

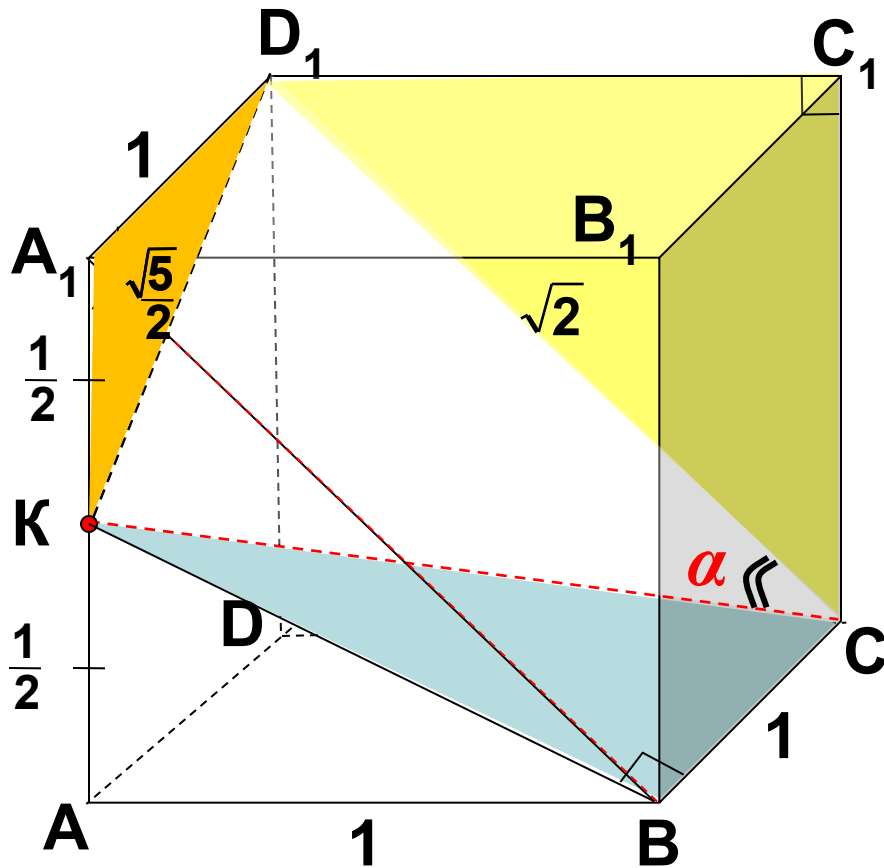
Муниципальное общеобразовательное учреждение
средняя общеобразовательная школа №3 г.Козьмодемьянска

**Метод координат при решении
стереометрических задач
урок геометрии, 11 класс**

Автор: Уртюкова Мая Андреевна,
учитель математики

Задача №1. Точка К – середина ребра AA_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.
Найдите угол между прямыми $A_1 B$ и CK .

1 способ



Из $\triangle KA_1 D_1$:

$$KD_1^2 = KA_1^2 + A_1 D_1^2;$$

$$KD_1^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2;$$

$$KD_1^2 = 1\frac{1}{4};$$

$$KD_1 = \pm\sqrt{\frac{5}{4}};$$

$$KD_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Из $\triangle CC_1 D_1$:

$$CD_1^2 = CC_1^2 + C_1 D_1^2;$$

$$CD_1^2 = 1^2 + 1^2;$$

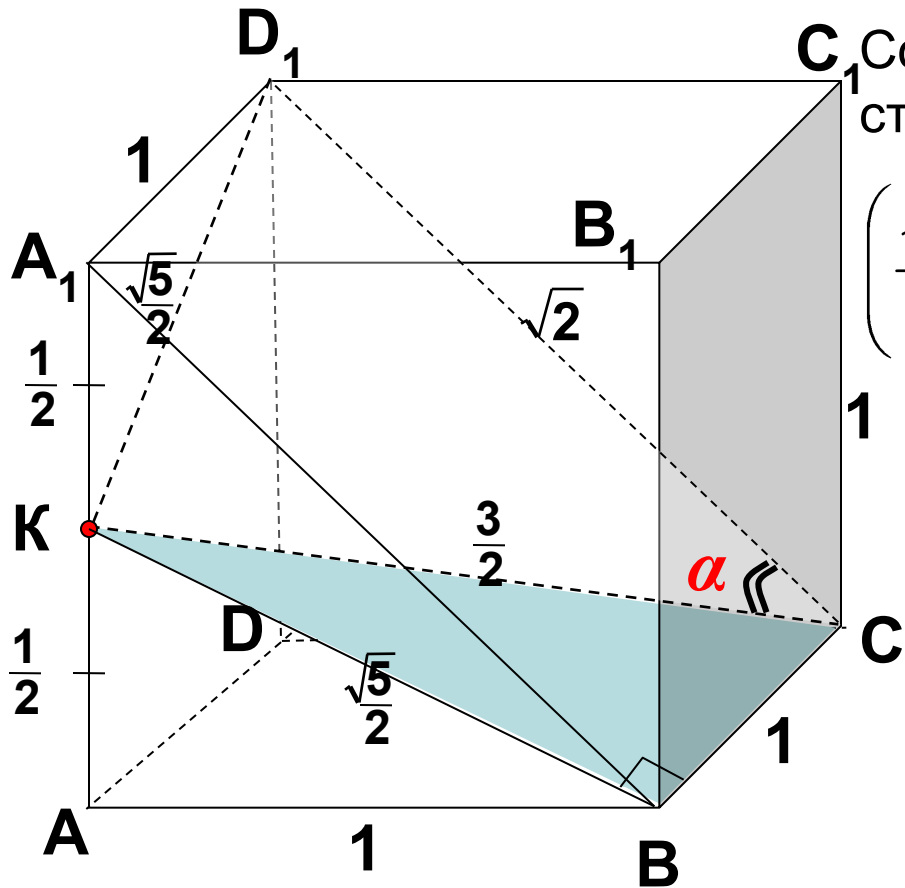
$$CD_1^2 = 2;$$

$$CD_1 = \pm\sqrt{2};$$

$$CD_1 = \sqrt{2}.$$

Точка К – середина ребра AA_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Найдите угол между прямыми $A_1 B$ и CK .

Из треугольника KBC $KC = \frac{3}{2}$



Составляем теорему косинусов для стороны KD_1 :

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + (\sqrt{2})^2 - 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \sqrt{2} \cos \alpha$$

$$3\sqrt{2} \cos \alpha = 3$$

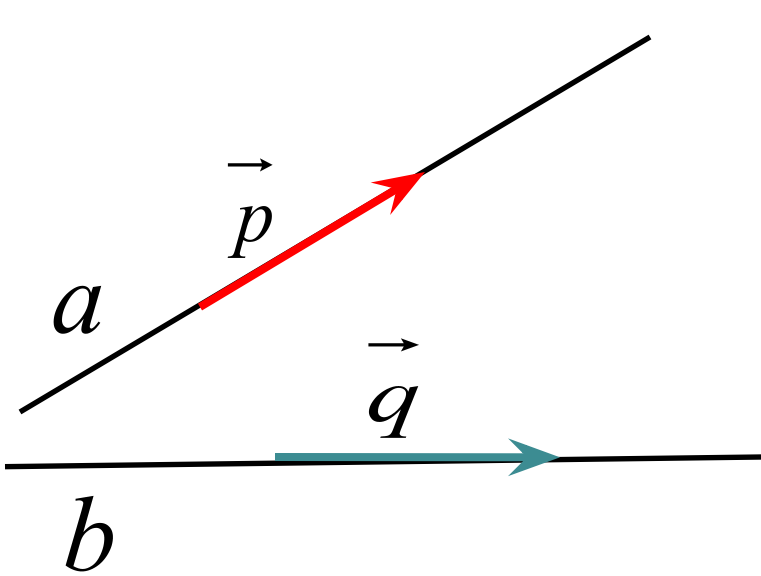
$$\cos \alpha = \frac{3}{3\sqrt{2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = 45^\circ$$



Угол между прямыми



\vec{p} - направляющий вектор прямой a

\vec{q} - направляющий вектор прямой b

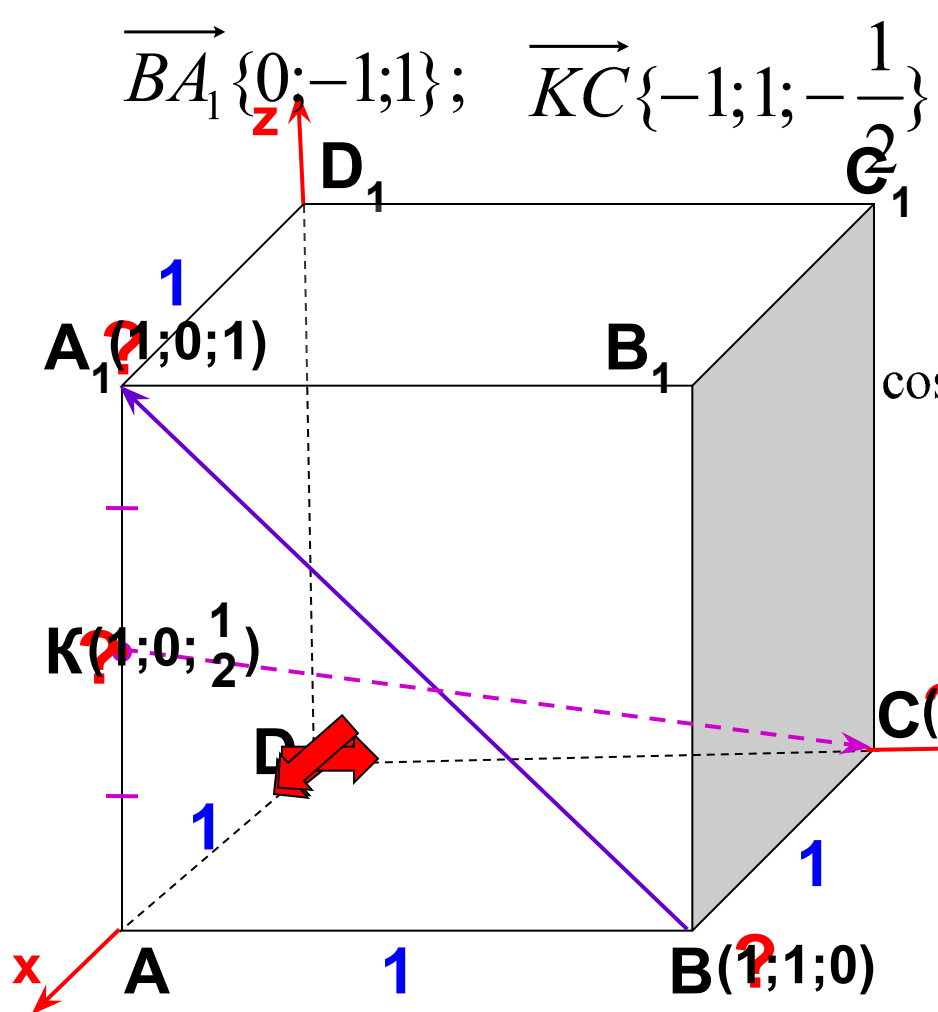
φ - угол между прямыми

$$\vec{p}\{x_1; y_1; z_1\} \quad \vec{q}\{x_2; y_2; z_2\}$$

$$\cos \varphi = \frac{|x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Задача №1. Точка К – середина ребра AA_1 единичного куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Найдите угол между прямыми $A_1 B$ и CK .

2 способ



$$\overrightarrow{BA_1} \{0; -1; 1\}; \quad \overrightarrow{KC} \left\{-1; 1; -\frac{1}{2}\right\} \quad \cos \varphi = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

$$\cos \varphi = \frac{\left|0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\right|}{\sqrt{0^2 + (-1)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2}}$$

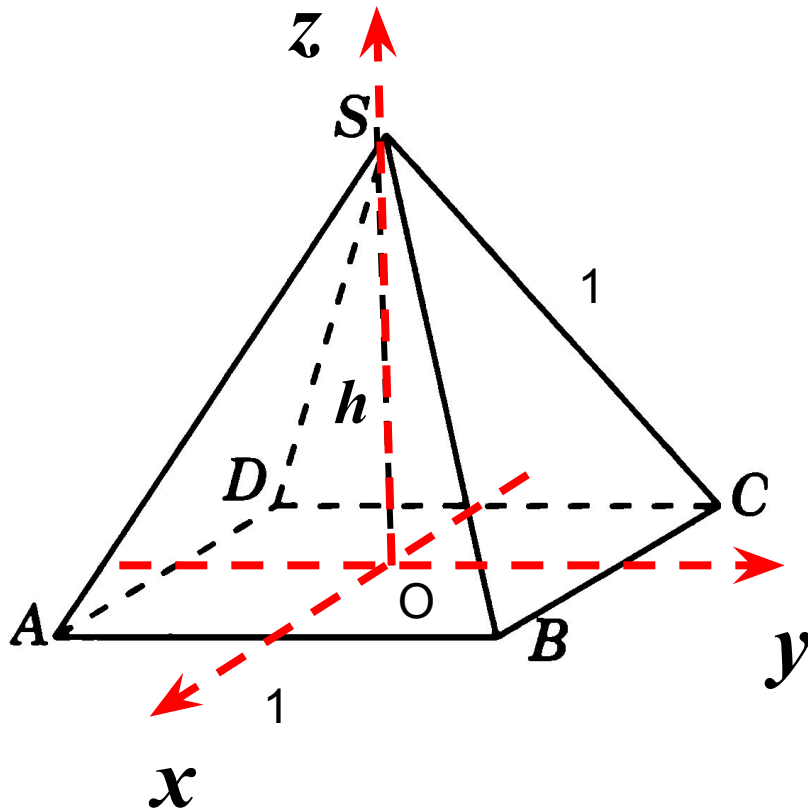
$$\cos \varphi = \frac{\left|-\frac{1}{2}\right|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2\frac{1}{4}}} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{9}{4}}} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{2} \cdot \frac{3}{2}}$$

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\varphi = 45^\circ$$

Правильная четырехугольная пирамида.

Найдите координаты вершин пирамиды



$$B(0,5; 0,5; 0)$$

$$C(-0,5; 0,5; 0)$$

$$D(-0,5; -0,5; 0)$$

$$A(0,5; -0,5; 0)$$

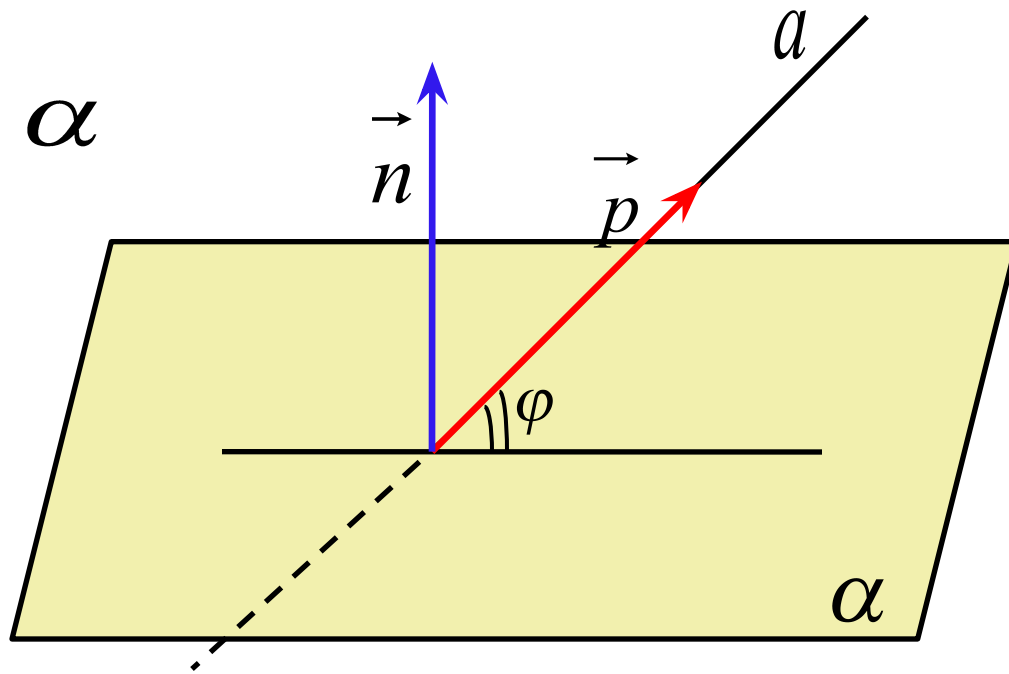
$$S(0; 0; h)$$

Угол между прямой и плоскостью

$\vec{p}\{x_1; y_1; z_1\}$ - направляющий вектор прямой

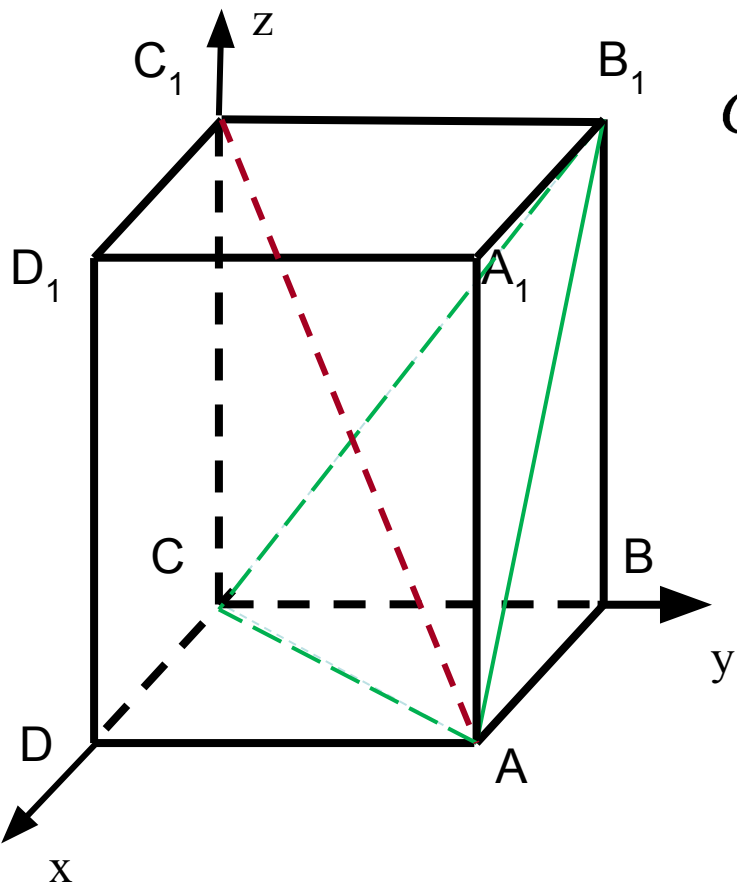
$\vec{n}\{x_2; y_2; z_2\}$ - нормальный вектор плоскости

$$\vec{n} \perp \alpha$$



$$\sin \varphi = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Задача 2. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ($AB = AD = 2, AA_1 = 1$). Найти угол между прямой AC_1 и плоскостью AB_1C .



$$C(0;0;0), \quad A(2;2;0) \quad C_1(0;0;1) \quad B_1(0;2;1)$$

$$x - y + 2z = 0 \quad \vec{n}\{1; -1; 2\}$$

$$\sin \angle \left(AC_1; (AB_1C) \right) = \left| \cos \angle \left(\overrightarrow{AC_1}; \vec{n} \right) \right| =$$

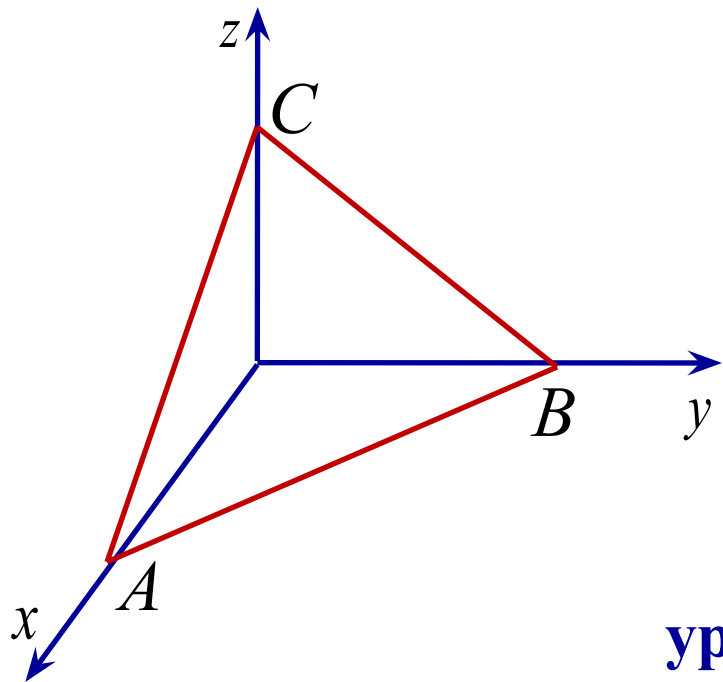
$$= \frac{|-2 + 2 + 2|}{\sqrt{4 + 4 + 1} \cdot \sqrt{1 + 1 + 4}} = \frac{\sqrt{6}}{9}$$

Ответ: $\arcsin \frac{\sqrt{6}}{9}$

Уравнение плоскости

$$ax + by + cz + d = 0$$

Если плоскость проходит через начало координат, то $d=0$

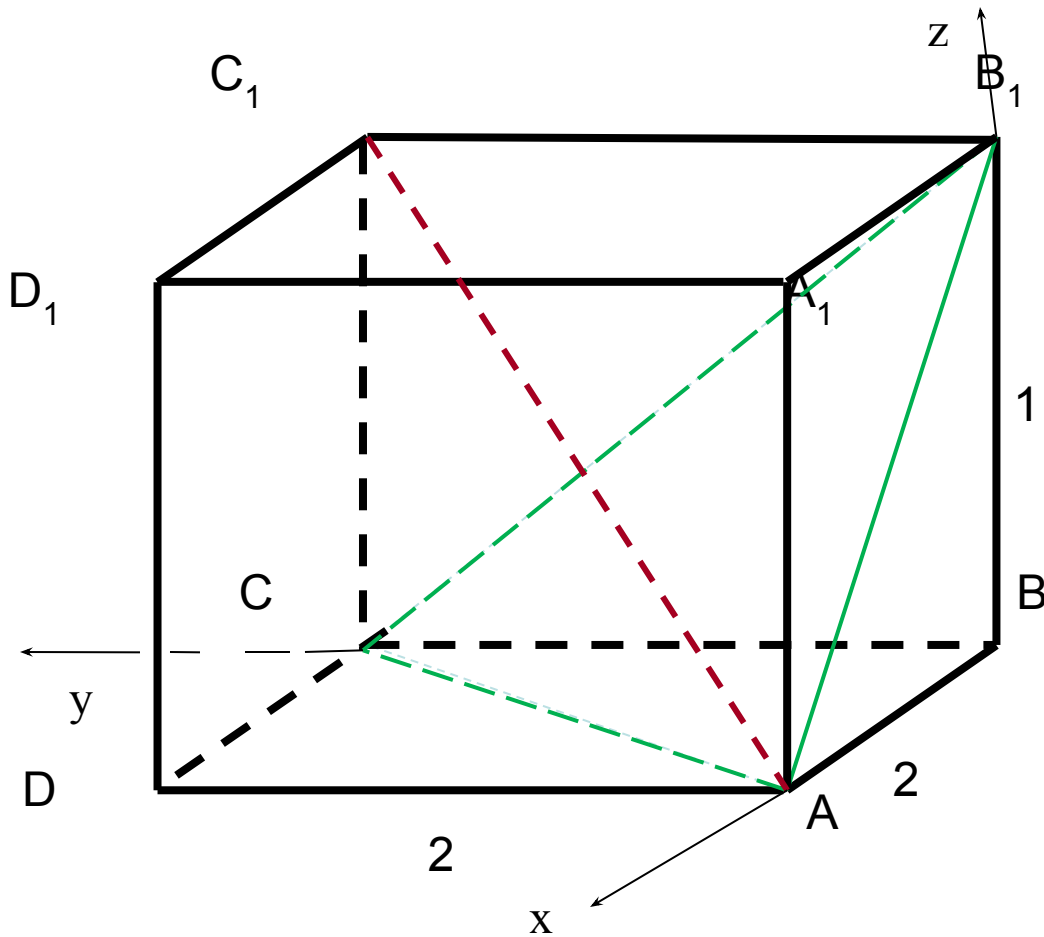


Если плоскость пересекает оси координат в точках A, B, C, то

$$\frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C} = 1$$

уравнение плоскости в отрезках

Задача №2. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ($AB = AD = 2, AA_1 = 1$). Найти угол между прямой AC_1 и плоскостью AB_1C .



Рассмотрим случай, когда точки A, B_1, C лежат на координатных осях.

Тогда уравнение плоскости AB_1C имеет вид:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{1} = 1$$

$$\vec{n} \{1; 1; 2\}$$

$$\vec{n} \perp (AB_1C)$$

$$\overrightarrow{AC_1} \{-2; 2; 1\}$$

$$\sin \varphi = \frac{|1 \cdot (-2) + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{9}} = \frac{\sqrt{6}}{9}$$

Угол между плоскостями

$$\alpha : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

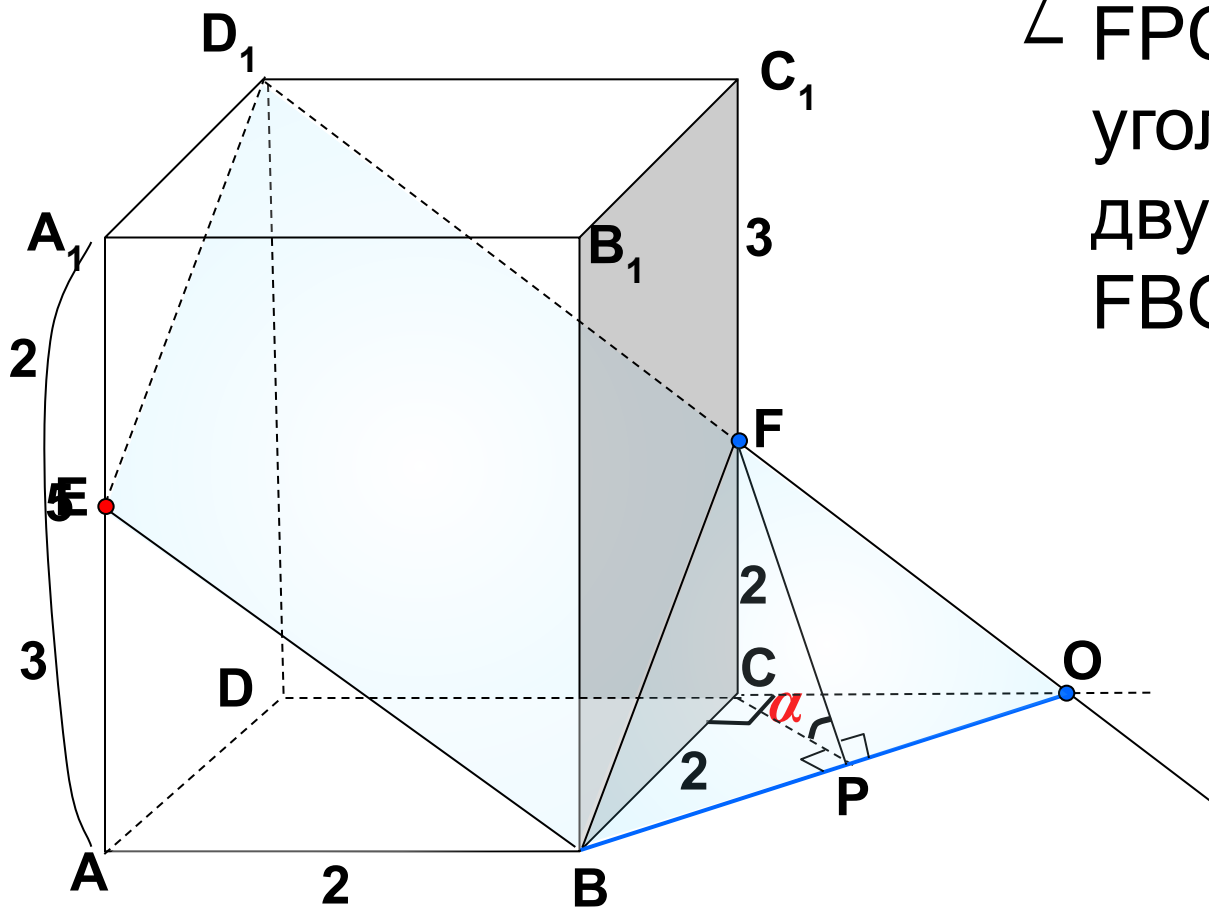
Вектор нормали плоскости α : $\vec{n}_1 \{a_1; b_1; c_1\}$

$$\beta : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

Вектор нормали плоскости β : $\vec{n}_2 \{a_2; b_2; c_2\}$

$$\cos \varphi = \frac{|a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

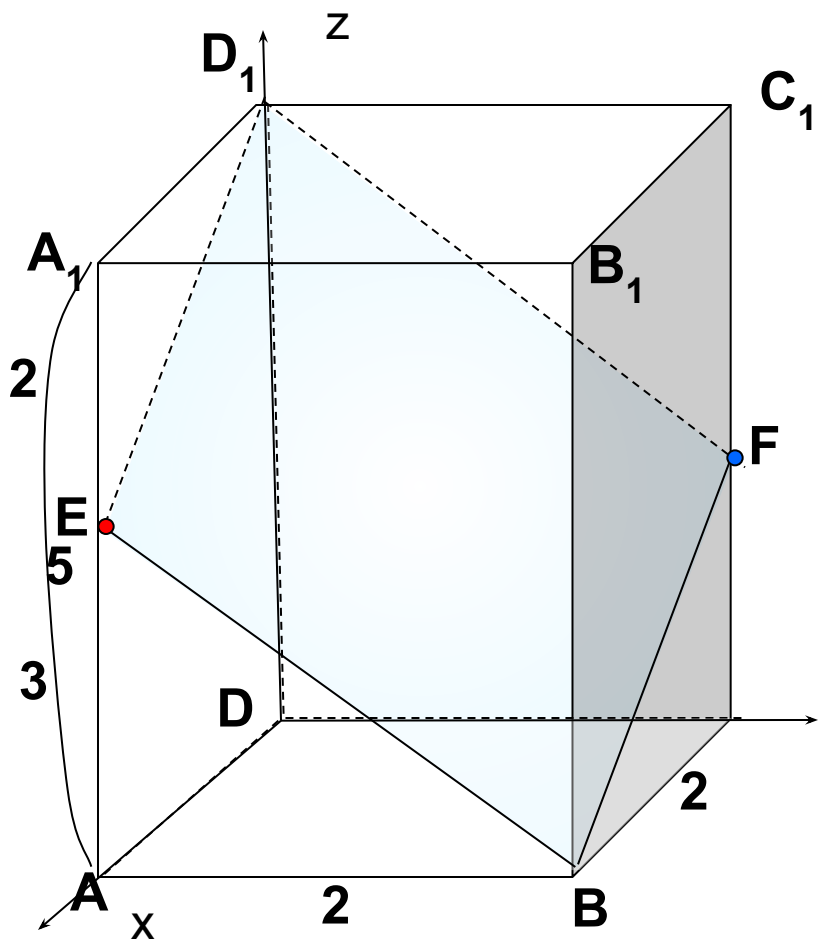
Задача №3. В правильной четырехугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ стороны основания равны 2, а боковые ребра равны 5. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE : EA_1 = 3 : 2$. Найдите угол между плоскостями ABC и $BE D_1$. (Обсудить нахождение линейного угла двугранного угла).



$\angle FPC$ – линейный
 угол
 двугранного угла
 $FBOC$

В правильной четырехугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ стороны основания равны 2, а боковые ребра равны 5. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE : EA_1 = 3 : 2$. Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1 .

2 способ.



$$\alpha : a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$$

Вектор нормали плоскости $\vec{n}_1 \{a_1; b_1; c_1\}$

Вектор нормали плоскости $\alpha :$ $\vec{n}_2 \{a_2; b_2; c_2\}$



$\beta :$

$$E(2;0;3), B(2;2;0), D_1(0;0;5), \overline{DD_1} \{0; 0; 5\},$$

$$\begin{cases} 2a+3c+d=0 & a=c \\ 5c+d=0 & d=-5c \\ 2a+2b+d=0 & b=1,5c \end{cases} \quad 2x+3y+2z-10=0$$

$$\vec{n} \perp (BED_1) \quad \vec{n} \{2;3;2\}$$

$$\cos \varphi = \frac{|0 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 5 \cdot 2|}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 5^2} \cdot \sqrt{2^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{2}{\sqrt{17}}$$

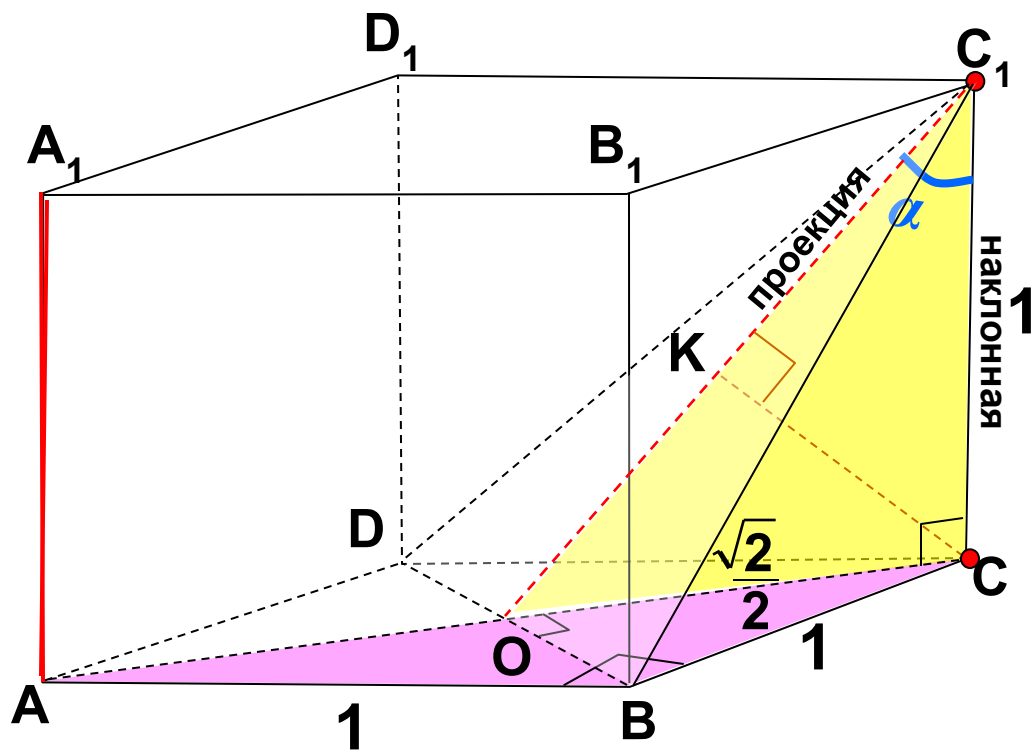
Самостоятельная работа. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите тангенс угла между прямой AA_1 и плоскостью $BC_1 D$.

1 вариант- используя определение прямой и плоскости

2 вариант- методом координат

1 способ решения. Прямая CC_1 является наклонной к плоскости $BC_1 D$. Найдем проекцию CC_1 на плоскость $BC_1 D$.

$$CC_1 \rightarrow C_1 K,$$



Для нахождения $tg\alpha$ более удобен ΔOCC_1 , а не ΔKCC_1 .

Из ΔABC :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2;$$

$$AC^2 = 1^2 + 1^2;$$

$$AC^2 = 2;$$

$$AC = \pm\sqrt{2};$$

$$AC = \sqrt{2}.$$

Из ΔOCC_1 :

$$tg\alpha = \frac{OC}{CC_1};$$

$$tg\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

Вывод: Координатный метод имеет преимущество перед другими способами тем, что основывается на применение формул, требует меньше стереометрических соображений.



Домашнее задание

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$
найдите угол между
плоскостями $A_1 C_1 D$ и $BC_1 D$

Использованные источники

- Геометрия, 10-11: учебник для общеобразовательных учреждений: базовый и профильный уровни / Л.С.Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – М.: Просвещение, 2007. – 256 с.
- <http://uslide.ru>
- <http://nsportal.ru>