Основные понятия и принципы математического моделирования.

Основные этапы метода математического моделирования.

1. Создание качественной модели.

Выясняется характер законов и связей, действующих в системе. В зависимости от природы модели эти законы могут быть физическими, химическими, биологическими, экономическими.

- **Задача моделирования- выявить главные, характерные черты явления или процесса, его определяющие особенности.**

Применительно к исследованию физических явлений создание качественной модели– это формулировка физических закономерностей явления или процесса на основании эксперимента.

2. Создание математической модели (постановка математической задачи).

- Если модель описывается некоторыми уравнениями, то она называется детерминированной. Рассмотренные в курсе математической физики начально-краевые задачи являются примерами детерминированных дифференциальных моделей.
- Если модель описывается вероятностными законами, то она называется стохастической.

1) Выделение существенных факторов.

Основной принцип: если в системе действует несколько факторов одного порядка, то все они должны быть учтены, или отброшены.

2) Выделение дополнительных условий (начальных, граничных, условий сопряжения и т.п.).

3. Изучение математической модели.

1) Математическое обоснование модели. Исследование внутренней непротиворечивости модели. Обоснование корректности дифференциальной модели. Доказательство теорем существован6ия, единственности и устойчивости решения.

2) Качественное исследование модели. Выяснение ведения модели в крайних и предельных ситуациях.

3) Численное исследование модели.

а) Разработка алгоритма.

б) Разработка численных методов исследования модели. Разрабатываемые методы должны быть достаточно общими, алгоритмичными и допускающими возможность распараллеливания.

в) Создание и реализация программы. Компьютерныйэксперимент.

Сравнение лабораторного и компьютерного экспериментов

По сравнению с лабораторным (натурным) экспериментом компьютерный эксперимент дешевле, безопасней, может проводиться в тех случаях, когда натурный эксперимент принципиально невозможен.

4. Получение результатов и их интерпретация.

Сопоставление полученных данных с результатами качественного анализа, натурного эксперимента и данными, полученными с помощью других численных алгоритмов. Уточнение и модификация модели и методов её исследования.

5. Использование полученных результатов.

Предсказание новых явлений и закономерностей.

Прямые и обратные задачи математического моделирования.

1. **Прямая задача:** **все параметры исследуемой задачи известны и изучается поведение модели в различных условиях.**
2. **Обратные задачи:**

   а) *Задача распознавания*: определение параметров модели путем сопоставления наблюдаемых данных и результатов моделирования. По результатам наблюдений пытаются выяснить, какие процессы управляют поведением объекта и находят определяющие параметры модели. В обратной задаче распознавания требуется определить значение параметров модели по известному поведению системы как целого.

- **Примеры задач распознавания: -Задача электроразведки: определение подземных структур при помощи измерения на поверхности. –Задача магнитной дефектоскопии: определение дефекта в детали, помещённой между полюсами магнита, по возмущению магнитного поля на поверхности детали.**

   б) *Задача синтеза* (задача математического проектирования):

- **построение математических моделей систем и устройств, которые должны обладать заданными техническими характеристиками. В отличие от задач распознавания в задачах синтеза отсутствует требование единственности решения («веер решений»). Отсутствие единственности решения позволяет выбрать технологически наиболее приемлемый результат.**
- **Примеры задач синтеза:**
- **-Синтез диаграммы направленности антенны: определение распределения токов, создающих заданную диаграмму направленности антенны.**

  -Синтез градиентных световодов: определение профиля функции диэлектрической проницаемости, при котором световод обладает заданными характеристиками.

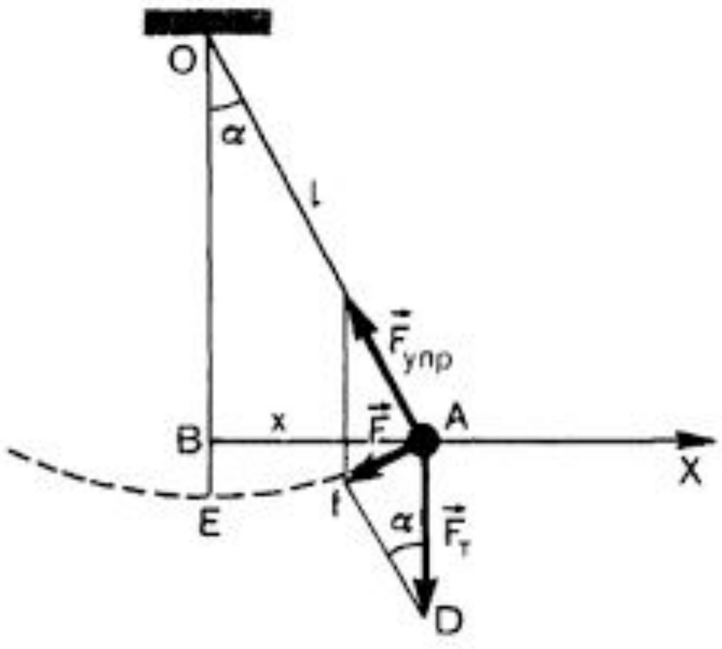
Осциллятор - математическая модель колебаний

- Движение грузика на пружинке, маятника, заряда в электрическом поле, а также эволюция многих систем в физике, химии, биологии и других науках при определенных предположениях можно описать одним и тем же дифференциальным уравнением, которое в теории колебаний выступает в качестве основной модели. Эта модель называется линейным гармоническим осциллятором. Уравнение свободных колебаний гармонического осциллятора имеет вид:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad \dot{x} = \frac{dx}{dt} \qquad \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Колебания маятника

Рис. 157



$$\vec F = m\vec a$$

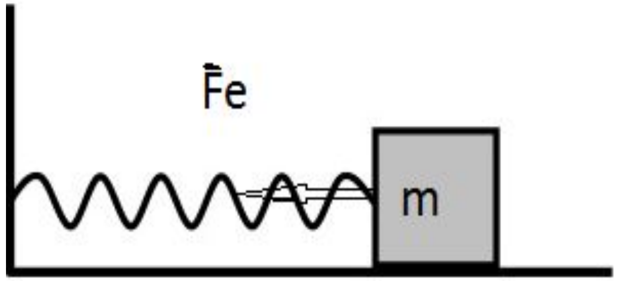
$$a = \frac{d^2 s(t)}{dt^2} = l\,\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2}$$

$$s(t) = l\varphi(t)$$

$$F = -F_T \sin\varphi = -mg\sin\varphi$$

$$\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} + \omega_0^2\varphi(t) = 0$$

Горизонтальные колебания груза на пружине



$$m\vec{a} = \vec{F}_e$$

$$F_e = -kx$$

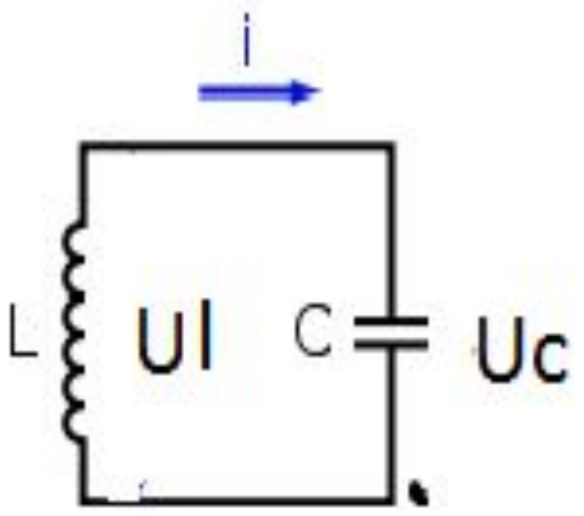
$$a = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -kx$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) = 0$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Радиотехнический контур (электрический осциллятор)



$$u_L = \frac{d(Li_L)}{dt} \qquad i_C = \frac{d(Cu_c)}{dt}$$

$$u_c + u_L = u \qquad i_L + i_C = 0$$

$$-i_L(t) = C\frac{du}{dt} \qquad LC\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + i_L(t) = 0$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \qquad \frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + \omega_0^2 i_L(t) = 0$$

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \omega_0^2 y(t) = 0$$

Адекватность моделей (сравнительно с объектами)

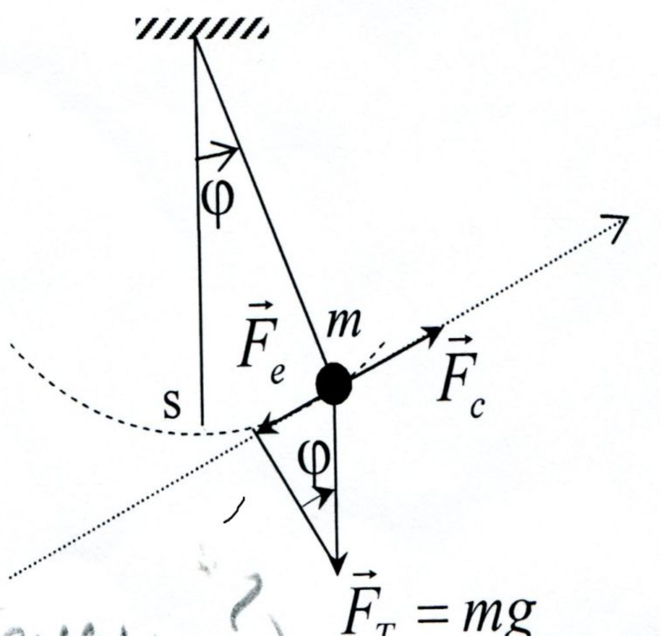
- Рассмотренные ранее модели являются моделями без учета потерь, диссипации энергии или трения.

  Далее рассмотрим эти же модели с учетом диссипации энергии.

Модель динамики маятника с учетом диссипации

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_c$$

$$F = F_e - F_c = -mg\sin\varphi - \mu\frac{ds}{dt} = -mg\sin\varphi - \mu l\frac{d\varphi}{dt}$$



$$ml\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} = -mg\sin\varphi - \mu l\frac{d\varphi}{dt}$$

$$\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} + \frac{\mu}{m}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{g}{l}\sin\varphi(t) = 0$$

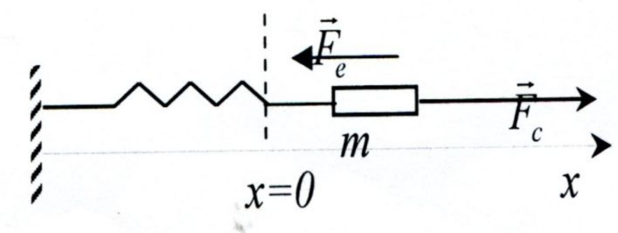
$$\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} + 2\gamma\frac{d\varphi(t)}{dt} + \omega_0^2\varphi(t) = 0$$

$$\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} + \frac{\mu}{m}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{g}{l}\sin\varphi(t) = 0$$

$$\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} + 2\gamma\frac{d\varphi(t)}{dt} + \omega_0^2\sin\varphi(t) = 0$$

$$\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} + 2\gamma\frac{d\varphi(t)}{dt} + \omega_0^2\varphi(t) = 0$$

Модель колебаний массы на пружине с учетом диссипации



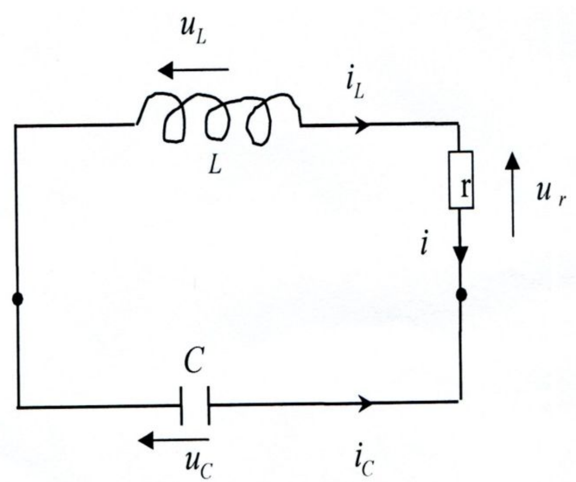
$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_c$$

$$F = F_e - F_c = -kx - \mu v = -kx - \mu \frac{dx}{dt}$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \mu \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = 0 \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \qquad \gamma = \frac{\mu}{2m}$$

Модель колебательного контура с учетом диссипации



$$u_r = ri \qquad u_L + u_r - u_c = 0$$

$$i = -i_c = i_L \qquad \frac{du_L}{dt} + \frac{du_r}{dt} - \frac{du_c}{dt} = 0$$

$$u_L = \frac{d(Li_L)}{dt} \qquad i_c = \frac{d(Cu_c)}{dt}$$

$$L\frac{d^2 i_L}{dt^2} + r\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = 0 \qquad \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + 2\gamma\frac{di(t)}{dt} + \omega_0^2 i(t) = 0$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \qquad \gamma = \frac{r}{2L} \qquad \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\gamma\frac{dy(t)}{dt} + \omega_0^2 y(t) = 0$$

Принцип электромеханических аналогий

- В рассмотренных моделях и соответственно в уравнениях этих моделей явно видна аналогия:
- механическое смещение x(t)- ток в цепи i(t);
- масса m – индуктивность L;
- коэффициент трения – сопротивление r;
- коэффициент жесткости пружины k –обратная величина емкости C;
- сложные механические системы- электрические цепи

Электрические величины		Механические величины	
Заряд конденсатора	$q(t)$	Координата	$x(t)$
Ток в цепи	$J = \dfrac{dq}{dt}$	Скорость	$v = \dfrac{dx}{dt}$
Индуктивность	L	Масса	m
Величина, обратная электроемкости	$\dfrac{1}{C}$	Жесткость	k
Напряжение на конденсаторе	$U = \dfrac{q}{C}$	Упругая сила	kx
Энергия электрического поля конденсатора	$\dfrac{q^2}{2C}$	Потенциальная энергия пружины	$\dfrac{kx^2}{2}$
Магнитная энергия катушки	$\dfrac{LI^2}{2}$	Кинетическая энергия	$\dfrac{mv^2}{2}$
Магнитный поток	LI	Импульс	mv