Тема: "Предмет стереометрии. Аксиомы стереометрии."

- Что такое геометрия?

Геометрия – наука о свойствах геометрических фигур

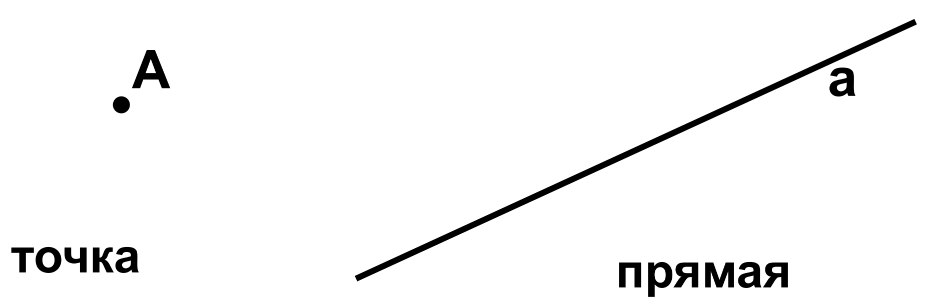
«Геометрия» - (греч.) – «землемерие»

- Что такое планиметрия?

Планиметрия – раздел геометрии, в котором изучаются свойства фигур на плоскости.

- Основные понятия планиметрии?

Основные понятия планиметрии:



Стереометрия

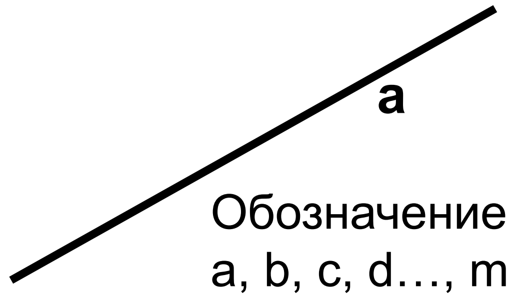
- раздел геометрии, в котором изучаются свойства фигур в пространстве

Основные фигуры в пространстве:

точка

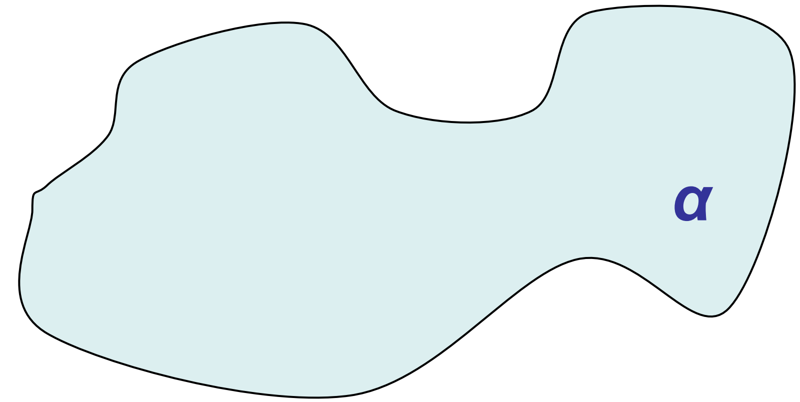
Обозначение: A; B; C; …; M;…

прямая

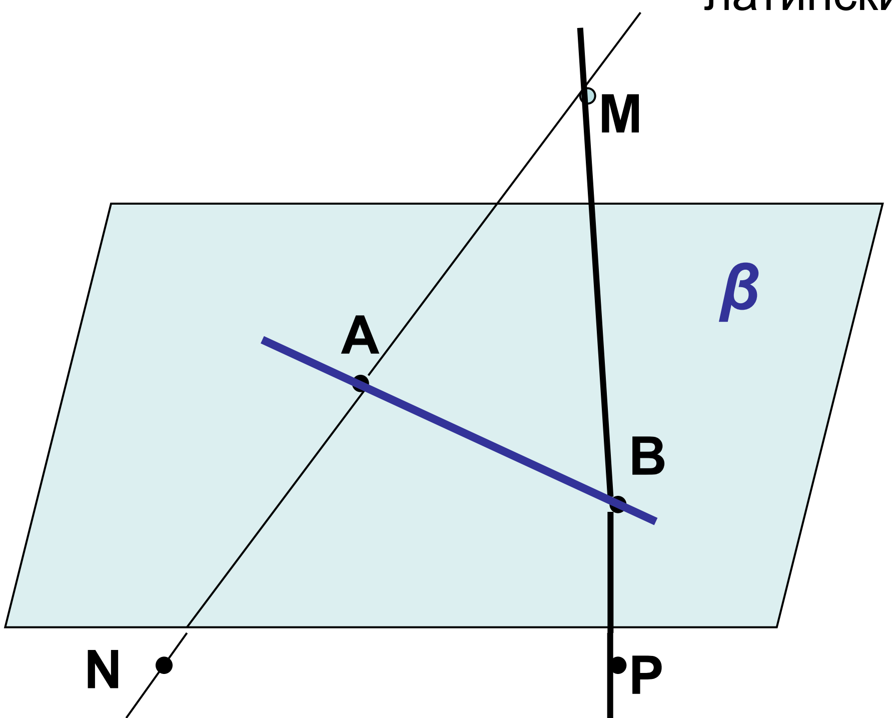


Обозначение: a, b, c, d…, m, n,…(или двумя заглавными латинскими)

плоскость



Обозначение: α, β, γ…

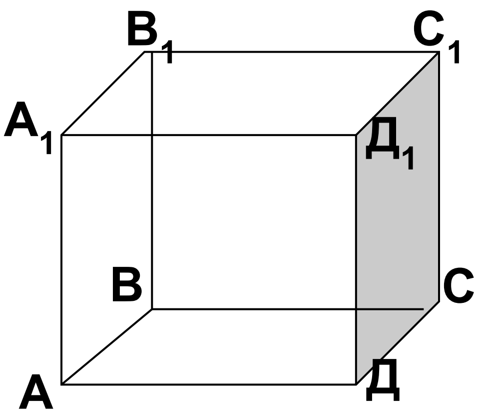


Ответьте на вопросы по рисунку:

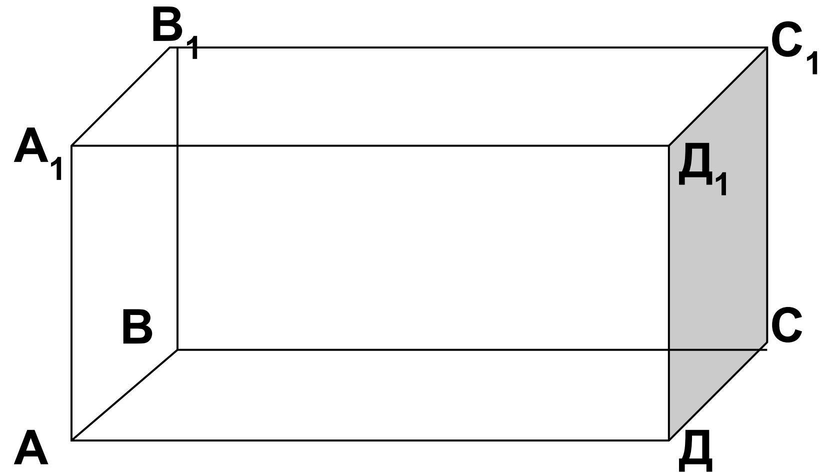
1. Назовите точки, лежащие в плоскости β; не лежащие в плоскости β.

2. Назовите прямые, лежащие в плоскости β; не лежащие в плоскости β

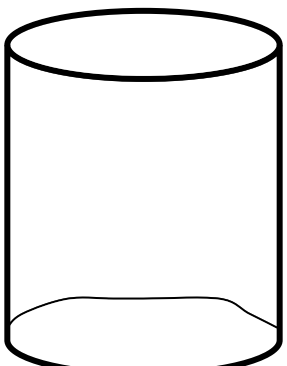
Некоторые геометрические тела.



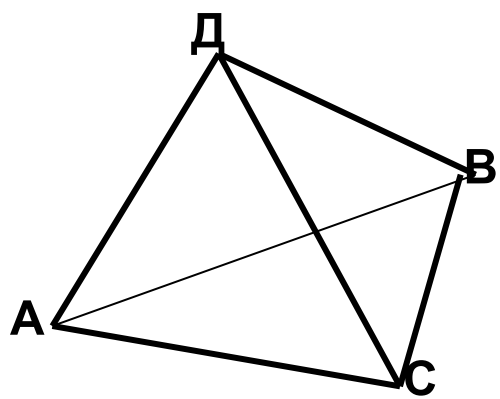
куб



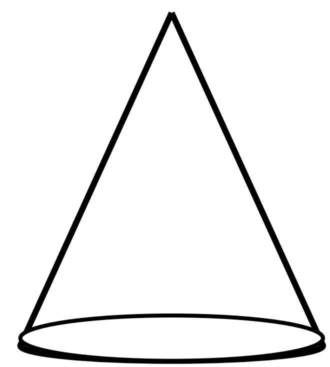
параллелепипед



цилиндр

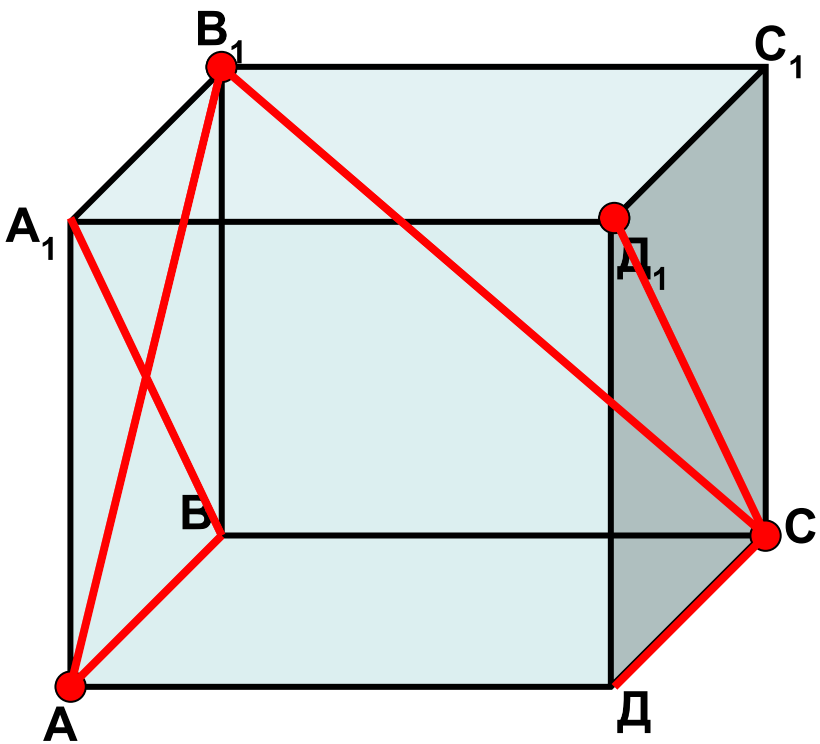


тетраэдр



конус

Практическая работа.



1. *Изобразите* в тетради куб (видимые линии – сплошной линией, невидимые – пунктиром).

2. *Обозначьте* вершины куба заглавными буквами $АВСДА_1В_1С_1Д_1$

3. *Выделите* цветным карандашом:

-вершины А, С, $В_1$, $Д_1$

-отрезки АВ, СД, $В_1С$, $Д_1С$

-диагонали квадрата $АА_1В_1В$

- Что такое аксиома?

Аксиома – это утверждение о свойствах геометрических фигур, принимается в качестве исходных положений, на основе которых доказываются далее теоремы и вообще строится вся геометрия.

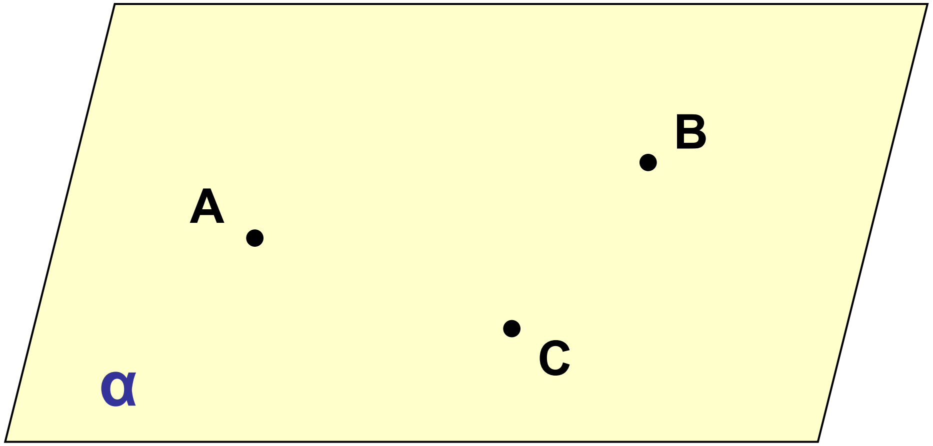
Аксиомы планиметрии:

- через любые две точки можно провести прямую и притом только одну.

-из трех точек прямой одна, и только одна, лежит между двумя другими.

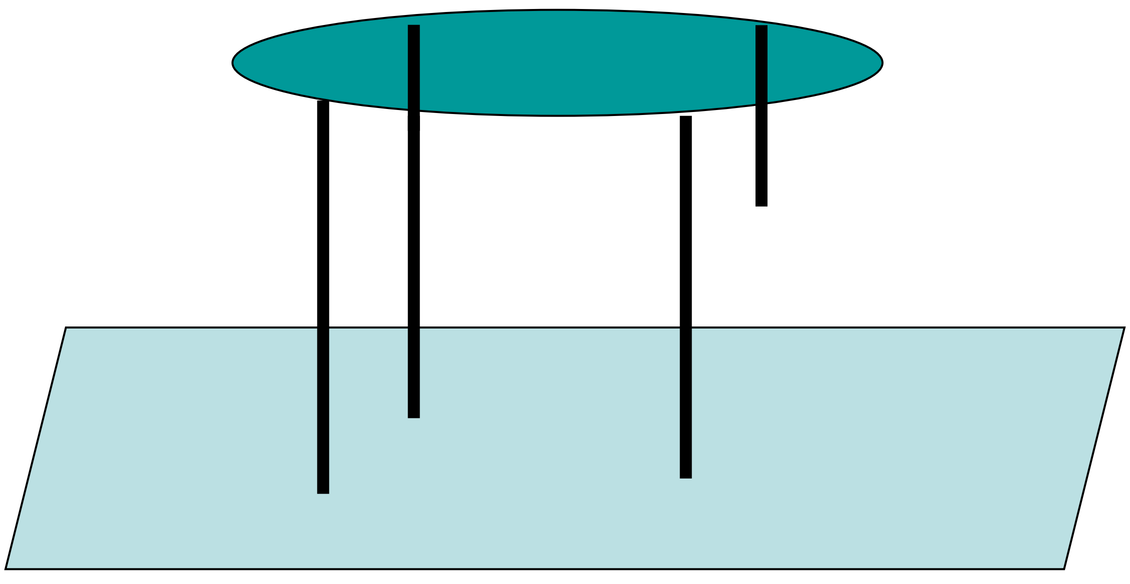
-имеются по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой…

Аксиомы стереометрии.

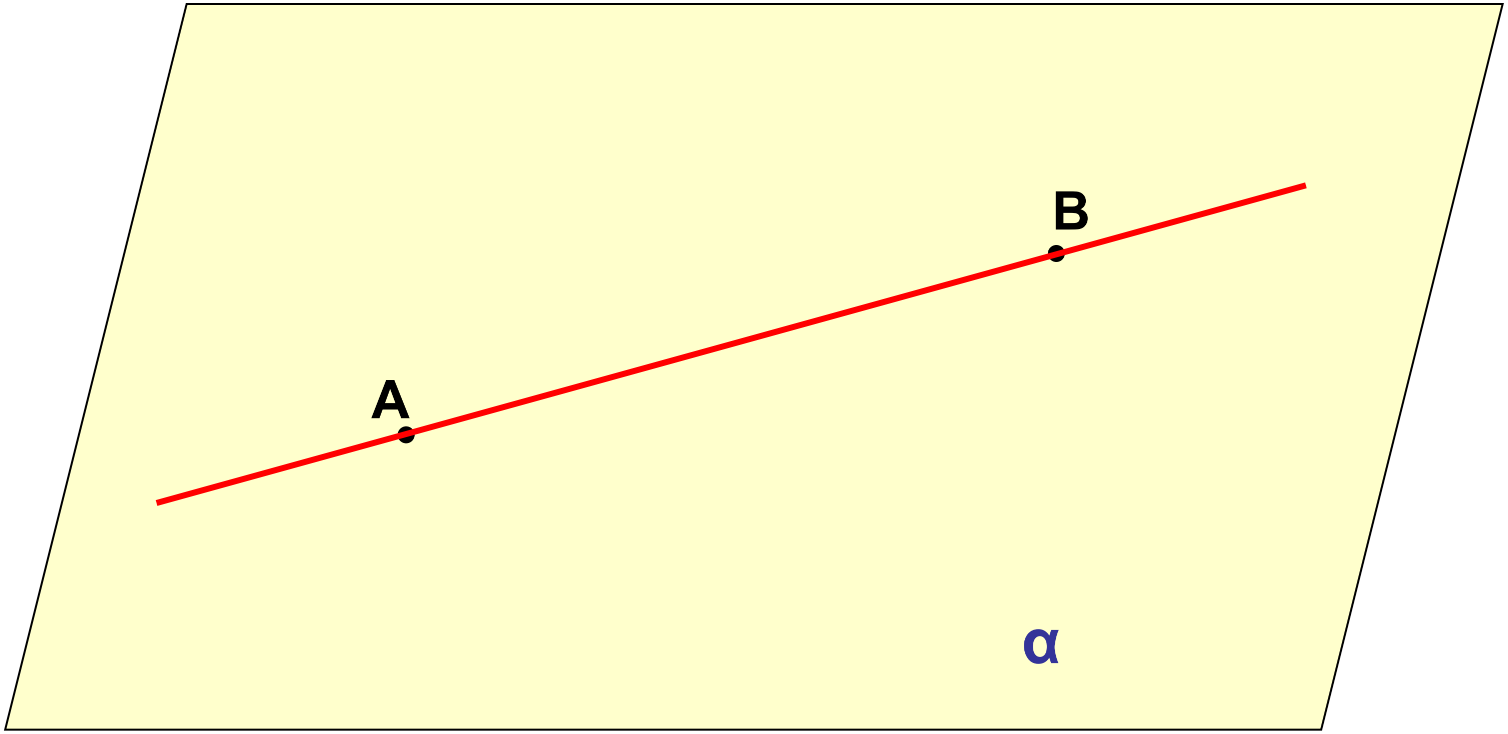


A1. ***Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость и притом только одна.***

Если ножки стола не одинаковы по длине, то стол стоит на трех ножках, т.е. опирается на три «точки», а конец четвертой ножки (четвертая точка) не лежит в плоскости пола, а висит в воздухе.



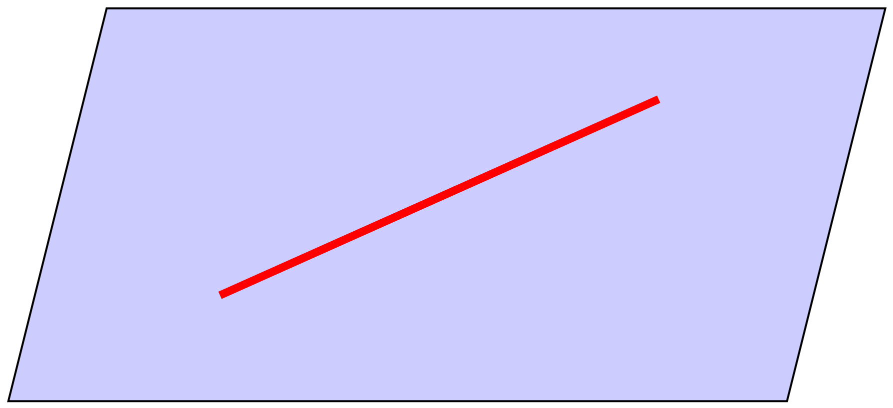
Аксиомы стереометрии.



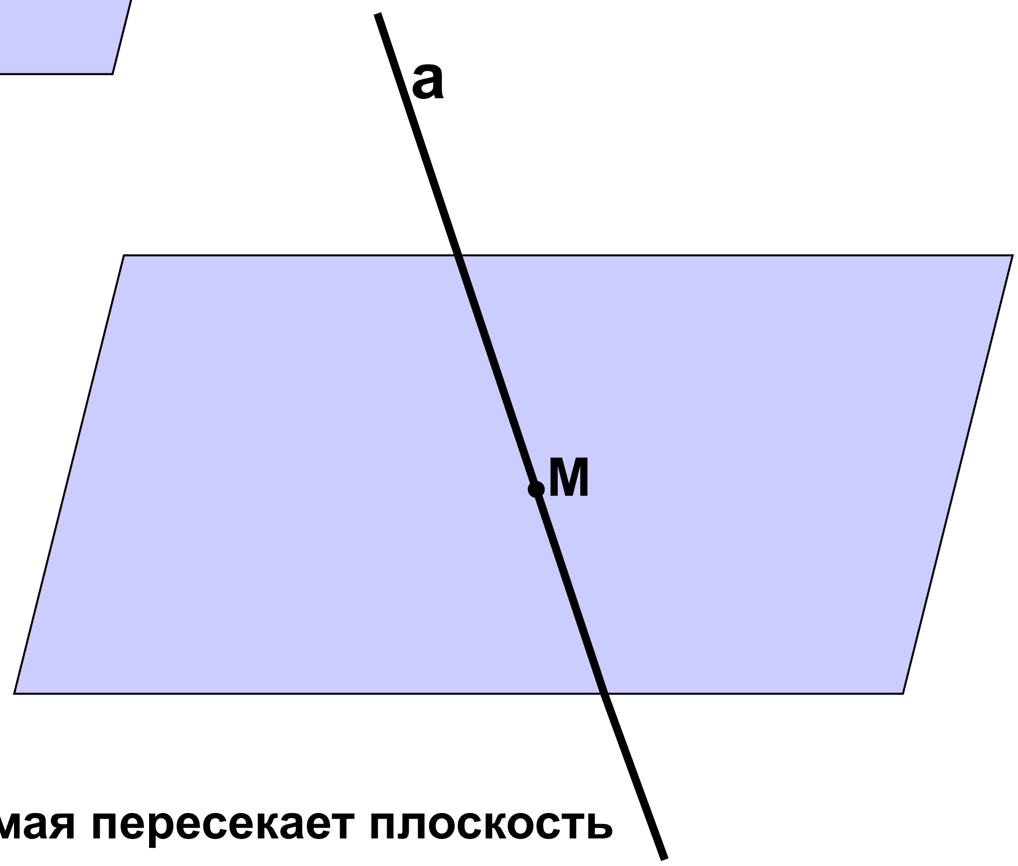
А2. **Если две точки прямой лежат в плоскости, то и все точки этой прямой лежат в этой плоскости.**

Говорят: **прямая лежит в плоскости** или **плоскость проходит через прямую.**

Сколько общих точек имеют прямая и плоскость?

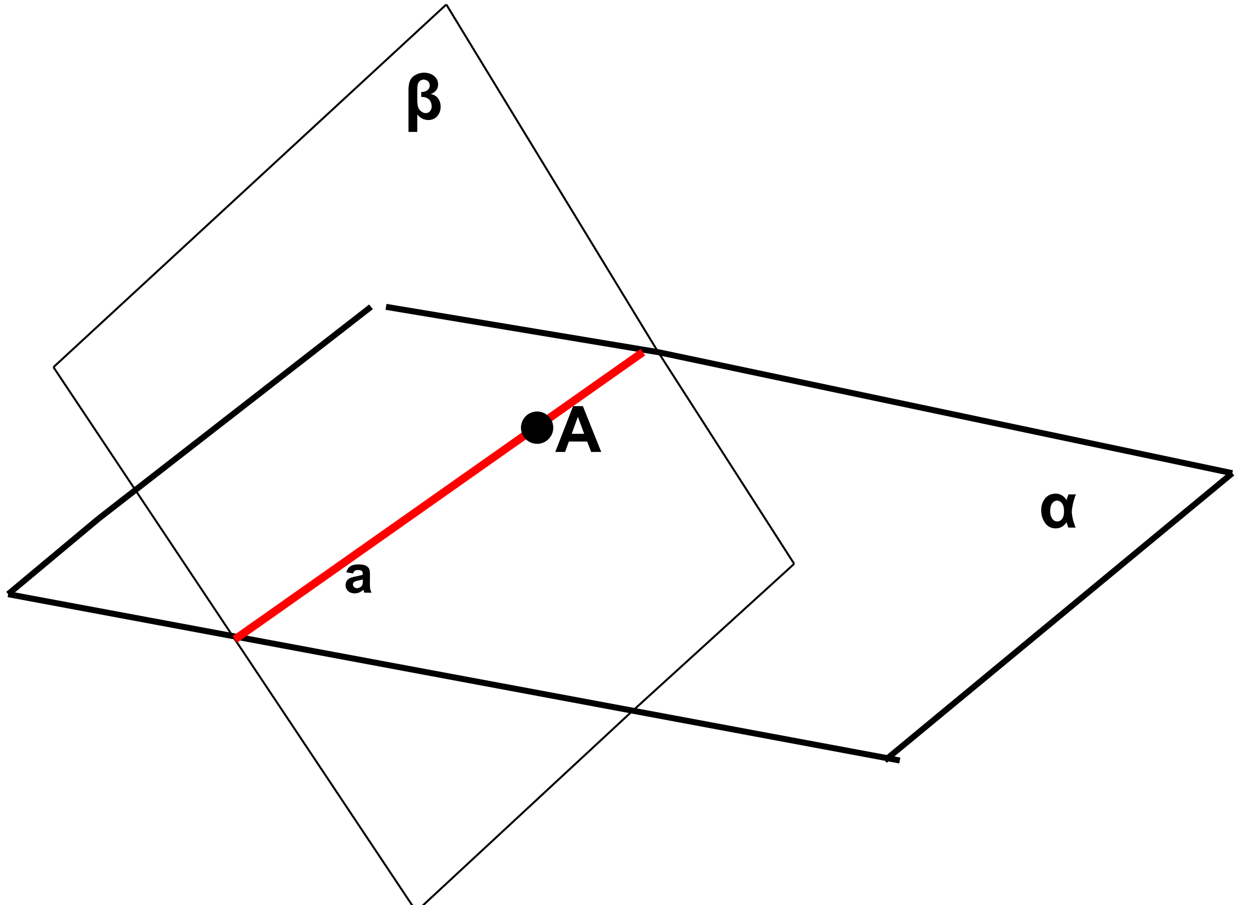


Прямая лежит в плоскости



Прямая пересекает плоскость

Аксиомы стереометрии.

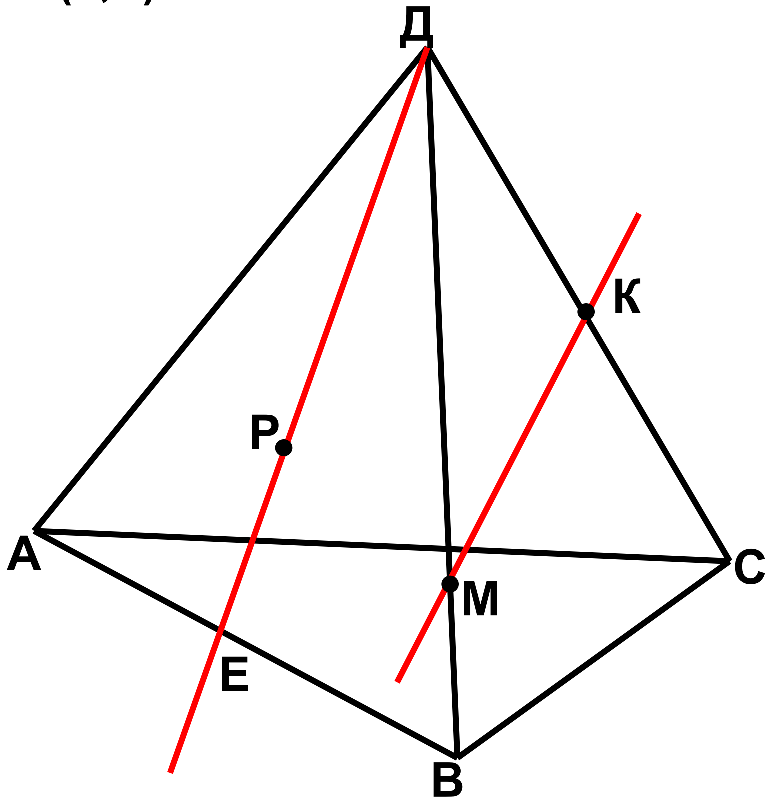


A3. ***Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей. Говорят: плоскости пересекаются по прямой.***

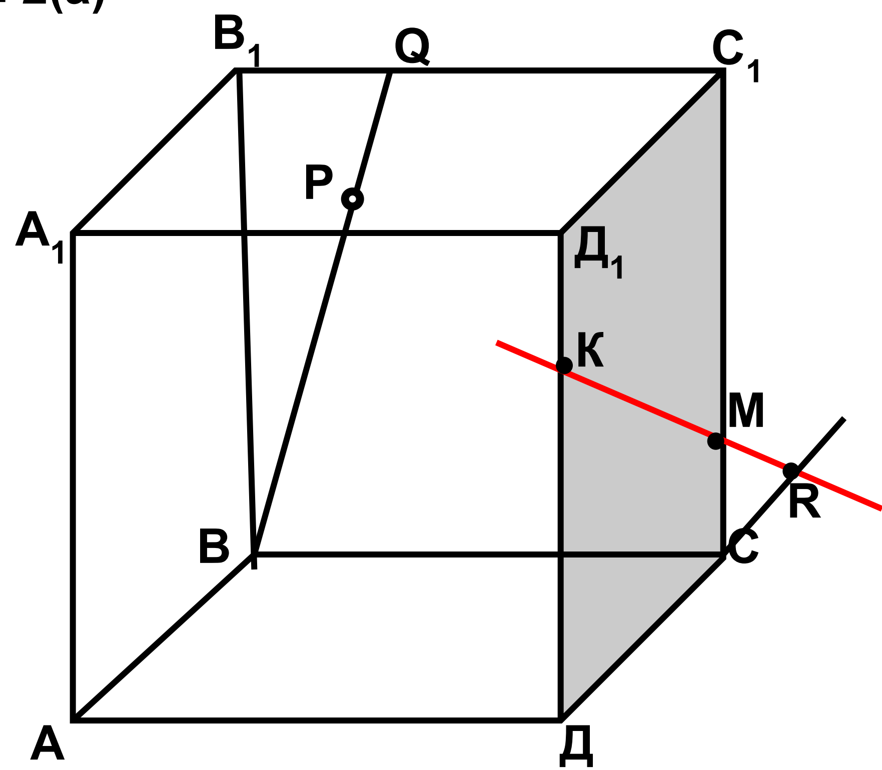
Решить задачи: №1(а,б); 2(а)

Назовите **по рисунку:**

№1(а,б)



№ 2(а)



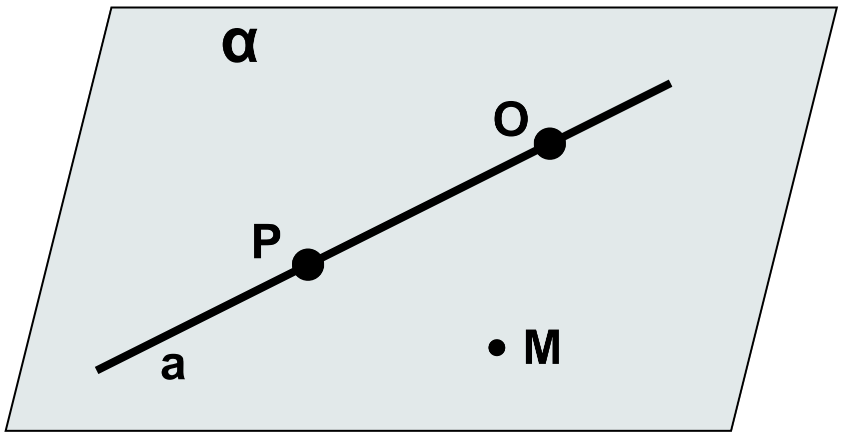
а) плоскости, в которых лежат прямые ДВ, АВ, МК, РЕ, ЕС; б) точки пересечения прямой ДК с плоскостью АВС, прямой СЕ с плоскостью АДВ.

а) точки, лежащие в плоскостях ДСC_1 и BQC

Некоторые следствия из аксиом

Некоторые следствия из аксиом:

Теорема 1. Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость и притом только одна.



Дано: a, M ⊄ a

Доказать: (a, M) ⊂ α

α- единственная

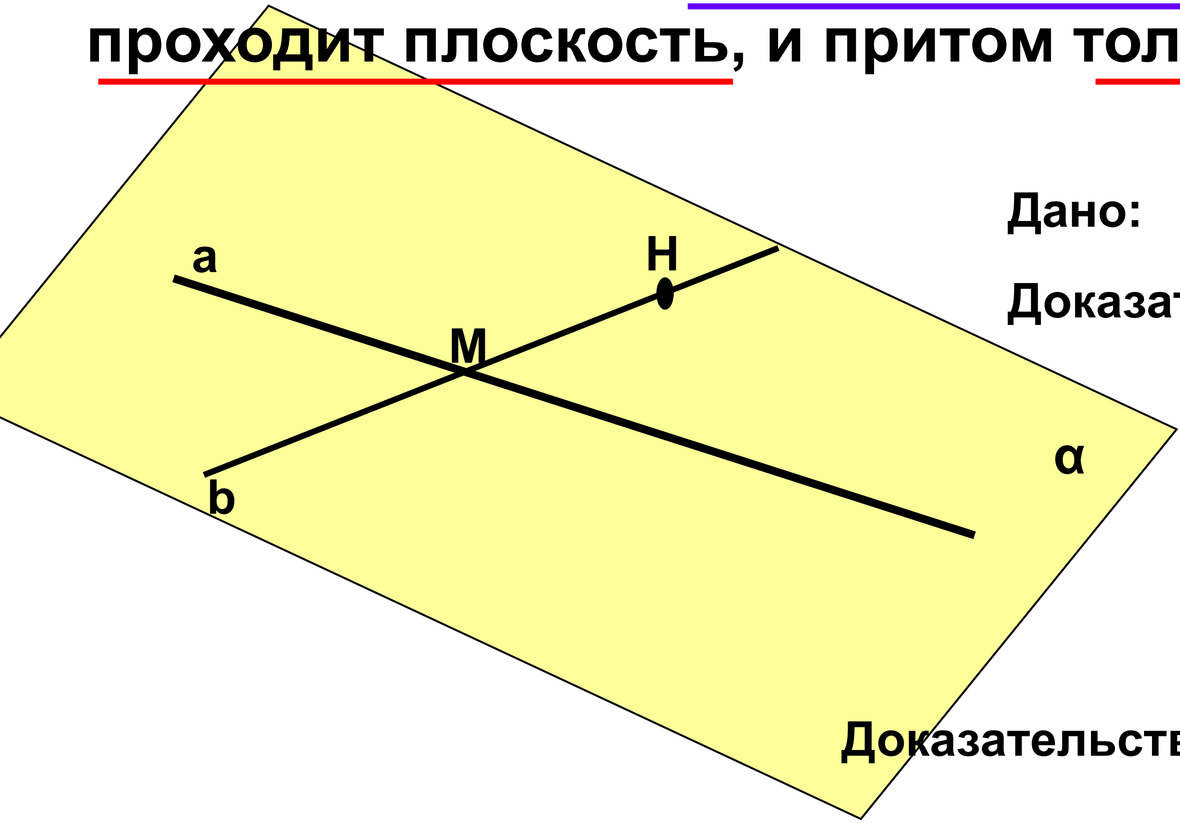
Доказательство :

1. P, O ⊂ a; {P,O,M} ⊄ a

По аксиоме А1: через точки P, O, M проходит плоскость .
По аксиоме А2: т.к. две точки прямой принадлежат плоскости, то и вся прямая принадлежит этой плоскости, т.е. (a, M) ⊂ α

2. Любая плоскость проходящая через прямую a и точку M проходит через точки P, O, и M, значит по аксиоме А1 она – единственная. Ч.т.д.

Теорема 2. Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и притом только одна.



Дано: a∩b

Доказать: 1. (a∩b) с α

2. α- единственная

Доказательство:

1.Через а и Н $\notin$ а, Н$\in$ b проходит плоскость α.

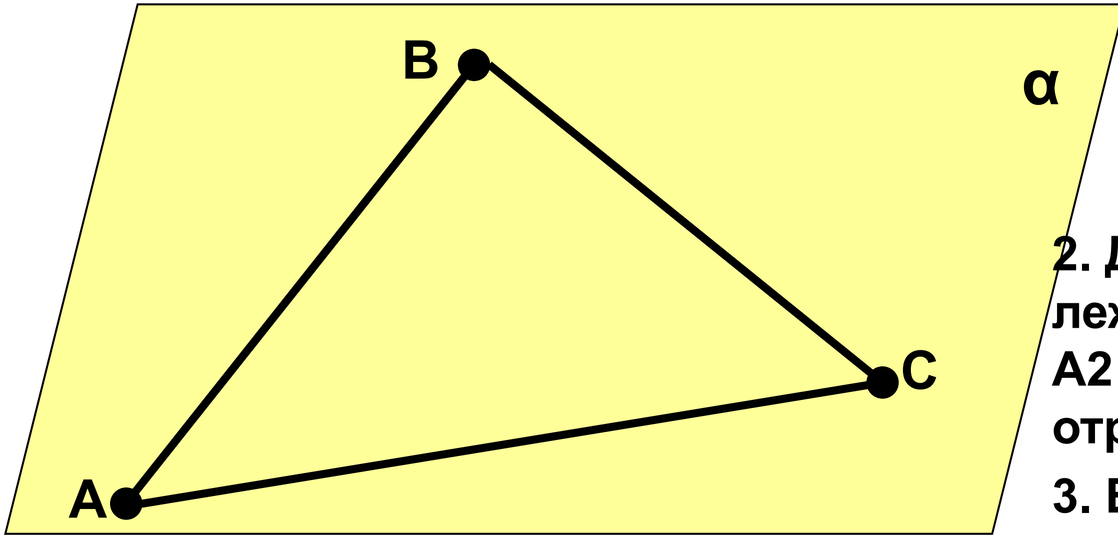
(М , Н) $\in$ α, (М,Н) $\in$ b, значит по А2 все точки b принадлежат плоскости.

2. Плоскость проходит через а и b и она единственная, т.к. любая плоскость, проходящая через прямые а и b, проходит и через Н, значит α – единственная.

Решить задачу № 6

Три данные точки соединены попарно отрезками. Докажите, что все отрезки лежат в одной плоскости.

1 случай.



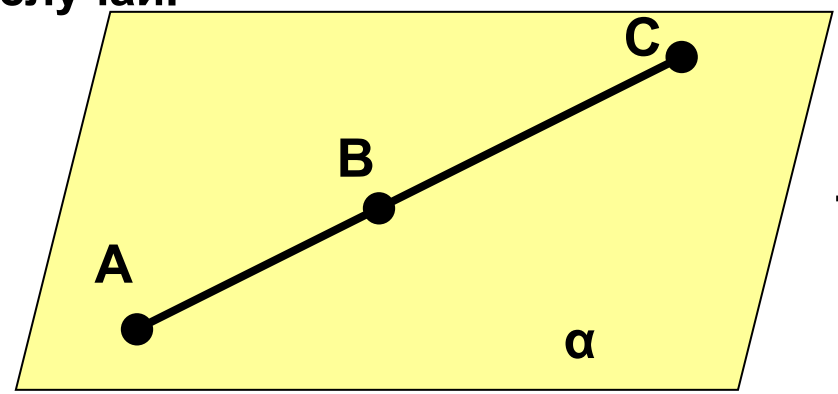
Доказательство:

1. (A,B,C) $\in$ α, значит по А1 через A,B,C проходит единственная плоскость.

2. Две точки каждого отрезка лежат в плоскости, значит по А2 все точки каждого из отрезков лежат в плоскости α.

3. Вывод: AB, BC, AC лежат в плоскости α

2 случай.

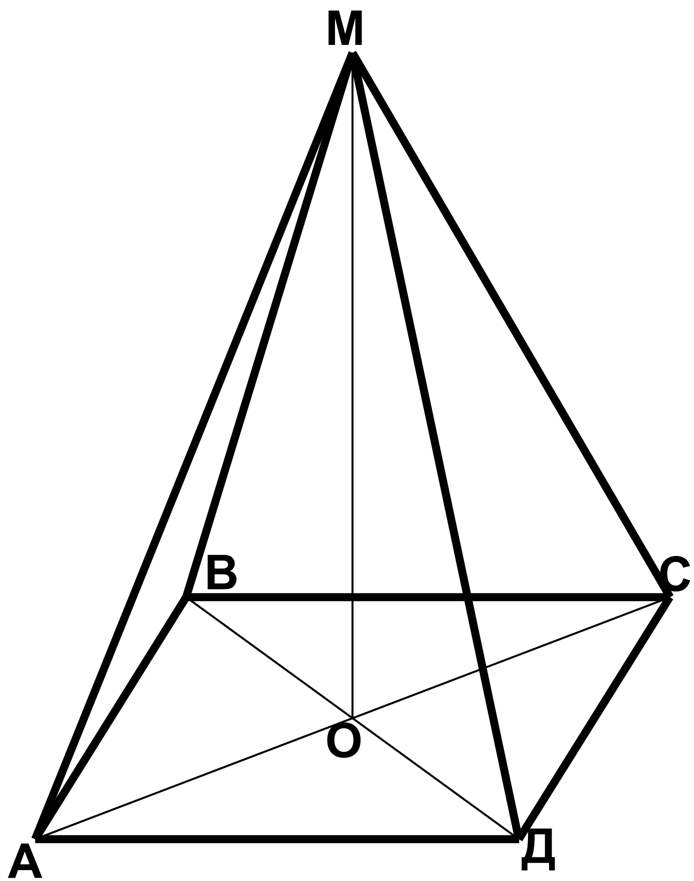


Доказательство:

Так как 3 точки принадлежат одной прямой, то по А2 все точки этой прямой лежат в плоскости.

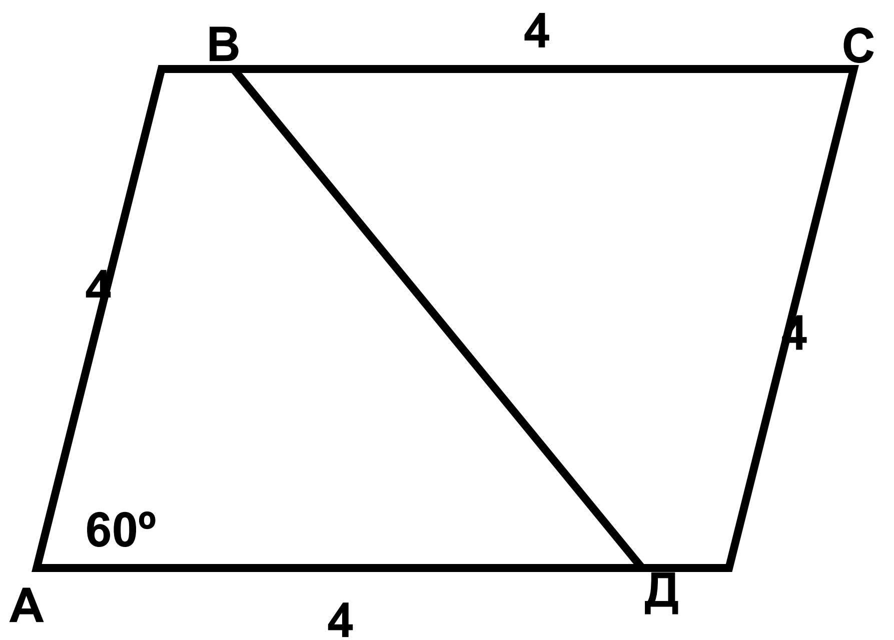
Задача.

АВСД – ромб, О – точка пересечения его диагоналей, М – точка пространства, не лежащая в плоскости ромба. Точки А, Д, О лежат в плоскости α.



Определить и обосновать:

1. **Лежат ли в плоскости α точки В и С?**
2. **Лежит ли в плоскости МОВ точка Д?**
3. **Назовите линию пересечения плоскостей МОВ и АДО.**
4. **Вычислите площадь ромба, если сторона его равна 4 см, а угол равен 60º. Предложите различные способы вычисления площади ромба.**



ΔАВД = ΔВСД (по трем сторонам), значит $S_{АВД} = S_{ВСД}$.

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin\angle A$$

$$S_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot CD \cdot \sin\angle C$$

$$\angle A = \angle C \Rightarrow \sin\angle A = \sin\angle C$$

$$AB = BC,\ AD = CD$$

$$\Rightarrow S_{ABD} = S_{BCD}$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin\angle A$$

Формулы для вычисления площади ромба:

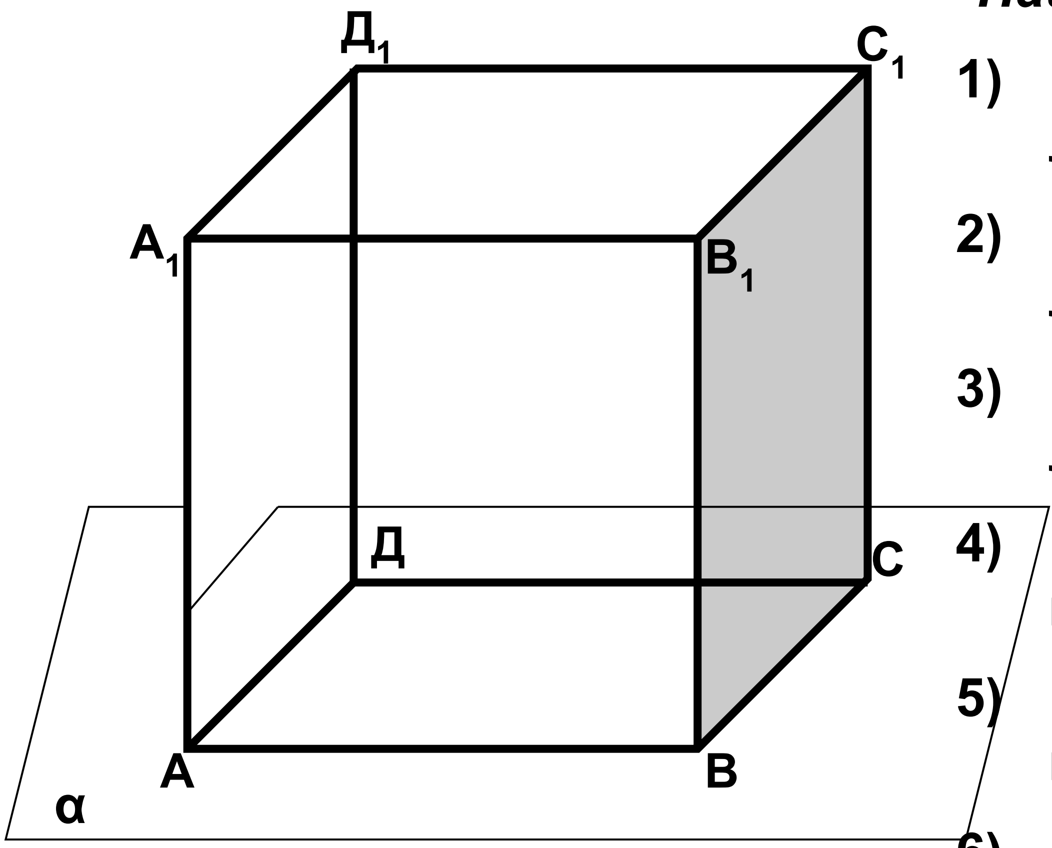
$S_{АВСД}$ = АВ · АД · sinA

$S_{АВСД}$ = (ВД · АС):2

Решение задач на применение аксиом стереометрии и их следствий.

Устная работа.

Задача 1.



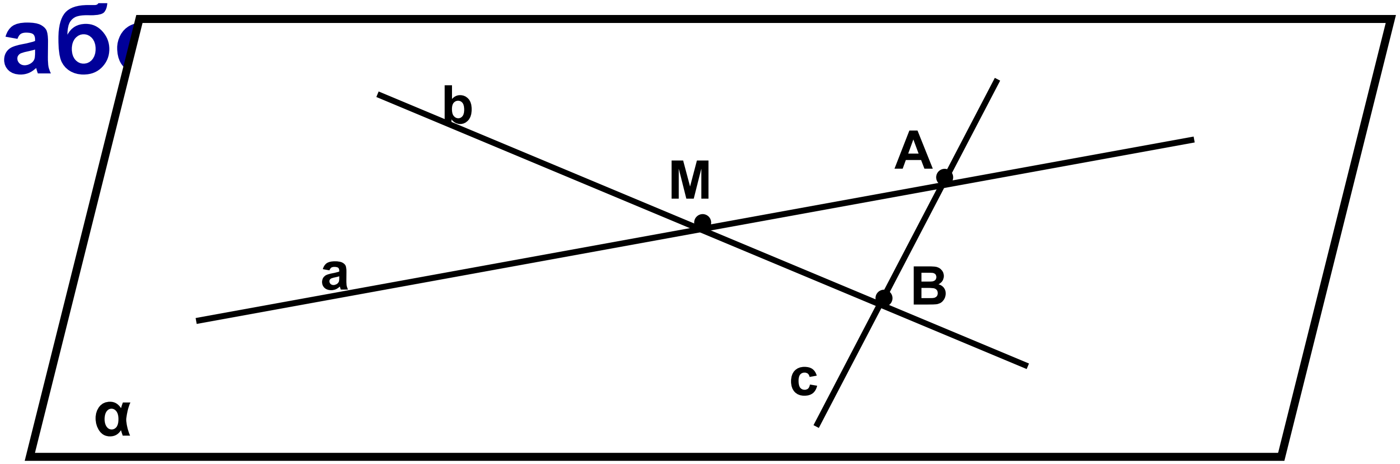
Дано: куб $АВСДА_1В_1С_1Д_1$

Найдите:

1) Несколько точек, которые лежат в плоскости α;
2) Несколько точек, которые не лежат в плоскости α;
3) Несколько прямых, которые лежат в плоскости α;
4) Несколько прямых, которые не лежат в плоскости α;
5) Несколько прямых которые пересекают прямую ВС;
6) Несколько прямых, которые не пересекают прямую ВС.

Устная раб

Задача 2.



Заполните **пропуски, чтобы получилось верное утверждение:**

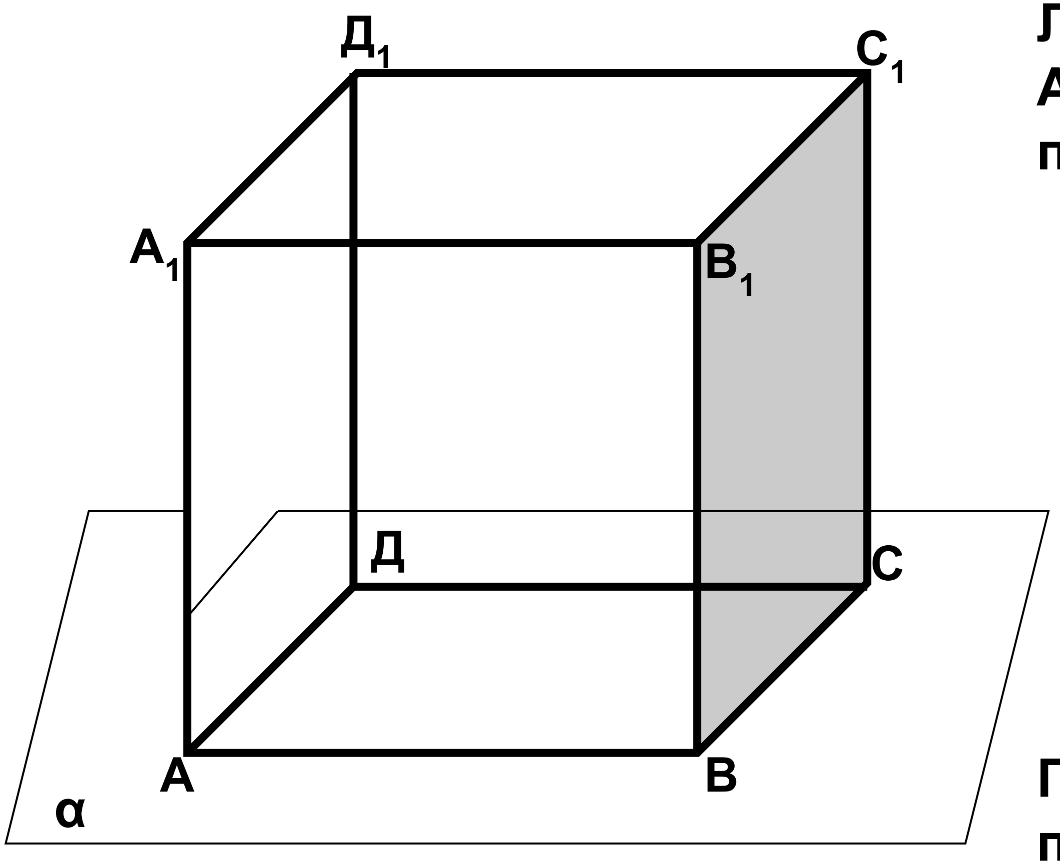
$$1) если A \in a, a \in \alpha, то A.....\alpha$$

$$2) если A \in \alpha, B \in \alpha, то AB.....\alpha$$

$$3) если A \in \alpha; B \in \alpha; C \in AB, то C...\alpha$$

$$4) если M \in \alpha; M \in \beta, \alpha \cap \beta = a, то M....a$$

Устная работа.



Лежат ли прямые AA_1, АВ, АД в одной плоскости?

Прямые AA_1, АВ, АД проходят через точку А, но не лежат в одной плоскости

Дано: куб $АВСДА_1В_1С_1Д_1$

Задача 1

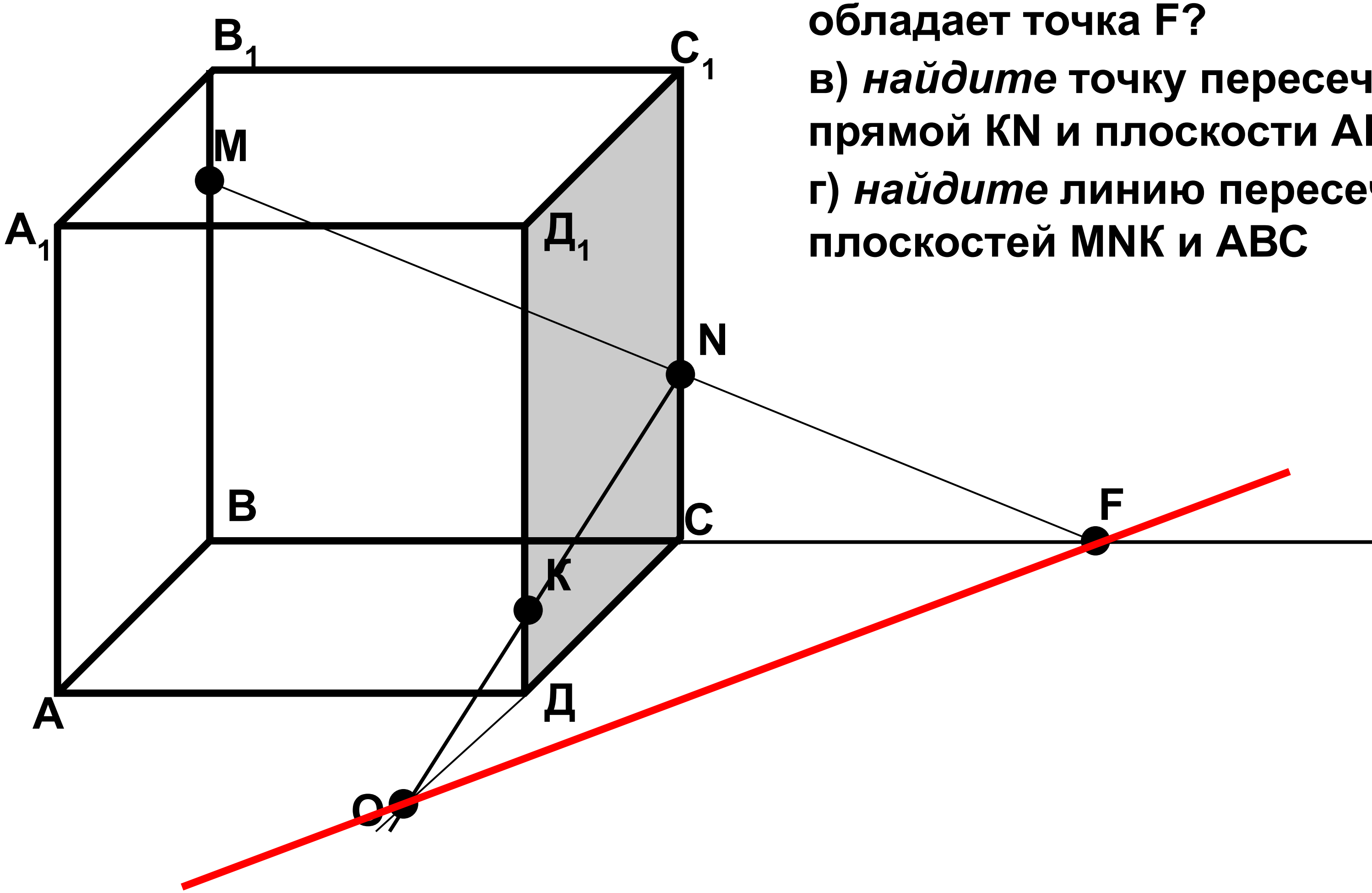
т.М лежит на ребре $ВВ_1$, т.N лежит на ребре $СС_1$ и точка К лежит на ребре $ДД_1$

а) ***назовите*** плоскости, в которых лежат точки М; N.

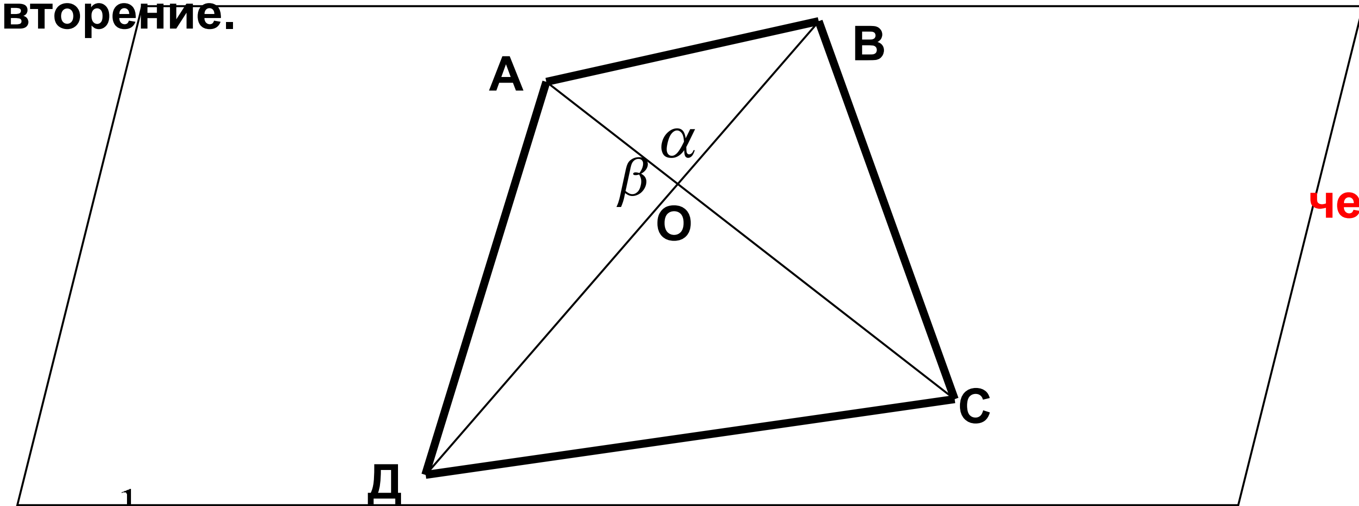
б) ***найдите*** т.F-точку пересечения прямых MN и ВС. Каким свойством обладает точка F?

в) ***найдите*** точку пересечения прямой KN и плоскости АВС

г) ***найдите*** линию пересечения плоскостей MNK и АВС



Повторение.



Формула для вычисления площади четырехугольника.

$$S_{ABO}=\frac{1}{2}AO\cdot BO\cdot\sin\alpha$$

$$S_{AOD}=\frac{1}{2}AO\cdot OD\cdot\sin\beta$$

$$S_{BOC}=\frac{1}{2}BO\cdot OC\cdot\sin\beta$$

$$S_{OCD}=\frac{1}{2}OC\cdot OD\cdot\sin\alpha$$

$$\sin\beta=\sin(180^\circ-\alpha)$$

$$\sin\beta=\sin\alpha$$

$$S_{ABO}=\frac{1}{2}AO\cdot BO\cdot\sin\alpha$$

$$S_{AOD}=\frac{1}{2}AO\cdot OD\cdot\sin\alpha$$

$$S_{BOC}=\frac{1}{2}BO\cdot OC\cdot\sin\alpha$$

$$S_{OCD}=\frac{1}{2}OC\cdot OD\cdot\sin\alpha$$

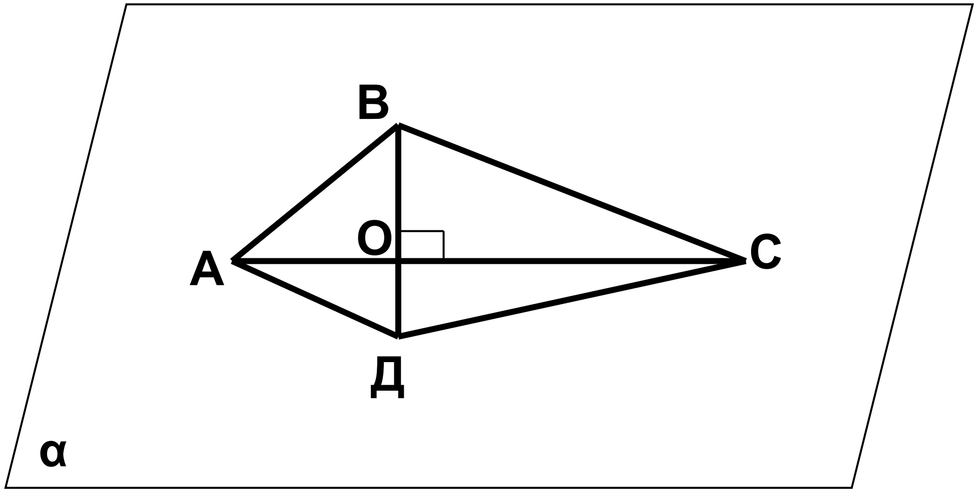
$$S_{ABO}+S_{AOD}=\frac{1}{2}AO\cdot\sin\alpha\cdot(BO+OD)=\frac{1}{2}AO\cdot BD\cdot\sin\alpha$$

$$S_{BOC}+S_{OCD}=\frac{1}{2}OC\cdot\sin\alpha\cdot(BO+OD)=\frac{1}{2}OC\cdot BD\cdot\sin\alpha$$

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}BD\cdot\sin\alpha\cdot(AO+OC)=\frac{1}{2}AC\cdot BD\cdot\sin\alpha$$

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD\cdot\sin\alpha$$

Задача 2



Докажите, что все вершины четырехугольника АВСД лежат в одной плоскости, если его диагонали АС и ВД пересекаются.

Вычислите площадь четырехугольника, если АС$\perp$ВД, АС = 10см, ВД = 12см.

Доказательство:

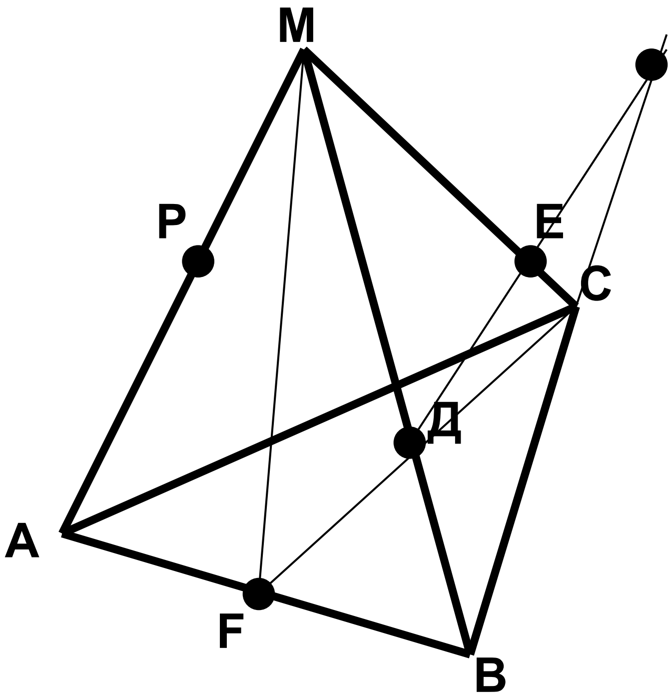
1. (АС $\cap$ ВД) =α $\Rightarrow$ АС $\in$ α, ВД $\in$ α, $\Rightarrow$ (А, В, С, Д) $\in$ α

2. $S_{АВСД}$ = АС · ВД · sin90º = 10 · 12 = 120 (см^2)

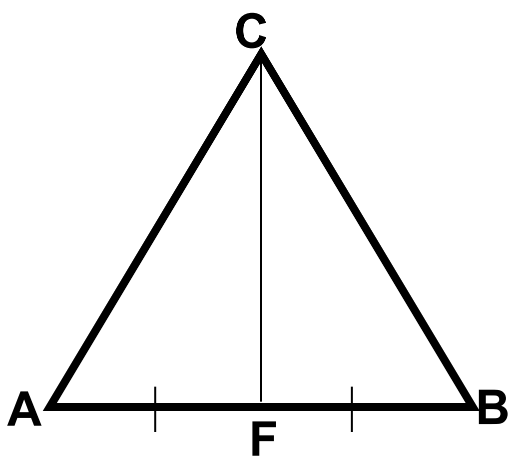
Ответ: 120 см^2

Задача №1 Дан тетраэдр МАВС, каждое ребро которого равно 6 см.

$$Д \in MB, E \in MC, F \in \mathrm{AB}, \mathrm{AF} = \mathrm{FBBP} \in \mathrm{MA}$$



1. *Назовите* прямую, по которой пересекаются плоскости: а) МАВ и MFC; б) MCF и АВС.
2. *Найдите* длину CF и S_{ABC}
3. Как построить точку пересечения прямой ДЕ с плоскостью АВС?



Справочный материал:

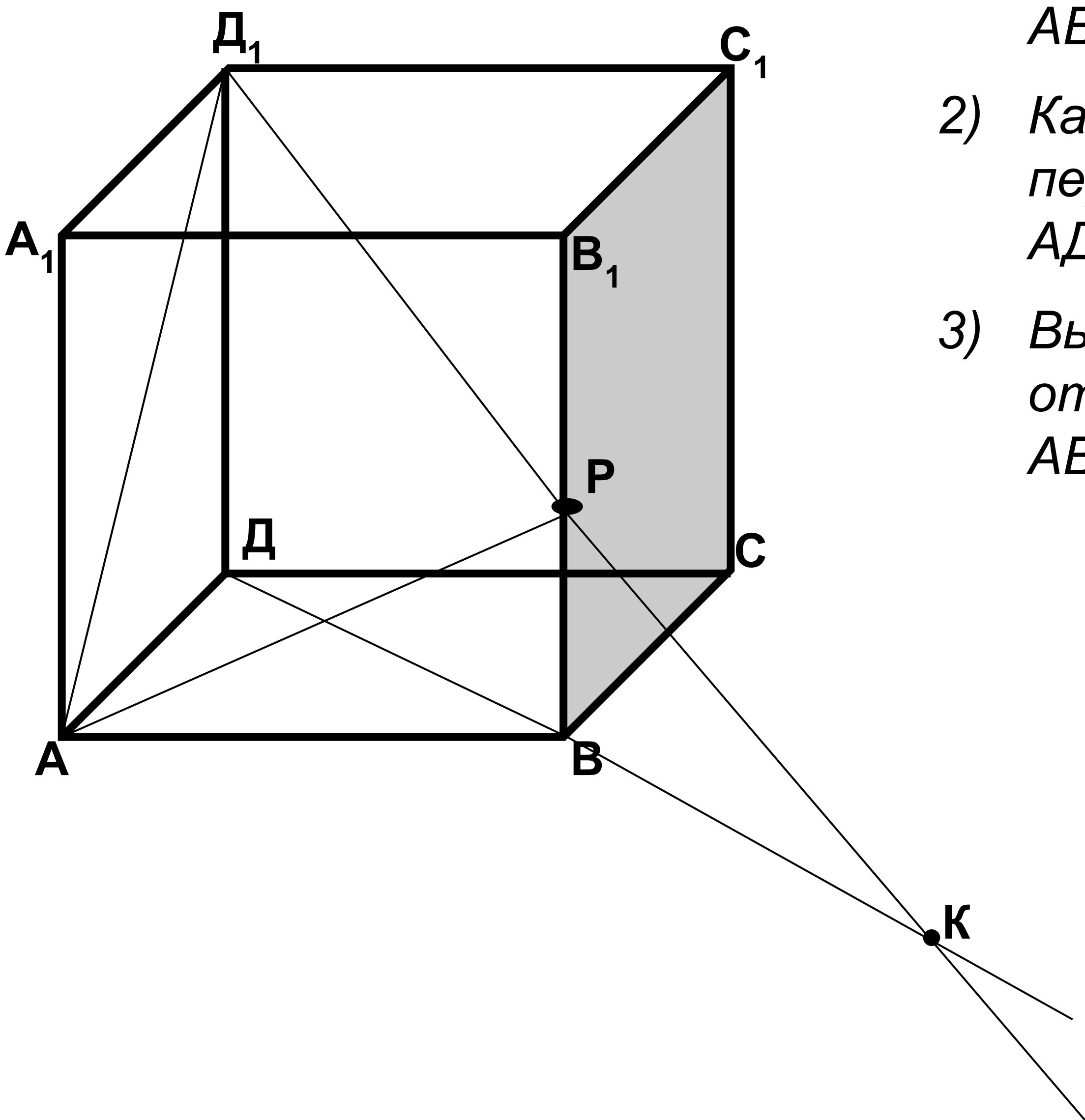
Свойство медианы равнобедренного треугольника: ***В равнобедренном треугольнике медиана, проведенная из вершины треугольника к основанию, является биссектрисой и высотой.***

Теорема Пифагора: ***В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.***

$$Sðàâíîñòîð\ .òðåóã. = \frac{à^2\sqrt{3}}{4}$$

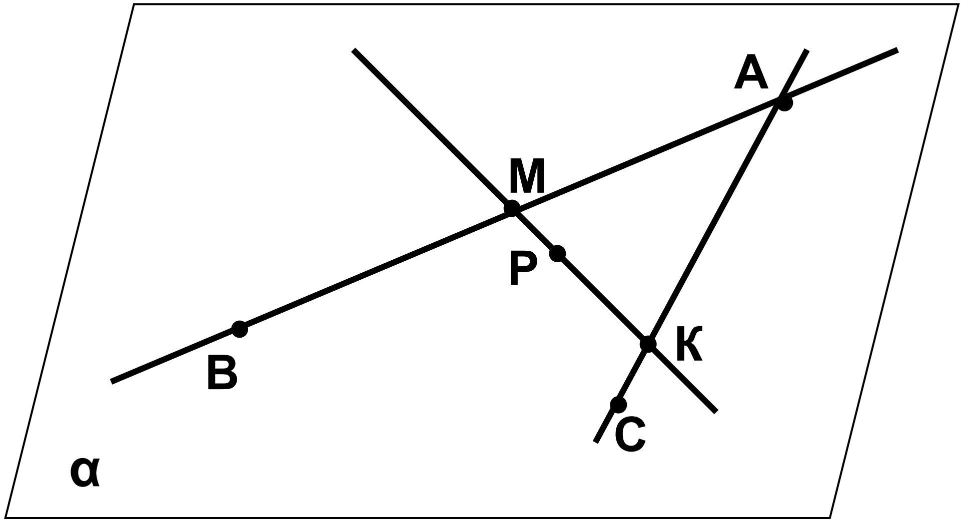
Задача №2

$Дано: ABCДA_1B_1C_1Д_1 - куб, P \in BB_1, B_1P = PB.$



1) *Как построить точку пересечения плоскости АВС с прямой $Д_1P$?*
2) *Как построить линию пересечения плоскости $АД_1Р$ и $АВВ_1$?*
3) *Вычислите длину отрезков АР и $АД_1$, если АВ = а*

Задача №3



Дано: Точки A, B, C не лежат на одной прямой.

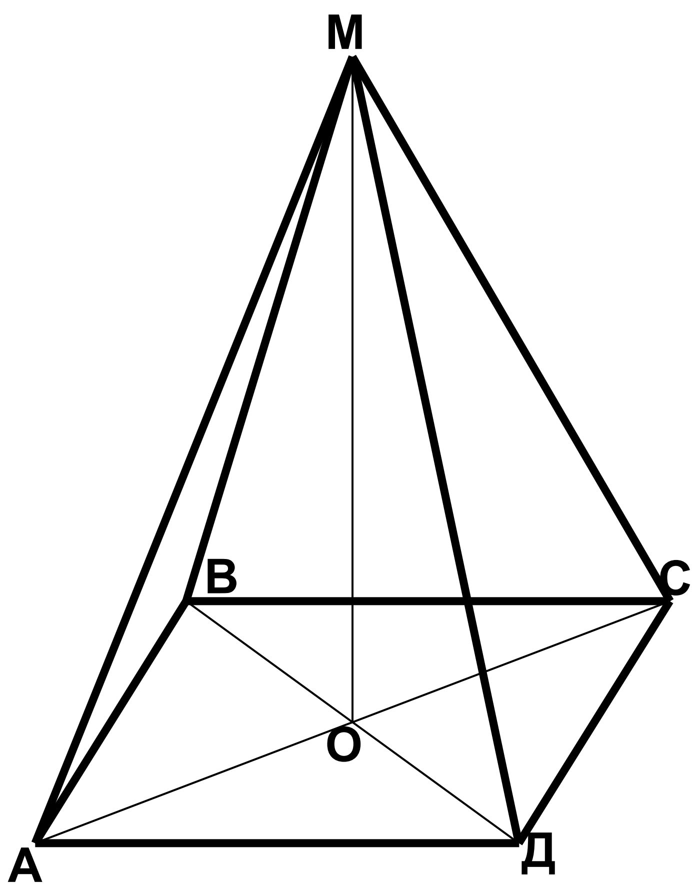
$$M \in AB, K \in AC, P \in MK$$

Докажите, что точка P лежит в плоскости ABC.

Задача (устно)

АВСД – ромб, О – точка пересечения его диагоналей, М – точка пространства, не лежащая в плоскости ромба. Точки А, Д, О лежат в плоскости α.

Определить и обосновать:

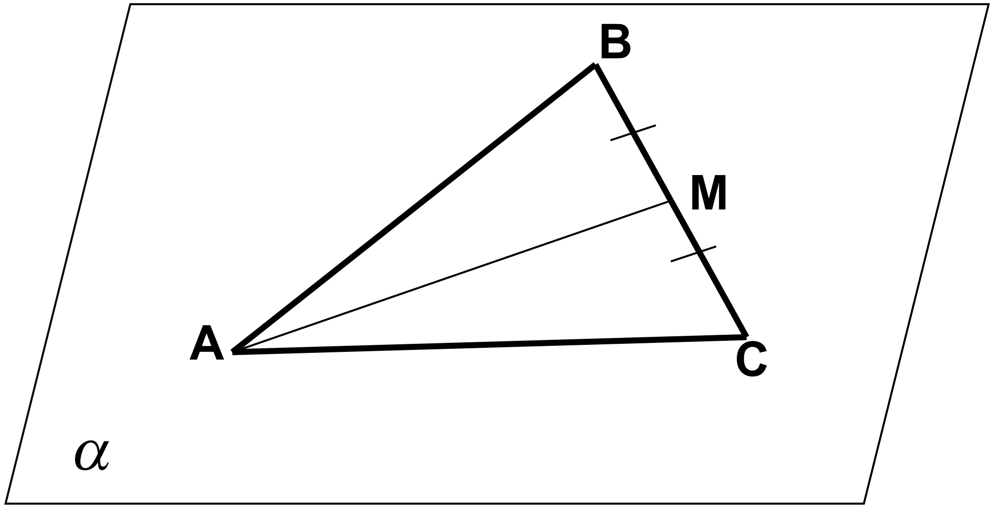


1. Какие еще точки лежат в плоскости α?
1. Лежат ли в плоскости α точки В и М?
2. Лежит ли в плоскости МОД точка В?
3. Назовите линию пересечения плоскостей МОС и АДО.
4. Точка О – общая точка плоскостей МОВ и МОС. Верно ли что эти плоскости пересекаются по прямой МО?
5. Назовите три прямые, лежащие в одной плоскости; не лежащие в одной плоскости.

Задача

(устно)

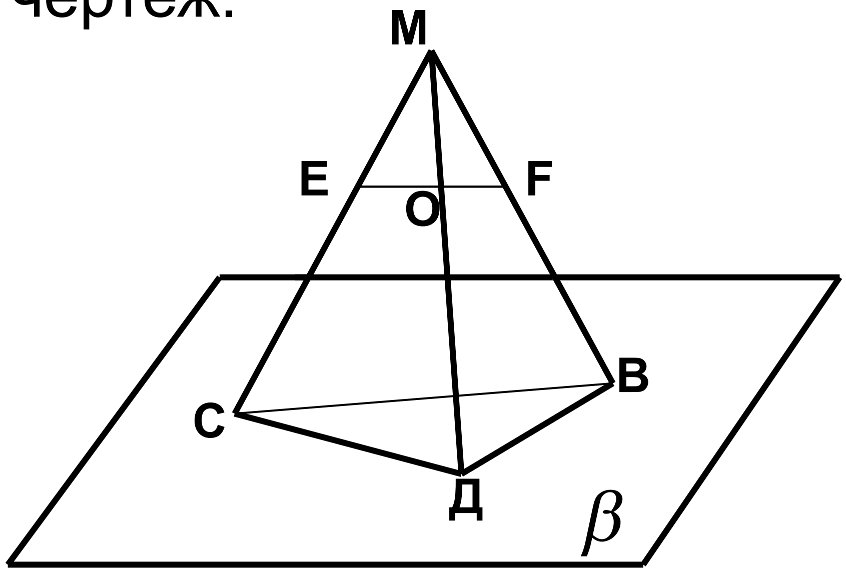
Стороны АВ и АС треугольника АВС лежат в плоскости α. *Докажите*, что и медиана лежит в плоскости α.



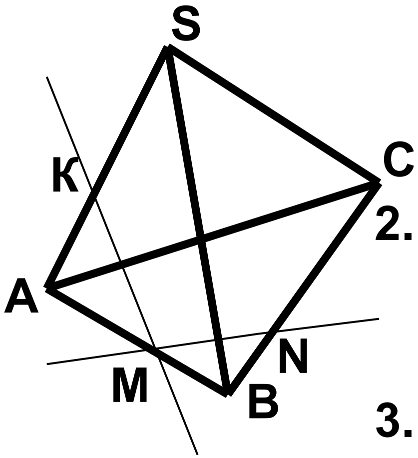
Задача

(устно)

В чем ошибка чертежа, где O $\in$ EF. Дайте объяснение. Как должен выглядеть правильный чертеж.



1 уровень

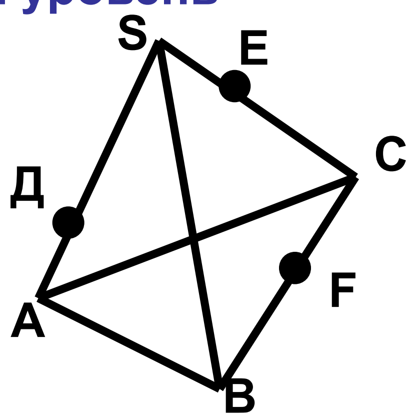


1. Пользуясь данным рисунком, назовите: а) четыре точки, лежащие в плоскости SAB; б)плоскость, в которой лежит прямая MN; в) прямую по которой пересекаются плоскости SAC и SBC.

2. Точка С – общая точка плоскости α и β. Прямая с проходит через точку С. Верно ли, что плоскости α и β пересекаются по прямой с. Ответ объясните.

3. Через прямую а и точку А можно провести две различные плоскости. Каково взаимное расположение прямой а и точки А. Ответ объясните.

2 уровень

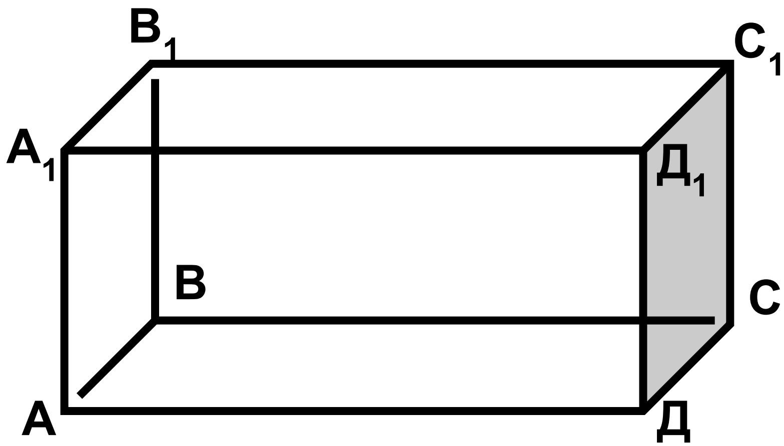


1. Пользуясь данным рисунком назовите: а) две плоскости, содержащие прямую ДЕ; б) прямую, по которой пересекаются плоскости AEF и SBC; в) плоскости, которые пересекает прямая SB.

2. Прямые а, b и с имеют общую точку. Верно ли, что данные прямые лежат в одной плоскости? Ответ обоснуйте.

3. Плоскости α и β пересекаются по прямой с. Прямая а лежит в плоскости α и пересекает плоскость β. Каково взаимное расположение прямых а и с?

Уровень 3 (на карточках)



1. Пользуясь данным рисунком, назовите: а) две плоскости, содержащие прямую B_1C; б) прямую, по которой пересекаются плоскости $B_1CД$ и $AA_1Д_1$; в) плоскость, не пересекающуюся с прямой $CД_1$.

2. Четыре прямые попарно пересекаются. Верно ли, что если любые три из них лежат в одной плоскости, то все четыре прямые лежат в одной плоскости? Ответ объясните.

3. Вершина С плоского четырехугольника АВСД лежит в плоскости α , а а точки А, В, Д не лежат в этой плоскости. Прямые АВ и АД пересекают плоскость α в точках B_1 и$Д_1$ соответственно. Каково взаимное расположение точек С, B_1 и $Д_1$? Ответ объясните.

Домашнее задание:

- выучить аксиомы стереометрии, выполнить задания выбранного уровня

-повторить материал из планиметрии и сделать в тетрадях конспект по следующим вопросам:

1. **Определение параллельных прямых**
2. **Взаимное расположение двух прямых на плоскости**
3. **Построение прямой, параллельной данной**
4. **Аксиому о параллельных прямых.**