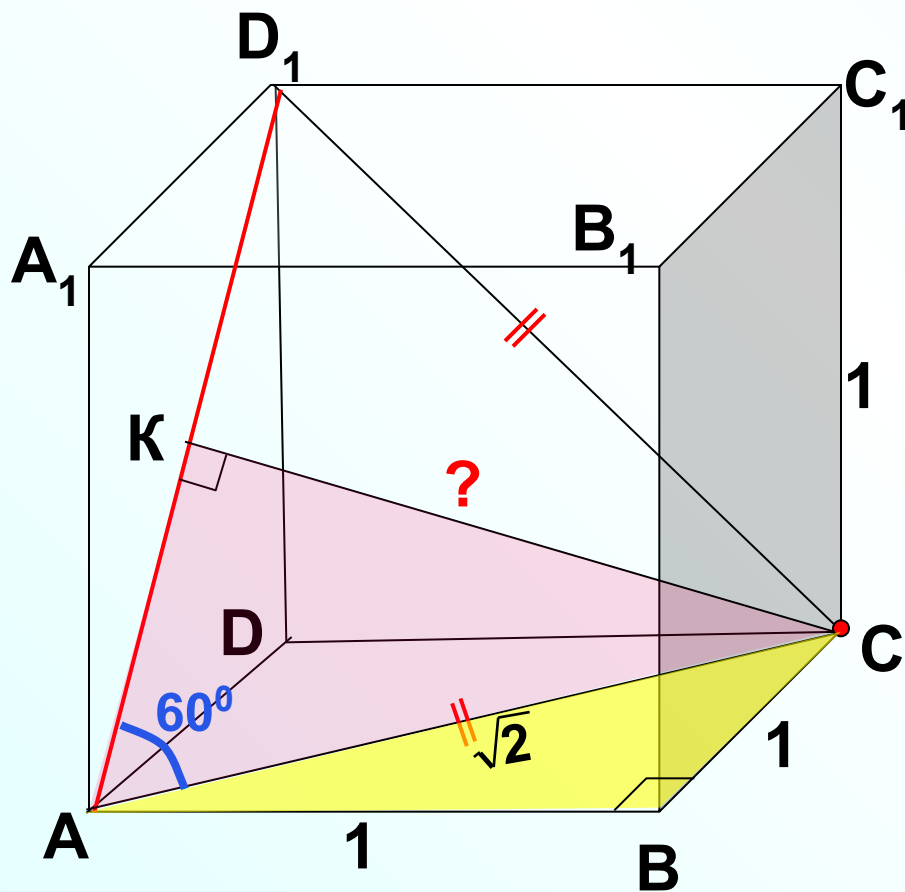


Подготовка к
ЕГЭ.

Решение задач
группы С2
(стереометрия)

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все ребра равны 1. Найдите расстояние от точки C до AD_1 .

Треугольник ACD_1 – равносторонний.



Из $\triangle ABC$:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2;$$

$$AC^2 = 1^2 + 1^2;$$

$$AC^2 = 2;$$

$$AC = \pm\sqrt{2};$$

$$AC = \sqrt{2}.$$

Из $\triangle CKA$

$$\sin 60^\circ = \frac{CK}{AC}$$

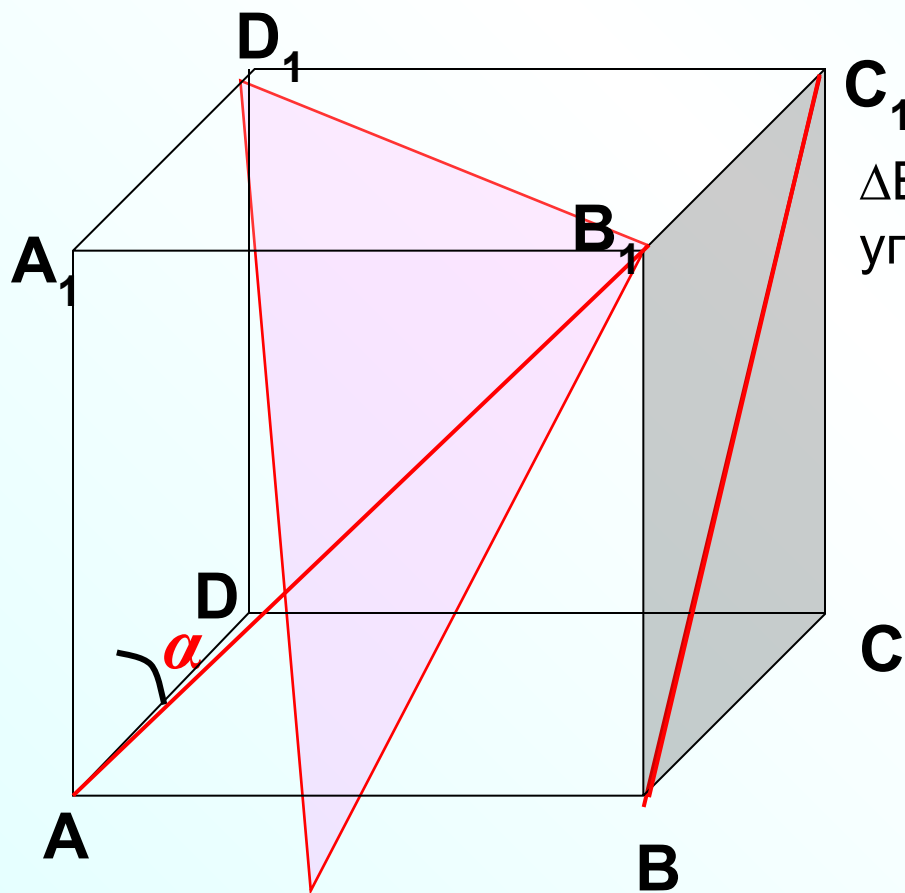
$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{CK}{\sqrt{2}}$$

$$CK = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все ребра равны 1. Найдите угол между прямыми AB_1 и BC_1 .

Заменим одну из заданных прямых BC_1 на параллельную прямую AD_1

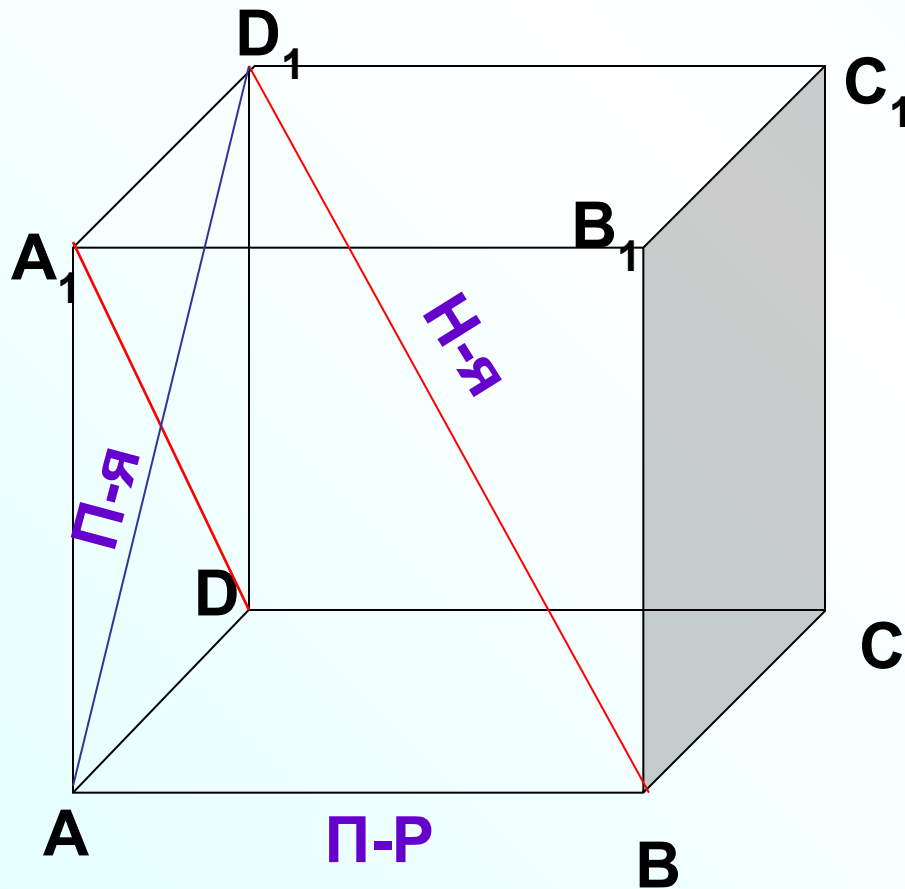
Угол между BC_1 и AB_1 равен углу между параллельной прямой AD_1 и AB_1 .



$\triangle B_1 A D_1$ - равносторонний и, значит, угол $B_1 A D_1$ равен 60° .

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все ребра равны 1. Найдите угол между прямыми DA_1 и BD_1 .

Рассмотрим ортогональную проекцию AD_1 прямой BD_1 на плоскость ADD_1 .

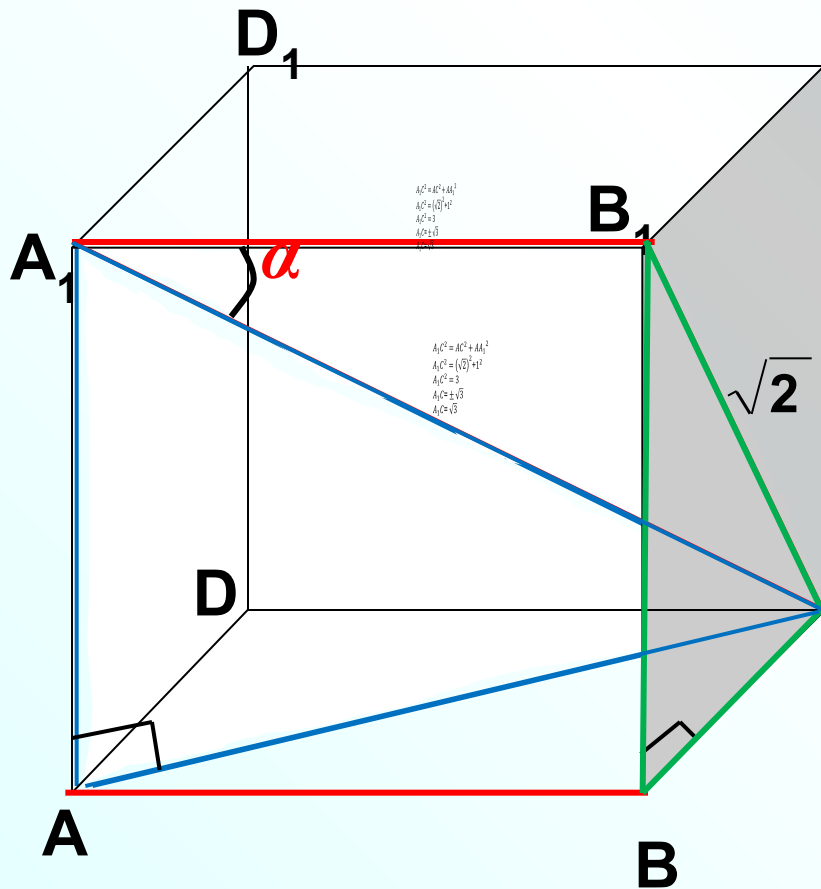


$$AD_1 \perp DA_1$$

$$AD_1 \perp DA_1 \stackrel{\text{ТТТ}}{\implies} DA_1 \perp BD_1$$

Искомый угол между прямыми DA_1 и BD_1 равен 90° .

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все ребра равны 1. Найдите косинус угла между прямыми AB и CA_1 .
 Заменяем одну из заданных прямых AB на параллельную прямую $B_1 A_1$.
 Угол между AB и CA_1 равен углу между прямой CA_1 и $A_1 B_1$.



Из $\triangle CB_1 B$:

$$B_1 C^2 = BB_1^2 + CB^2;$$

$$B_1 C^2 = 1^2 + 1^2;$$

$$B_1 C^2 = 2;$$

$$B_1 C = \pm \sqrt{2};$$

$$B_1 C = \sqrt{2}.$$

Из $\triangle A_1 A C$:

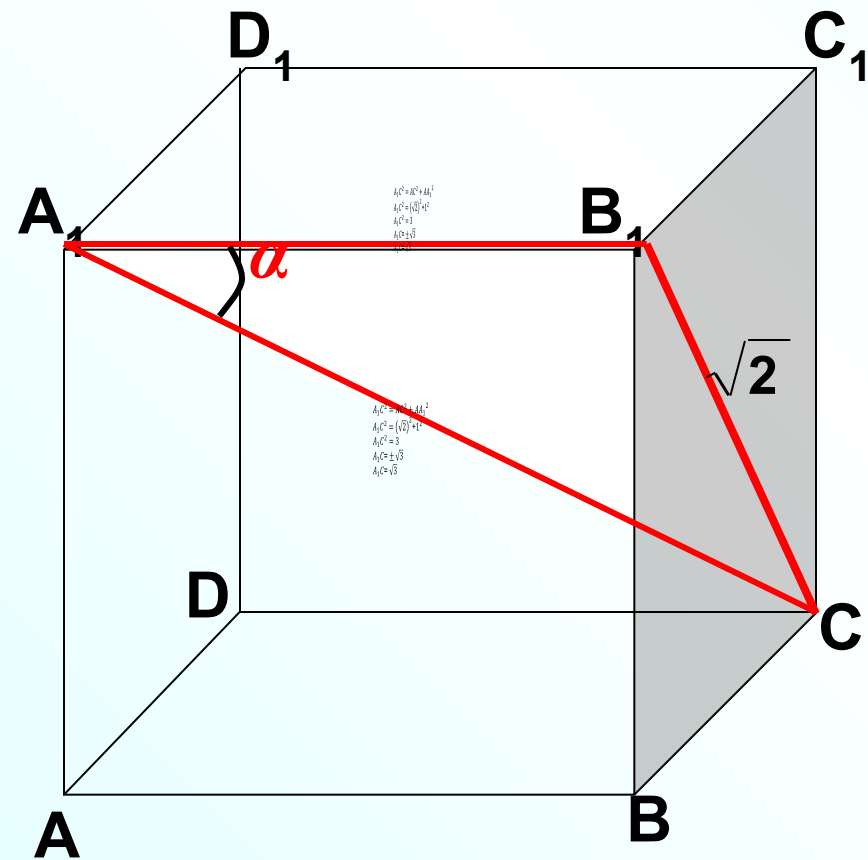
$$A_1 C^2 = AC^2 + AA_1^2$$

$$A_1 C^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2$$

$$A_1 C^2 = 3$$

$$A_1 C = \pm \sqrt{3}$$

$$A_1 C = \sqrt{3}$$



$$A_1C^2 = AC^2 + AA_1^2$$

$$A_1C^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2$$

$$A_1C^2 = 3$$

$$A_1C = \pm \sqrt{3}$$

$$A_1C = \sqrt{3} \quad !$$

Если вы получите отрицательное значение косинуса, - это говорит о том, что угол тупой. Вспомним, что в стереометрии углом между прямыми называют острый. Перейти к острому углу просто.

$$\cos \alpha = |m|$$

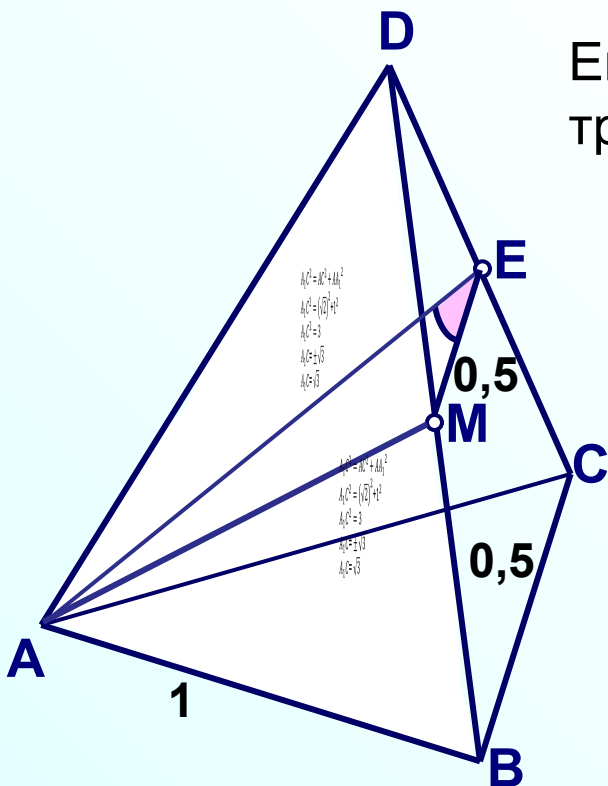
В правильном тетраэдре ABCD точка E – середина ребра CD. Найдите косинус угла между прямыми BC и AE.

Решение.

В $\triangle DBC$ проведем через точку E прямую $ME \parallel BC$
Точка M – середина ребра DB.

Угол AEM - искомый.

Его можно найти из равнобедренного треугольника MAE.



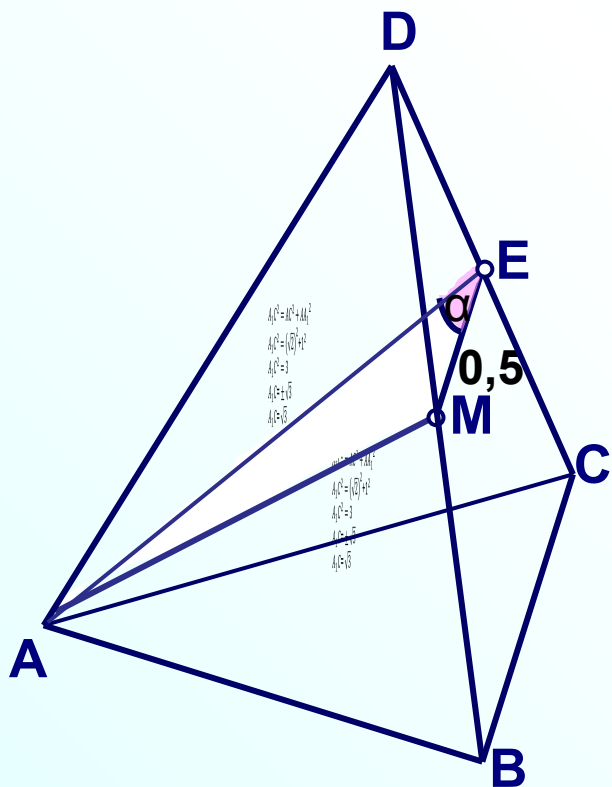
Из $\triangle ABD$:

$$\begin{aligned}
 A_1C^2 &= AC^2 + AA_1^2 \\
 A_1C^2 &= (\sqrt{2})^2 + 1^2 \\
 A_1C^2 &= 3 \\
 A_1C &= \pm\sqrt{3} \\
 A_1C &= \sqrt{3}
 \end{aligned}$$

Из $\triangle CBD$:

$$\begin{aligned}
 A_1C^2 &= AC^2 + AA_1^2 \\
 A_1C^2 &= (\sqrt{2})^2 + 1^2 \\
 A_1C^2 &= 3 \\
 A_1C &= \pm\sqrt{3} \\
 A_1C &= \sqrt{3}
 \end{aligned}$$

В правильном тетраэдре ABCD точка E – середина ребра CD. Найдите косинус угла между прямыми BC и AE.



$$A_1C^2 = AC^2 + AA_1^2$$

$$A_1C^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2$$

$$A_1C^2 = 3$$

$$A_1C = \pm\sqrt{3}$$

$$A_1C = \sqrt{3}$$

$$A_1C^2 = AC^2 + AA_1^2$$

$$A_1C^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2$$

$$A_1C^2 = 3$$

$$A_1C = \pm\sqrt{3}$$

$$A_1C = \sqrt{3}$$

$$A_1C^2 = AC^2 + AA_1^2$$

$$A_1C^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2$$

$$A_1C^2 = 3$$

$$A_1C = \pm\sqrt{3}$$

$$A_1C = \sqrt{3}$$

$$A_1C^2 = AC^2 + AA_1^2$$

$$A_1C^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2$$

$$A_1C^2 = 3$$

$$A_1C = \pm\sqrt{3}$$

$$A_1C = \sqrt{3}$$

$$A_1C^2 = AC^2 + AA_1^2$$

$$A_1C^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2$$

$$A_1C^2 = 3$$

$$A_1C = \pm\sqrt{3}$$

$$A_1C = \sqrt{3}$$

Решите самостоятельно

1. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, точка E – середина ребра SD .
Найдите тангенс угла между прямыми SB и AE .

Чертеж и подсказка

2. В правильной шестиугольной призме $A\dots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1 .

Чертеж и подсказка

1. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, точка E – середина ребра SD .
Найдите тангенс угла между прямыми SB и AE .

В $\triangle DBS$ проведем через точку E прямую $ME \parallel BS$
Угол AEM - искомый.

Из $\triangle SBD$:

$$\begin{aligned} A_1C^2 &= AC^2 + AA_1^2 \\ A_1C^2 &= (\sqrt{2})^2 + 1^2 \\ A_1C^2 &= 3 \\ A_1C &= \pm\sqrt{3} \\ A_1C &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

Из $\triangle ABD$:

$$\begin{aligned} A_1C^2 &= AC^2 + AA_1^2 \\ A_1C^2 &= (\sqrt{2})^2 + 1^2 \\ A_1C^2 &= 3 \\ A_1C &= \pm\sqrt{3} \\ A_1C &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

Из $\triangle ADS$:

$$\begin{aligned} A_1C^2 &= AC^2 + AA_1^2 \\ A_1C^2 &= (\sqrt{2})^2 + 1^2 \\ A_1C^2 &= 3 \\ A_1C &= \pm\sqrt{3} \\ A_1C &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

Из $\triangle AEM$:

$$\begin{aligned} A_1C^2 &= AC^2 + AA_1^2 \\ A_1C^2 &= (\sqrt{2})^2 + 1^2 \\ A_1C^2 &= 3 \\ A_1C &= \pm\sqrt{3} \\ A_1C &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

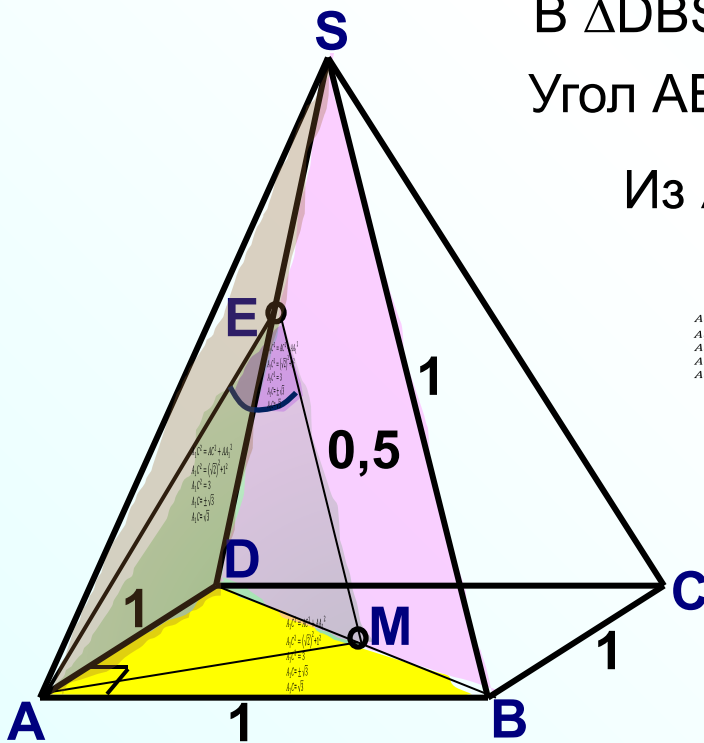
значит $\triangle AEM$ прямоугольный

$$\begin{aligned} A_1C^2 &= AC^2 + AA_1^2 \\ A_1C^2 &= (\sqrt{2})^2 + 1^2 \\ A_1C^2 &= 3 \\ A_1C &= \pm\sqrt{3} \\ A_1C &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_1C^2 &= AC^2 + AA_1^2 \\ A_1C^2 &= (\sqrt{2})^2 + 1^2 \\ A_1C^2 &= 3 \\ A_1C &= \pm\sqrt{3} \\ A_1C &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

Ответ:

$$\begin{aligned} A_1C^2 &= AC^2 + AA_1^2 \\ A_1C^2 &= (\sqrt{2})^2 + 1^2 \\ A_1C^2 &= 3 \\ A_1C &= \pm\sqrt{3} \\ A_1C &= \sqrt{3} \end{aligned}$$



2. В правильной шестиугольной призме $A\dots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1 .

