Лекция 11. Основные положения электромагнитной теории Максвелла

Вопросы:

- Основные положения электромагнитной теории Максвелла. Вихревое электрическое поле
- Ток смещения. Закон полного тока
- Уравнения Максвелла в интегральной и дифференциальной формах
- Свойства уравнений Максвелла

Основные положения электромагнитной теории Максвелла. Вихревое электрическое поле

- Обобщение Дж. Максвеллом закона электромагнитной индукции

Как экспериментально установлено М. Фарадеем (в 1831 г.) любое изменение магнитного потока, пронизывающего замкнутый проводящий контур, приводит к возникновению в нем э.д.с. индукции и появлению индукционного тока, т.е.

$$E_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot\overrightarrow{ds} \qquad (1)$$

В частности, <u>в случае неподвижного контура и изменяющегося во времени (внешнего) магнитного поля ($\partial\vec{B}/\partial t$)</u> также возникает э.д.с. в контуре, которую можно трактовать как действие сторонних сил на носители тока. Эти сторонние силы не связаны ни с химическими, ни с тепловыми процессами в проводе, ни с движением контура и, соответственно, действием магнитной силы Лоренца.

<u>Остается заключить, что в этом случае индукционный ток обусловлен возникающим в контуре «особым» электрическим полем $\boldsymbol{E}_B$, названным Дж. Максвеллом *вихревым*.</u>

Основные положения электромагнитной теории Максвелла. Вихревое электрическое поле

Согласно определению э.д.с. $E_i = \oint_{\Gamma} \vec{E}_B \cdot \vec{dl}$, поэтому закон (1) можно записать в виде $\oint_{\Gamma} \vec{E}_B \cdot \vec{dl} = -\frac{d}{dt}\int_{s} \vec{B} \cdot \vec{ds}$, где дифференцирование по t и интегрирование по s можно поменять местами (так как контур и натянутая на него поверхность неподвижны). В итоге получаем:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E}_B \cdot \vec{dl} = -\int_{s} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{ds} \quad (2)$$

Здесь индукция ***B***, вообще говоря, зависит как от времени, так и от координат, поэтому используется частная производная $\partial \vec{B} / \partial t$.

Воспользовавшись теоремой Стокса (замена циркуляции $\boldsymbol{E}_B$ соответствующим поверхностным интегралом от ротора $\boldsymbol{E}_B$), преобразуем (2) к виду $\int_{s} (\nabla \times \vec{E}_B) \cdot \vec{ds} = -\int_{s} \partial \vec{B} / \partial t \cdot \vec{ds}.$ Так как выбор поверхности интегрирования S произвольный, то в каждой точке пространства должно выполняться равенство:

$$\nabla \times \vec{E}_B = -\partial \vec{B} / \partial t \quad (3)$$

Уравнение (3) также подчеркивает вихревой характер поля $\boldsymbol{E}_B$ в виду наличия ротора.

Основные положения электромагнитной теории Максвелла. Вихревое электрическое поле

Таким образом Дж. Максвелл предположил, что изменяющееся со временем магнитное поле (наличие $\partial\vec{B}/\partial t$). обусловливает появление в пространстве *вихревого электрического поля* $\boldsymbol{E}_B$ независимо от присутствия проволочного контура, наличие которого лишь позволяет обнаружить это поле по индикации индукционного тока.

Поле $\boldsymbol{E}_B$ существенно отличается от электростатического поля $\boldsymbol{E}_q$, порождаемого неподвижными зарядами q; поле $\boldsymbol{E}_q$ – потенциально, т.е. его силовые линии начинаются и заканчиваются на зарядах и для него всегда выполняются равенства:

ротор $\nabla\times\vec{E}_q = 0$, а дивергенция $\nabla\cdot\vec{E}_q = \rho/\varepsilon_0$

В общем случае электрическое поле может быть как потенциальным ($\boldsymbol{E}_q$), так и вихревым ($\boldsymbol{E}_B$), и, соответственно, можно записать $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_q + \boldsymbol{E}_B$, а уравнения (2) и (3) представить как:

$$\oint_\Gamma \vec{E}\cdot\overrightarrow{dl} = -\int_s \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\overrightarrow{ds} \qquad (4а), \qquad \nabla\times\vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t \qquad (4б)$$

Уравнение (4а) отражает интегральную форму, а уравнение (4б) – дифференциальную форму *1-го уравнения Максвелла*.

Основные положения электромагнитной теории Максвелла. Вихревое электрическое поле

Уравнения (4) определяют взаимосвязь между электрическим и магнитным полями, которая в свою очередь служит причиной того, что раздельное рассмотрение этих полей имеет лишь относительный смысл – относительно выбранной инерциальной системы отсчета, где соответствующие им электрические заряды неподвижны, а электрические токи стационарны. Относительно других движущихся систем отсчета следует уже рассматривать совокупность электрического и магнитного полей, образующих *единое электромагнитное поле*.

Другим положением электромагнитной теории явилось предположение Максвелла о том, что переменное во в времени электрическое поле (наличие $\partial\vec{E}/\partial t$), подобно электрическому току, создает в окружающем пространстве магнитное поле.

Докажем это положение на примере нестационарных процессов в электрических цепях.

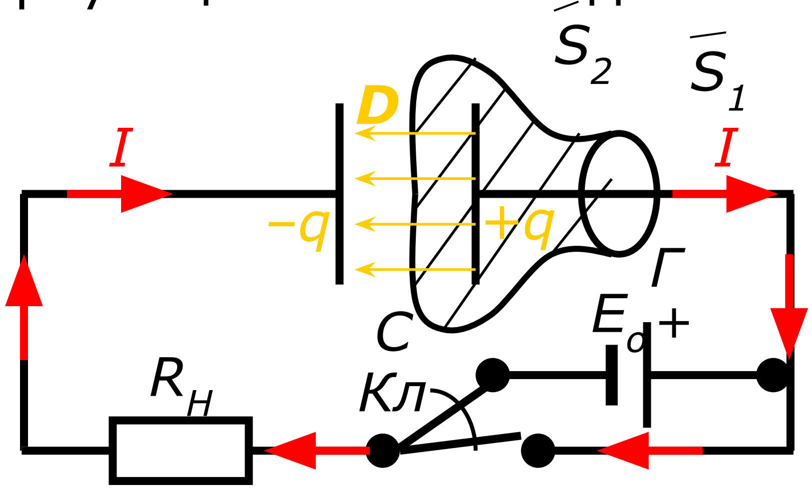
Ток смещения. Закон полного тока

Известно, что согласно теореме о циркуляции вектора напряженности магнитного поля ***H***:

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot \vec{dl} = \int_{S} \vec{j} \cdot \vec{ds} = I \qquad (5)$$

где I – ток в проводниках. Применим эту теорему для случая разрядки предварительно заряженного конденсатора, где в качестве контура интегрирования Γ выберем замкнутую кривую, охватывающую провод с током разрядки I.

На контур Γ можно «натянуть» две поверхности S_1 и S_2, которые имеют «равные права» в соответствии с теоремой о циркуляции. Однако через поверхность S_1 течет ток I и, следовательно, выполняется равенство (5), а через поверхность S_2 не течет никакого тока и циркуляция ***H*** равна 0, т.е. циркуляция зависит от выбора поверхности, которую мы «натягиваем» на контур Γ. Это противоречит теореме о циркуляции для случая постоянных полей (постоянного тока), но в данном случае ток разрядки сугубо переменный: $I = I_0 \cdot e^{-t/\tau}$



Ток смещения. Закон полного тока

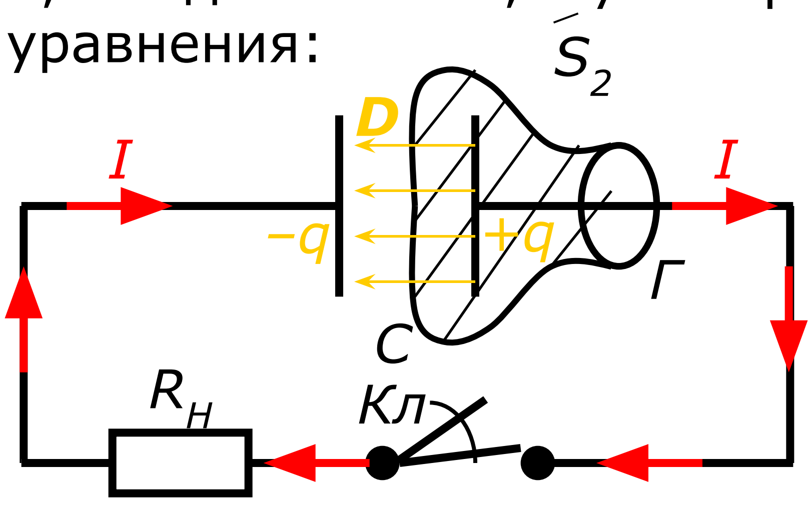
Дж. Максвелл предложил ввести дополнительное слагаемое в правую часть уравнения (5), которое он назвал *током смещения* $I_{см}$, и тогда в общем случае циркуляция вектора ***H***

$$\oint_{\Gamma} \vec{H}\cdot\vec{dl} = I + I_{см} \qquad (6)$$

Ток смещения $I_{см}$ должен зависеть от производной характеристики электрического поля по времени, т. е. от $\partial\vec{E}/\partial t$ (или $\partial\vec{D}/\partial t$).

Так как (см. рисунок) поверхность S_2 «пронизывает» только электрическое поле конденсатора, причем – переменное, поскольку оно определяется «мгновенным» зарядом $q(t)$ на обкладках, то по теореме Гаусса $\oint_{S} \vec{D}(t)\cdot\vec{ds} = q(t)$ и, следовательно, нужно рассмотреть производную от этого уравнения:

$$\oint_{s} \partial\vec{D}/\partial t\cdot\vec{ds} = dq/dt \qquad (7)$$



С другой стороны, согласно уравнению непрерывности:

$$\oint_{s} \vec{j}\cdot\vec{ds} = -dq/dt \qquad (8)$$

Ток смещения. Закон полного тока

Сложив отдельно левые и правые части уравнений (7) и (8), получаем:

$$\oint_S (\vec{j} + \partial\vec{D}/\partial t)\cdot\overrightarrow{ds} = 0 \quad (9)$$

Это уравнение аналогично уравнению непрерывности для постоянного тока; Максвелл, записав его в таком виде, определил <u>дополнительное слагаемое $\partial\vec{D}/\partial t = \vec{j}_{см}$ как *плотность тока смещения* с размерностью [А/м^2]</u>.

Сумму тока проводимости I и тока смещения $I_{см}$ называют *полным током* $I_{пол} = I + I_{см}$ или – для плотности тока: $\boldsymbol{j}_{пол} = \boldsymbol{j} + \boldsymbol{j}_{см} = \boldsymbol{j} + \partial\vec{D}/\partial t$.

Согласно уравнению (9) <u>линии полного тока $\boldsymbol{j}_{пол}$ являются непрерывными,</u> т.е. токи проводимости $\boldsymbol{j}$, если они не замкнуты (как в случае конденсатора), замыкаются токами смещения $\boldsymbol{j}_{см}$.

Т. об. теорему о циркуляции вектора $\boldsymbol{H}$ следует записывать в более общем виде (обобщение на переменные во времени токи и поля) – <u>в форме *закона полного тока*</u>:

$$\oint_\Gamma \vec{H}\cdot\overrightarrow{dl} = \oint_S (\vec{j} + \partial\vec{D}/\partial t)\cdot\overrightarrow{ds} \qquad (10)$$

Это уравнение также будем называть *2-ым уравнением Максвелла* (в интегральной форме).

Ток смещения. Закон полного тока

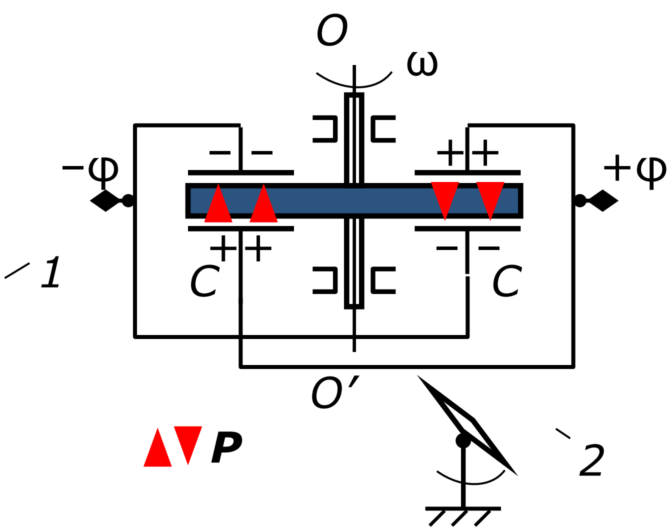
Дифференциальной формой закона полного тока является уравнение: $\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \partial \vec{D} / \partial t$ (11)

Т.е. ротор вектора ***H*** определяется плотностью тока проводимости ***j*** и плотностью тока смещения $\partial \vec{D} / \partial t$ в той же точке пространства, в котором действует электромагнитное поле.

Замечание. Теорема о циркуляции вектора ***H*** в форме (10) или (11) справедлива всегда, свидетельством чему является согласие ее с результатами многочисленных экспериментов.

Пример. Опыт русского физика А.А. Эйхенвальда по индикации поляризационного тока.

Волчок *1*, представляющий собой круглый диэлектрический диск, раскручивался вокруг вертикальной оси *OO′* с угловой скоростью ω.



При вращении он проходил через зазоры двух диаметрально расположенных плоских конденсаторов *C*, заряженных противоположно. Возникающая поляризованность диэлектрика ***P*** при вращении все время менялась по направлению, оставаясь параллельной оси *OO′*. В результате в диске возникал ток поляризации $\boldsymbol{j}_{плр} = \partial \vec{P} / \partial t$, который индицировался по отклонению магнитной стрелки компаса *2*.

Ток смещения. Закон полного тока

- О физической сущности тока смещения

Ток смещения $\boldsymbol{j}_{см}$ равнозначен току проводимости $\boldsymbol{j}$ только по способности создавать магнитное поле. В определенной степени термин «ток смещения» является чисто условным. По существу $\boldsymbol{j}_{см}$ – это изменяющееся во времени электрическое поле, т.е. $\partial \vec{D}/\partial t$. Иначе говоря, <u>токи смещения существуют лишь там, где изменяется со временем электрическое поле</u>.

Замечание. В диэлектриках ток смещения состоит из двух существенно различных слагаемых. Так как $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$, то $\boldsymbol{J}_{см} = \partial \vec{D}/\partial t = \varepsilon_0 \partial \vec{E}/\partial t + \partial \vec{P}/\partial t$, где $\varepsilon_0 \partial \vec{E}/\partial t$ - собственно плотность тока смещения, обусловленного изменением электрического поля; $\partial \vec{P}/\partial t$ - плотность тока поляризации, обусловленного перемещением связанных зарядов в ходе поляризации диэлектрика.

Выводы. «Открытие» (аналитический вывод) Дж. Максвеллом тока смещения, наряду с экспериментальным установлением М. Фарадеем закона электромагнитной индукции, сыграло огромную роль в построении общей теории электромагнитного поля. Ток смещения «уровнял» в правах электрическое и магнитное поля: из закона Фарадея следует, что изменяющееся магнитное поле порождает

Уравнения Максвелла в интегральной и дифференциальной формах

Основу макроскопической единой электромагнитной теории образуют фундаментальные уравнения электродинамики неподвижных сред (или коротко – уравнения Максвелла). Эти уравнения нельзя «вывести» из каких-либо законов, положений; они являются основными аксиомами, постулатами электродинамики, полученными путем обобщения огромного количества экспериментальных фактов.

- Система основных уравнений Максвелла и их толкование

№п/п	Интегральная форма	Дифференциальная форма	Толкование интегральной формы
1.	$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = -\int_{S} \partial \vec{B} / \partial t \cdot \overrightarrow{ds}$ **закон Фарадея** (циркуляция ***E*** по любому замкнутому контуру равна взятой с обратным знаком производной по времени от магнитного потока через поверхность, натянутую на контур)	$\nabla \times \vec{E} = -\partial \vec{B} / dt$ (ротор вектора ***E*** равен взятой с обратным знаком производной от индукции магнитного поля по времени)	Вихревое электрическое поле порождается переменным (нестационарным) магнитным полем.

Уравнения Максвелла в интегральной и дифференциальной формах

- Система основных уравнений Максвелла и их толкование

№п/п	Интегральная форма	Дифференциальная форма	Толкование интегральной формы
2.	$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot \vec{dl} = \int_{S} (\vec{j} + \partial \vec{D} / \partial t) \cdot \vec{ds}$ **закон полного тока** (циркуляция ***H*** по любому замкнутому контуру равна полному току, т.е. сумме токов проводимости и смещения, охваченных этим контуром)	$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \partial \vec{D} / dt$ (ротор вектора ***H*** равен сумме плотностей тока проводимости и тока смещения)	Вихревое магнитное поле порождается токами проводимости и переменным электрическим полем.
3.	$\oint_{S} \vec{D} \cdot \vec{ds} = \int_{V} \rho \cdot dV$ **теорема Гаусса для вектора *D*** (поток вектора ***D*** через любую замкнутую поверхность равен алгебраической сумме свободных сторонниз зарядов, охватываемых этой поверхностью)	$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$ (дивергенция вектора ***D*** равна объемной плотности сторонних зарядов)	Потенциальное электрическое поле порождается электрическими зарядами.

Уравнения Максвелла в интегральной и дифференциальной формах

- Система основных уравнений Максвелла и их толкование

№п/п	Интегральная форма	Дифференциальная форма	Толкование интегральной формы
4.	$\oint_S \vec{B} \cdot \vec{ds} = 0$ **теорема Гаусса для вектора *B*** (поток вектора ***B*** через любую замкнутую поверхность всегда равен нулю)	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$ (дивергенция вектора ***B*** всегда равна нулю)	Магнитное поле имеет чисто вихревой характер и не имеет сосредоточенных зарядов как источников поля.

Дополнительными уравнениями к системе основных уравнений Максвелла являются *материальные уравнения*, определяющие индивидуальные свойства среды, в которой существует электромагнитное поле:

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot \boldsymbol{E}; \qquad \boldsymbol{B} = \mu \cdot \mu_0 \cdot \boldsymbol{H}; \qquad \boldsymbol{j} = \sigma(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}^*) \qquad (12)$$

где ε и μ – диэлектрическая и магнитная проницаемости, а σ– электропроводность среды; $\boldsymbol{E}^*$- поле сторонних сил (не э/м).

Допущение. Рассматриваются изотропные линейные среды, не содержащие сегнетоэлектриков и ферромагнетиков.

Свойства уравнений Максвелла

Предварительно сформулируем условия выполнения уравнений Максвелла:

1) эти уравнения макроскопические, т.е. они описывают все электромагнитные явления, в которых не проявляются квантовые эффекты (иначе говоря, на расстояниях больше среднеатомных ~ 10^{-10}м);

2) эти уравнения записаны для достаточно слабых полей, сравнительно медленно изменяющихся в пространстве и во времени, они неприменимы при больших частотах изменения э/м полей, когда становятся существенными квантовые явления;

3) эти уравнения выполняются в среде, для которой энергия э/м поля не превышает энергии теплового (хаотического) движения микрочастиц.

- *Уравнения Максвелла – линейны.* Они содержат только первые производные от характеристик полей ***E*** и ***B*** и первые степени плотностей электрических зарядов ρ и токов ***j***.

Со свойством линейности непосредственно связан *принцип суперпозиции*: если два каких-либо поля независимо удовлетворяют уравнениям Максвелла, то это относится и к их сумме.

Свойства уравнений Максвелла

- *Уравнения Максвелла – в определенной степени симметричны.* Их полная симметричность исключена тем , что в природе существуют электрические заряды, как источники потенциального электрического поля, и отсутствуют аналогичные «магнитные» заряды, также производные $\partial \vec{B}/\partial t$ и $\partial \vec{D}/\partial t$ имеют противоположные знаки в соответствующих уравнениях и образуют левовинтовую (с вихревым ***E***-полем) и правовинтовую (с вихревым ***H***-полем) системы.
- *Уравнения Максвелла – релятивистки инвариантны* (относительно преобразований Лоренца). Вид уравнений не меняется при переходе от одной инерциальной системы отсчета *K* к другой системе *K′*, движущейся со скоростью v относительно первой вдоль общей оси 0x. Однако входящие в уравнения величины (***E***, ***B*** и др.) преобразуются по определенным правилам (согласно преобразованиям Лоренца). Так в проекциях на оси xyz имеем:

$$E'_x = E_x, \quad B'_x = B_x; \quad E'_y = \frac{E_y - v\cdot B_z}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad B'_y = \frac{B_y + v\cdot E_z/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}};$$

$$E'_z = \frac{E_z + v\cdot B_y}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad B'_z = \frac{B_z - v\cdot E_y/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \text{где} \quad \beta = \mathrm{v}/c \qquad (13)$$

Заключение

Уравнения Максвелла играют в электродинамике такую же роль, как законы Ньютона в классической механике или Начала в термодинамике.

Уравнения Максвелла, образуя замкнутую самосогласованную систему, позволяют по известным распределениям в пространстве электрических зарядов и токов получить (рассчитать) основные характеристики электромагнитного поля (***E***, ***D***, ***B***, ***H***) в каждой точке пространства в любой момент времени.