

**ХЕРСОНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

**Факультет фізики, математики та інформатики  
Кафедра алгебри, геометрії та математичного аналізу**

## **Дипломна робота**

**на тему: Узагальнене обернення матриць та його  
застосування до розв'язання деяких задач**

**Виконала: Кулеш Ю.А.**

**Керівник: доц. Плоткін Я.Д.**

**Херсон – 2013 рік**

# Актуальність теми

Важливість матриць у математиці важко переоцінити. Вони були предметом дослідження у багатьох наукових роботах, їх дослідженню надають багато часу і нині. Завдяки матрицям можна розв'язувати достатню кількість різнопланових задач.

З їх допомогою досліджуються графіки функцій та рівнянь як на площині так і в просторі, розв'язують системи лінійних рівнянь з  $n$  невідомими та багато іншого. В наш час матриці знайшли собі нове використання у комп'ютерній техніці, яка з кожним роком все більше розвивається покращуючи і полегшуючи нам життя.

# Об'єкт, предмет та мета досліджень



# Об'єкт дослідження:

- узагальнене обернення матриць;
- узагальнено-обернена матриця, що має жорданів ланцюг;
- псевдо-обернена матриця;
- застосування узагальнено обернених матриць до розв'язку систем лінійних та звичайних диференціальних рівнянь;
- обчислення інтегралів від функцій, які залежать від матриць.

# Предмет дослідження:

- властивості узагальнено-оберненої та псевдо-оберненої матриць;
- диференціювання узагальнено-обернених матриць, які залежать від параметра по параметру;
- асимптотичний підхід до переносу граничних умов для систем диференціальних рівнянь.



# Мета випускної роботи:

- вивчення головних питань з теорії узагальнено-обернених матриць;
- розгляд можливості диференціювання узагальнено-оберненої матриці, яка залежить від параметра по параметру;
- дослідження теоретичних основ розв'язування систем лінійних рівнянь за допомогою узагальнено-обернених матриць, виявлення їх зв'язку з розв'язком крайової задачі;
- обчислення інтегралів функцій, які залежать від матриць, побудовою жорданових ланцюгів.

## Для досягнення мети було поставлено наступні завдання:

- ознайомитись з поняттям узагальнено-оберненої та псевдо-оберненої матриць;
- вивчити властивості узагальнено-оберненої та псевдо-оберненої матриць;
- проаналізувати існуючі методи побудови псевдо-обернених матриць;
- розробити проектні алгоритми диференціювання узагальнено-оберненої матриці, яка залежить від параметра по параметру;
- розглянути спектральне представлення матриць та їх застосування до розв'язування систем звичайних диференціальних рівнянь за допомогою переносу граничних умов;
- запропонувати використання узагальнено-обернених матриць до обчислення інтегралів від функцій, які залежать від матриць



# Означення оберненої матриці

**Теорема:** Якщо визначник ( $\det A$ ) не дорівнює нулю, то матриця  $A$  має обернену:

$$\det(A) \neq 0.$$

**Матриця  $A^{-1}$  називається оберненою для квадратної невикорисноженої матриці  $A$ , якщо виконуються співвідношення:**

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$



- Розглянемо квадратну матрицю  $A$  яка має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Лінійне рівняння в однозначно розв'язне, якщо складається з нульового вектора. У цьому випадку визначена обернена матриця в  $m$

$$Ax = f \quad \longrightarrow \quad A^{-1}f = x, f \in R(A)$$

# Властивості псевдо-обернених матриць:

$$1. (A^*)_+ = (A_+)^*;$$

$$2. (A_+)_+ = A;$$

$$3. (AA_+)^* = AA_+, \quad (AA_+)^2 = AA_+;$$

$$4. (A+A)^* = A+A, \quad (A+A)^2 = A+A.$$



**Асимптотичний підхід** – це один із найпопулярніших, найпростіших та найдоступніших методів опису граничної поведінки.

Дана методологія має багато застосувань в природничих науках.


Наприклад,

- в **інформатиці** для **аналізу алгоритмів**, при розгляді виконання алгоритмів, що застосовуються для дуже великих наборів вхідних даних.
- поведінка дуже великих **фізичних систем**.
- в **аналізі аварій**, коли встановлюється причина аварії за допомогою кількісного моделювання, з великим числом аварійних ситуацій в даний час і даному місці.

Найпростіший **приклад**, розгляд функції  $f(n)$ , при описі її властивостей, коли  $n$  стає занадто великим. Таким чином, якщо  $f(n) = n^2 + 3n$ , елемент  $3n$  стає незначним в порівнянні з  $n^2$ , при занадто великих  $n$ . Тоді кажуть, що функція  $f(n)$  є асимптотично еквівалентна  $n^2$  при  $n \rightarrow \infty$  й символічно записують як  $f(n) \sim n^2$ .

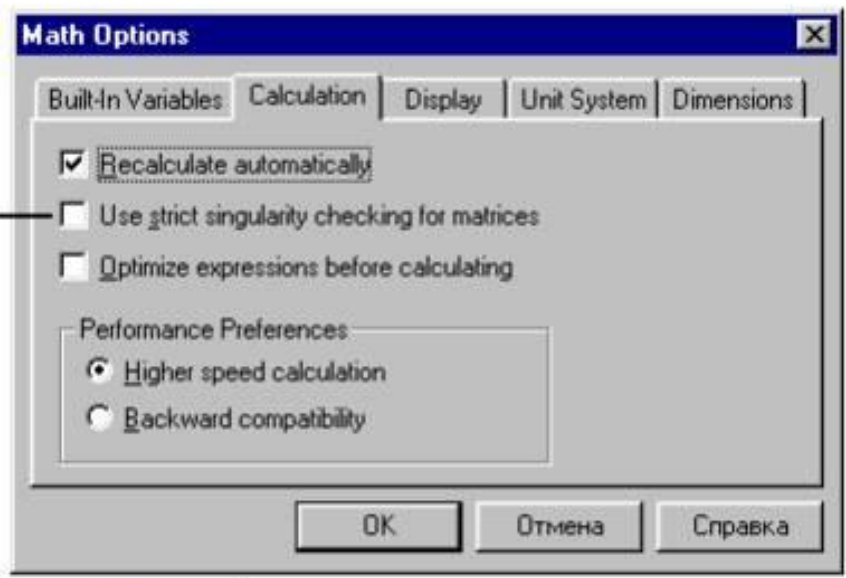


# Диференціювання узагальнено- оберненої матриці



# Прикладні програми з використанням об'єкту дослідження

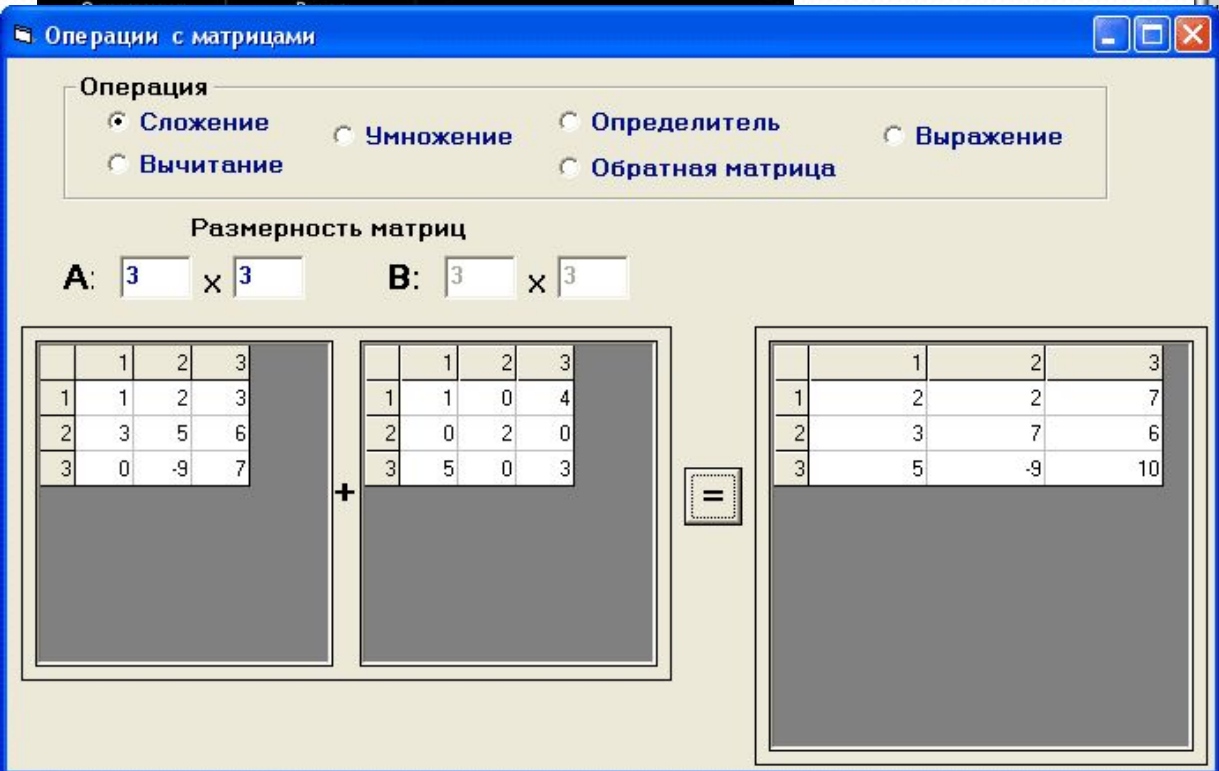
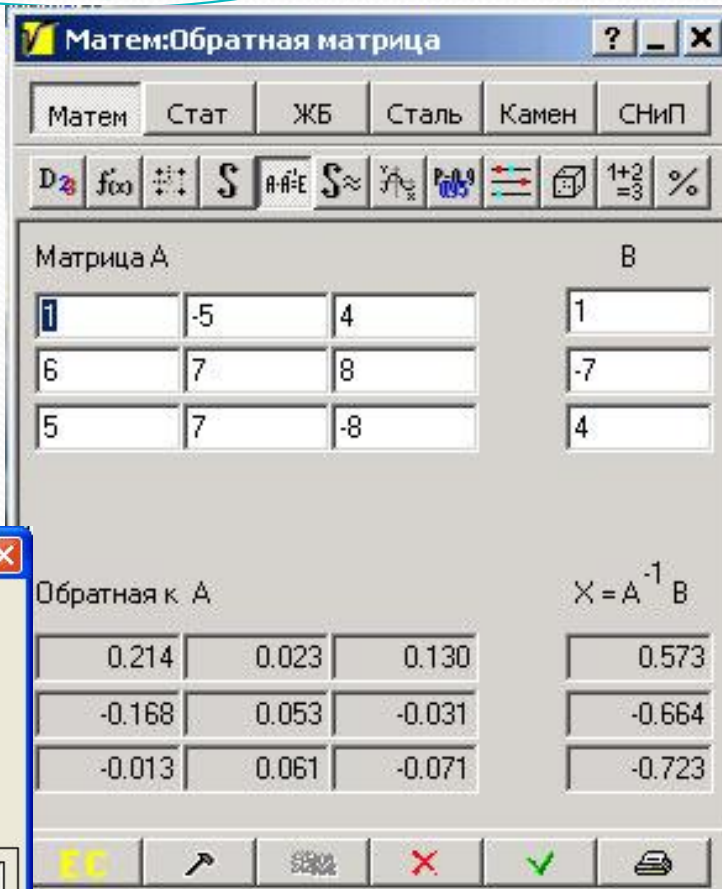
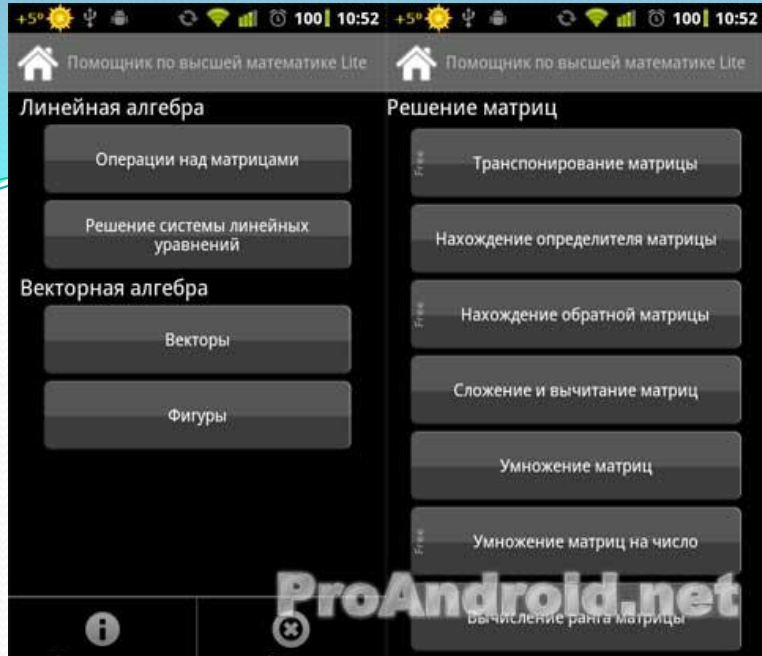
$$\begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3.152 \times 10^{15} & -6.304 \times 10^{15} & 3.152 \times 10^{15} \\ -6.304 \times 10^{15} & 1.261 \times 10^{16} & -6.304 \times 10^{15} \\ 3.152 \times 10^{15} & -6.304 \times 10^{15} & 3.152 \times 10^{15} \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}^{-1} = \dots$$

Matrix is singular.  
Cannot compute its inverse.





Обратная матрица'ь (3x3)

О программе

A		
1	1	1
2	2	3
4	5	6

Det = -1

A <sup>T</sup>		
-3	-1	1
0	2	-1
2	-1	0

A'		
-3	0	2
-1	2	-1
1	-1	0

A <sup>-1</sup>		
3	1	-1
0	-2	-2
1	1	0

4x4

Рассчитать

Тип данных

Дробные  Десятичные



# Висновки та пропозиції:

У процесі дослідження випускної роботи отримані наступні важливі результати, що стосуються дослідження питання про можливість виконання побудови узагальнено-оберненої матриці для звідно-оберненої та їх практичного застосування:

- Дано теоретичне обґрунтування поняття узагальнено-оберненої та псевдо-оберненої матриць, було досліджено їх властивості.
- Розкрито основні методи побудови псевдо-обернених матриць.
- Було показано можливість диференціювання узагальнено-оберненої матриці, яка залежить від параметра по параметру.
- В ході спектрального представлення матриць було реалізовано асимптотичний підхід до переносу граничних умов для систем звичайних диференціальних рівнянь.
- В результаті дослідження було обґрунтовано використання узагальнено-обернених матриць до обчислення інтегралів від функцій, які залежать від матриць.



Дякую за увагу!