преобразования Радона функции f даёт нам двумерное преобразование Фурье от функции f . Формула обращения**

преобр

$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\infty} \frac{\omega d\omega}{(2\pi)^2} e^{i\omega(x \cos \alpha + y \sin \alpha)} \tilde{R}(\omega, \alpha)$$
$$\tilde{R}(\omega, \alpha) = \int e^{-i\omega s} R(s, \alpha) ds$$

Получение компьютерной томограммы

Получение компьютерной томограммы основывается на выполнении следующих операций:

- * формирования требуемой ширины рентгеновского луча (коллимирование);
- * сканирования объекта пучком рентгеновского излучения, осуществляемого движением (вращательным и поступательным) вокруг пациента устройства излучатель – детекторы;
- * измерения излучения и определения его ослабления с последующим преобразованием результатов в цифровую форму;
- * машинного (компьютерного) синтеза томограммы по совокупности данных измерения, относящихся к выбранному слою;
- * построения изображения исследуемого слоя на экране видеомонитора (дисплея).

РАЗРЕШАЮЩАЯ СПОСОБНОСТЬ

Компьютерный томограф обладает двумя видами разрешающей способности: пространственной и по перепаду плотности. Первый тип определяется размером клетки матрицы (1,5 x 1,5 мм), второй равен 5 ед. Н. (0,5 %). В соответствии с этими характеристиками теоретически можно различать элементы изображения размером 1,5 x 1,5 мм. При перепаде плотности между ними не меньше 5 ед. Н. (1 %) удастся выявлять очаги величиной не менее 6 x 6 мм, а при разнице в 30 ед. Н. (3 %) — детали размером 3 x 3 мм.

ОТНОШЕНИЕ СИГНАЛ/ШУМ (ОСШ)

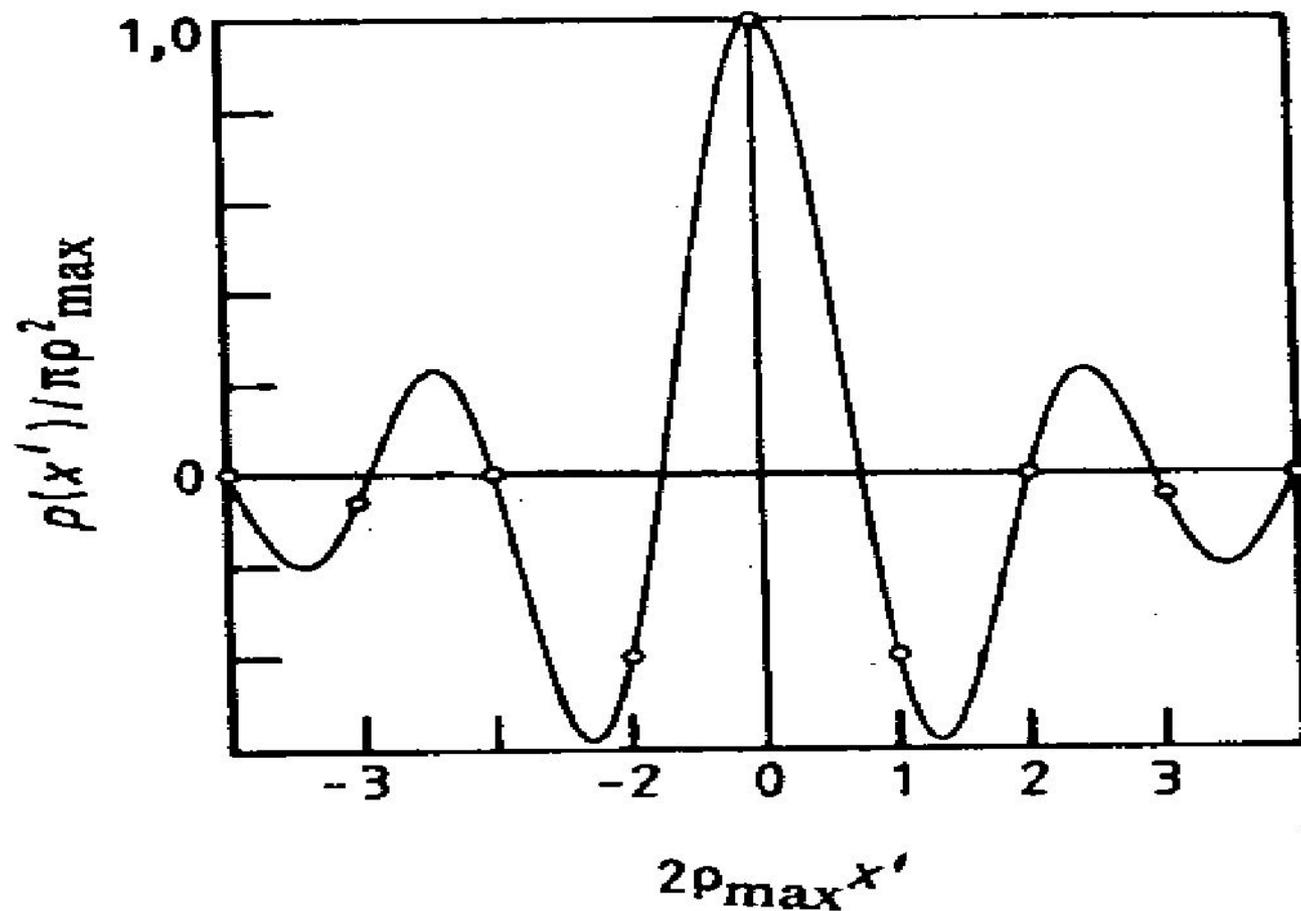
При регистрации проекций неизбежны шумы. При многократном измерении (n детектированных ренген. квантов) уровень случайных шумов \sqrt{n} . Эти «измерительные» флуктуации преобразуются алгоритмами реконструкции изображения. $ОСШ = \mu/\Delta\mu$

Если эти квантовые флуктуации – един. источник шума, доза Р.И. U в центре цилиндрического объекта с пространственным разрешением ε и ОСШ.

$\eta U = k_1 (ОСШ)^2 / \varepsilon^3 b$, т.о., **доза** зависит от квадрата отношения сигнал/шум и во всех случаях обратно пропорциональна 4 степени разрешения.

Квантовая эффективность детектора η

Рис. 4.14. Кривая, иллюстрирующая форму фильтра Рамачандрана — Лакшинараяна. Кружками показаны дискретизации функции фильтра, используемые для цифровой фильтрации. (Воспроизводится из работы [4.2].)

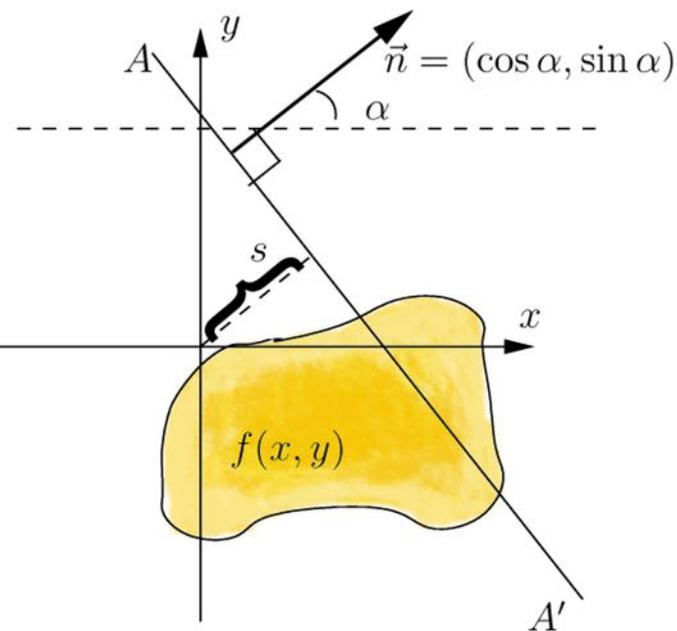


Двумерное преобразование Радона

Пусть $f(x,y)$ функция двух действительных переменных, определённая на всей плоскости и достаточно быстро убывающая на бесконечности (так, чтобы соответствующие несобственные интегралы сходились). Тогда преобразованием Радона функции $f(x,y)$ называется функция

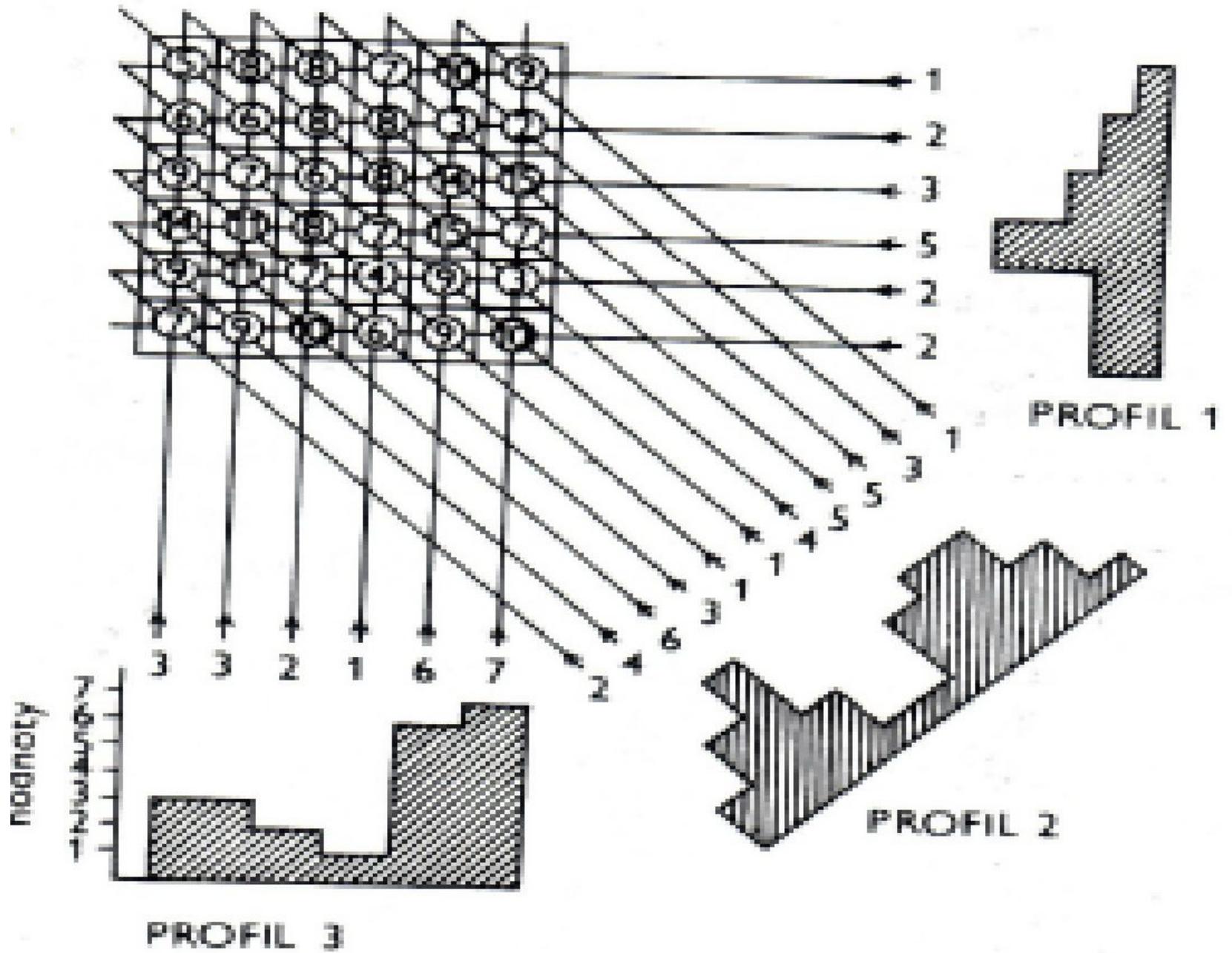
$$R(s, \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \alpha - z \sin \alpha, s \sin \alpha + z \cos \alpha) dz$$

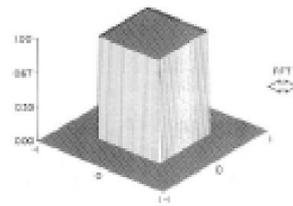
Преобразование Радона имеет простой геометрический смысл — это интеграл от функции вдоль прямой, перпендикулярной вектору \vec{n} (AA') и проходящей на расстоянии s (измеренного вдоль вектора \vec{n} , с соответствующим знаком) от начала координат



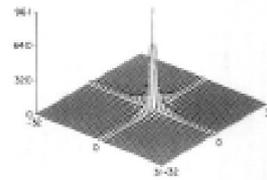
Артефакты

- При эффекте неполного заполнения
- Ужесточение излучения
- Движения пациента

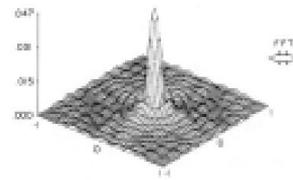




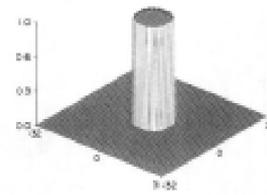
⊗



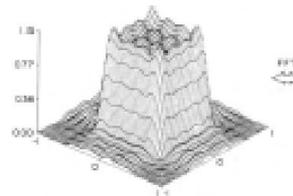
⊙



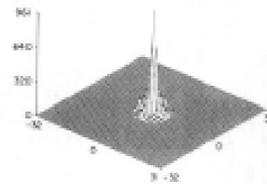
⊗



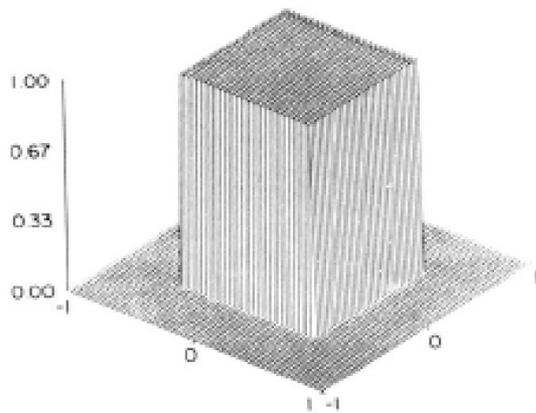
⊙



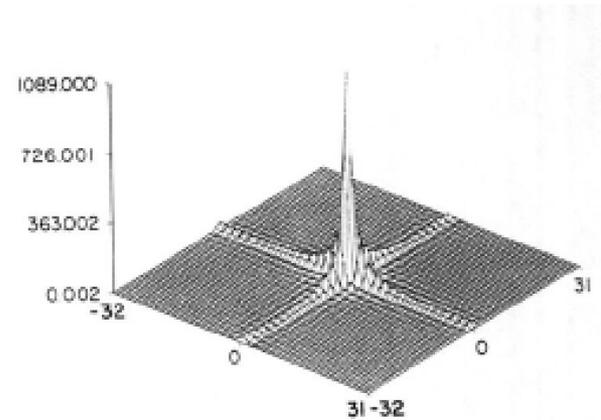
⊗



Двумерное преобразование Фурье.



FFT
↔





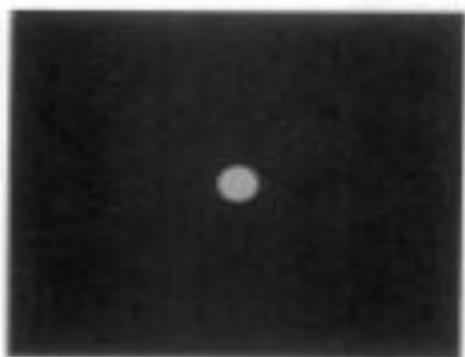
•



||



•



||

