«Решение уравнений из материалов ЕГЭ по математике»

а). Реш… б). Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$

$$2\cos x + 1 = \sin 2x + \sin x$$

$$2\cos x + 1 = 2\sin x\cos x + \sin x$$

$$2\cos x + 1 = \sin x(2\cos x + 1)$$

$$1\cdot(2\cos x + 1) - \sin x(2\cos x + 1) = 0$$

$$(1 - \sin x)(2\cos x + 1) = 0$$

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

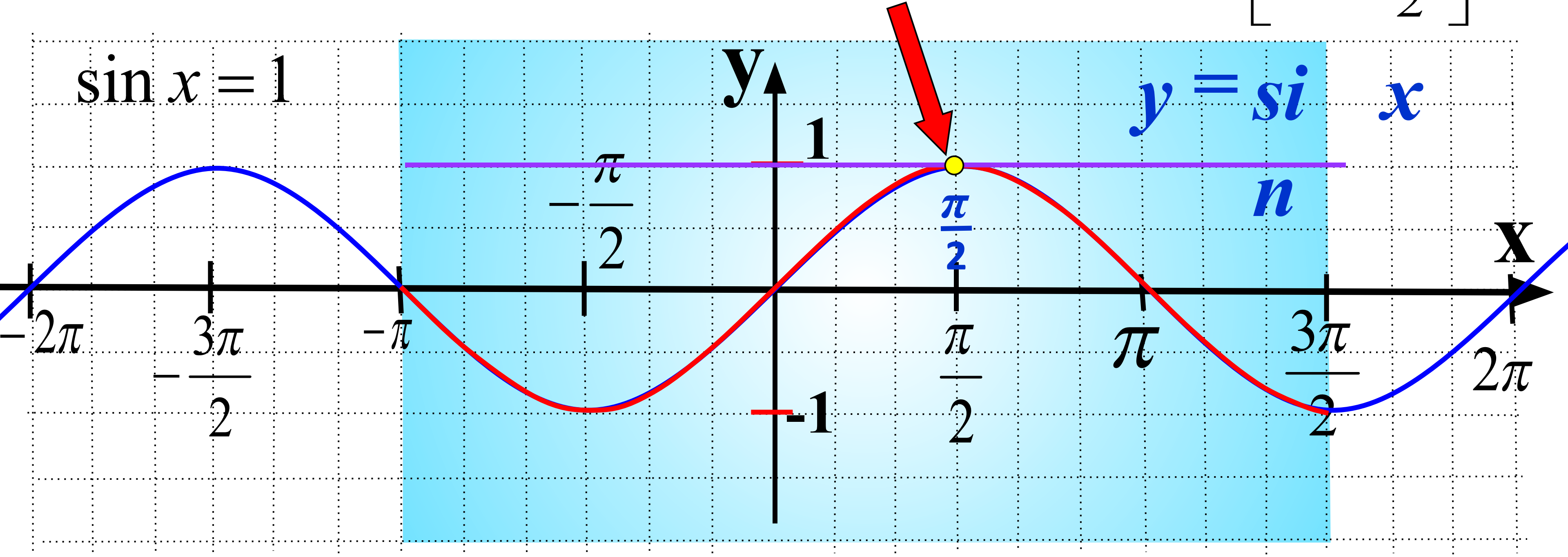
$$\sin x = 1 \qquad \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \qquad x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n$$

$$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n;$$

Отбор корней с помощью графиков

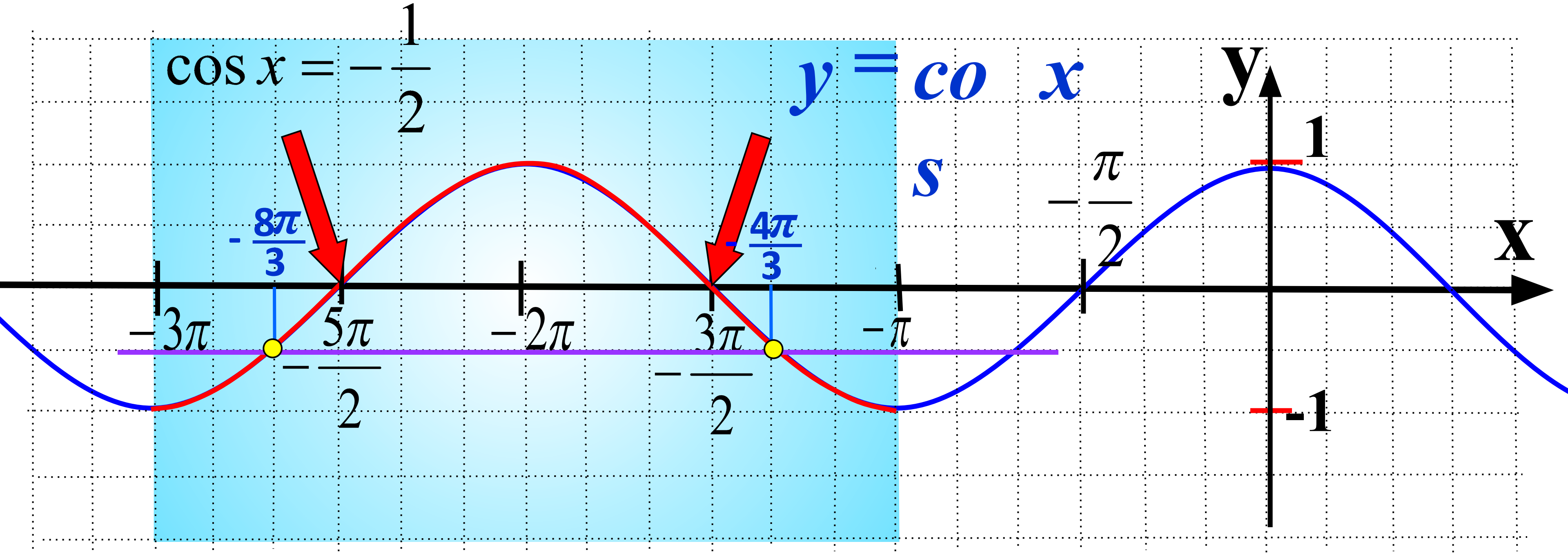
б). Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$



$$б).\ \frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; -\frac{2\pi}{3}.$$

Отбор корней с помощью графиков

б). Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;\ -\pi\right]$



$$-\frac{5\pi}{2}^{\,3}-\frac{\pi}{6}=-\frac{15\pi}{6}-\frac{\pi}{6}=-\frac{16\pi}{6}=-\frac{8\pi}{3}.$$

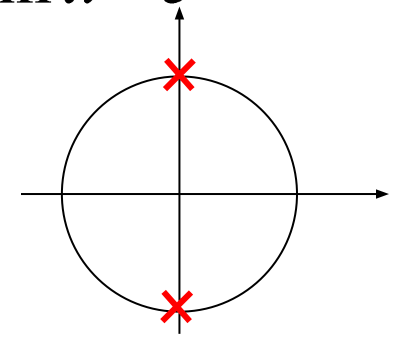
$$-\frac{3\pi}{2}^{\,3}+\frac{\pi}{6}=-\frac{9\pi}{6}+\frac{\pi}{6}=-\frac{8\pi}{6}=-\frac{4\pi}{3}.$$

а). Решите уравнение $\frac{3}{2}\cdot tgx\cdot \sin 2x-2\cos^2 x=8\sin x-5$

б). Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$

$$tgx=\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\sin 2x=2\sin x\cdot\cos x$$



$$\frac{3}{2}\cdot tgx\cdot \sin 2x-2\cos^2 x=8\sin x-5$$

$$ОДЗ \qquad \cos x\neq 0$$

$$\frac{3}{\cancel{2}}\cdot\frac{\sin x}{\cancel{\cos x}}\cdot\cancel{2}\sin x\cdot\cancel{\cos x}-2\cos^2 x=8\sin x-5$$

$$\cos^2 x=1-\sin^2 x$$

$$5a^2-8a+3=0$$

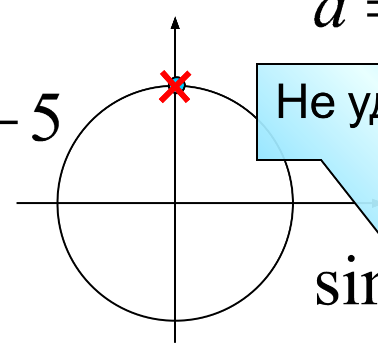
$$D=(-8)^2-4\cdot 5\cdot 3=4$$

$$3\sin^2 x-2\cos^2 x=8\sin x-5$$

$$3\sin^2 x-2(1-\sin^2 x)=8\sin x-5$$

$$a=\frac{8\pm 2}{2\cdot 5}=\left[\begin{array}{l} a_1=1; \\ a_2=\frac{3}{5}\end{array}\right.$$

$$3\sin^2 x-2+2\sin^2 x=8\sin x-5$$



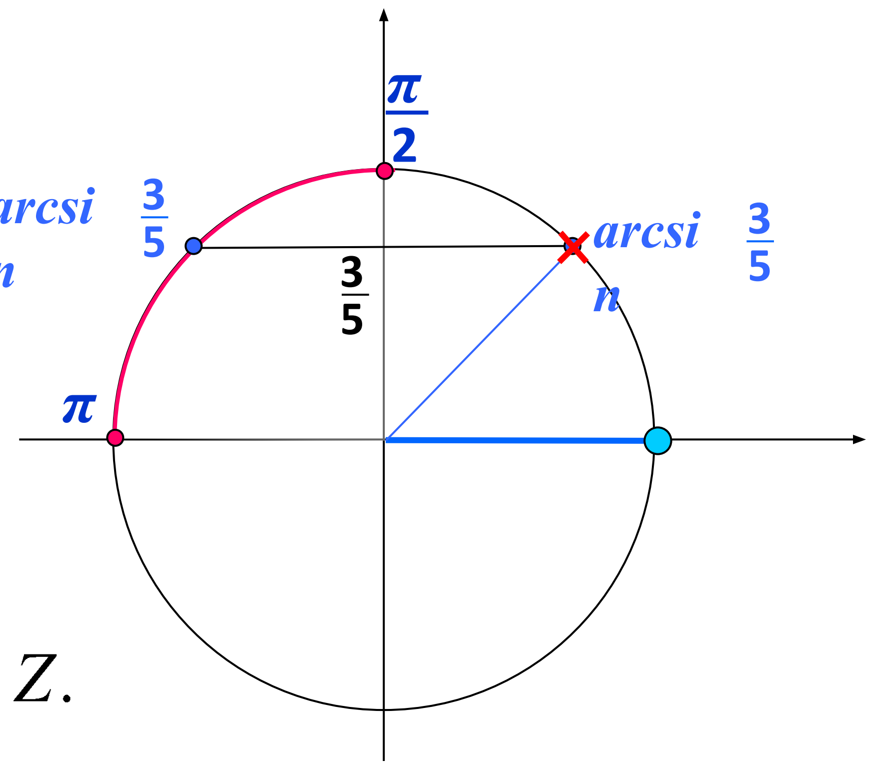
Не удовл. ОДЗ

$$5\sin^2 x-8\sin x+3=0$$

$$\sin x=1 \qquad \sin x=\frac{3}{5}$$

$$\sin x = \frac{3}{5} \qquad\qquad x = (-1)^n \arcsin\frac{3}{5} + \pi n,\ n \in Z.$$

б). Найдем все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$



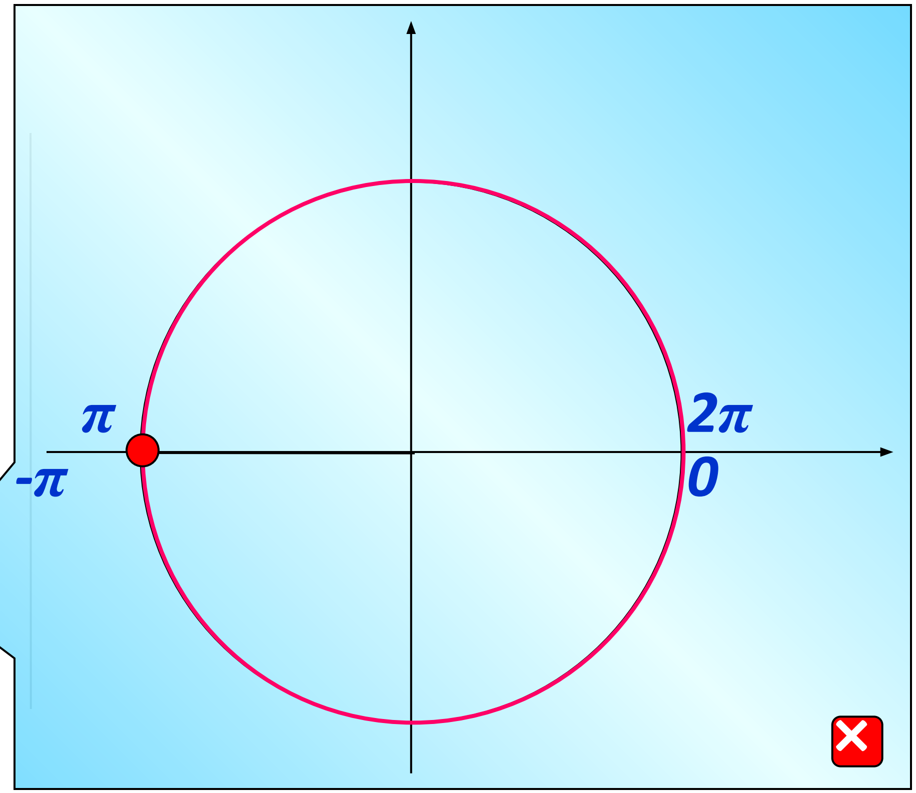
$$Ответ:$$

$$а).\ x = (-1)^n \arcsin\frac{3}{5} + \pi n,\ n \in Z.$$

$$б).\ x = \pi - \arcsin\frac{3}{5}$$

а). Решите уравнение $4\sin^2 x - 12\sin x + 5 = 0$

б). Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; 2\pi\right]$



б). Выбирать корни по тригонометрической окружности не удобно, т.к. это … полтора круга

$\left[-\pi; 2\pi\right]$

б). Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\pi; 2\pi]$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$$ n=0

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$$ n=0

Нам будет удобно записать решение в виде двух множеств, т.к. аналитическая запись ответа

в виде $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$ не удобна для

решения двойного неравенства.

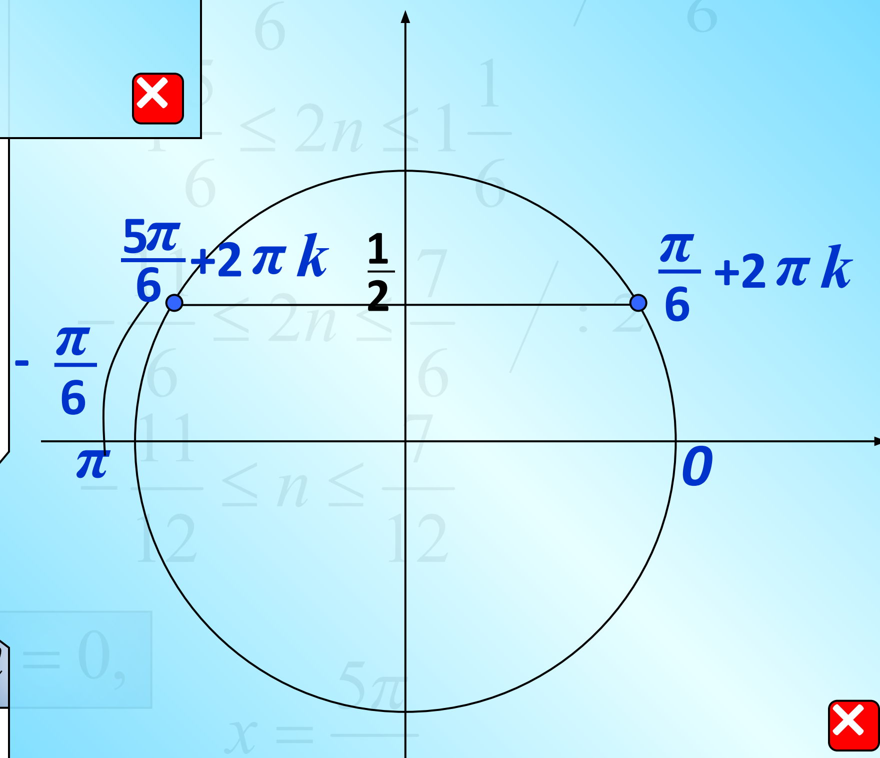
$$-1 \le \frac{5}{6} + 2n \le 2 \quad \Big/ -\frac{5}{6}$$

$$-\frac{7}{6} \le 2n \le \frac{11}{6} \quad \Big/ : 2$$

$$-\frac{7}{12} \le n \le \frac{11}{12}$$

$$n = 0,$$

$$x = \frac{\pi}{6}$$



$$7tg^2x - \frac{1}{\cos x} + 1 = 0 \qquad \left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$$

$$-6\sin^2 x - \cos x + 1 = 0 \qquad [2\pi;\ 3\pi]$$

$$\cos 2x - \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -0{,}25 \qquad \left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$$

а). Решите уравнение $7tg^2 x - \frac{1}{\cos x} + 1 = 0$

б). Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$

$$tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$7\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos x} + 1 = 0$$

cos x   cos 2 x

$ОДЗ: \cos x \neq 0; \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$

$$\frac{7\sin^2 x - \cos x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$$

$$7\left(1 - \cos^2 x\right) - \cos x + \cos^2 x = 0$$

$$7 - 7\cos^2 x - \cos x + \cos^2 x = 0$$

$$-6\cos^2 x - \cos x + 7 = 0$$

$$6\cos^2 x + \cos x - 7 = 0$$

$$\cos x = -\frac{14}{12} \notin [-1;1]$$

$$\cos x = 1 \quad x = 2\pi n, \ n \in Z.$$

$$6a^2 + a - 7 = 0$$

$$D = 1^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-7) = 169$$

$$a = \frac{-1 \pm 13}{2 \cdot 6} = \left[\begin{array}{l} a_1 = -\frac{14}{12}; \\ a_2 = 1 \end{array}\right.$$

$Ответ: \ x = 2\pi n, \ n \in Z.$

б). Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right]$

n=-1

$$\boxed{x = 2\pi n}$$

$$\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right] \le \le \quad / : \pi$$

$$-\frac{5}{2} \le 2n \le -1 \quad / : 2$$

$$-\frac{5}{4} \le n \le -\frac{1}{2}$$

$$\boxed{n = -1,} \quad x = -2\pi$$

$$Ответ:\ а).\ x = 2\pi n,\ n \in Z, \qquad б) -2\pi.$$

а). Решите уравнение $-6\sin^2 x - \cos x + 1 = 0$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2\pi;\ 3\pi]$

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$-6\sin^2 x - \cos x + 1 = 0;$

$-6(1 - \cos^2 x) - \cos x + 1 = 0;$

$-6 + 6\cos^2 x - \cos x + 1 = 0;$

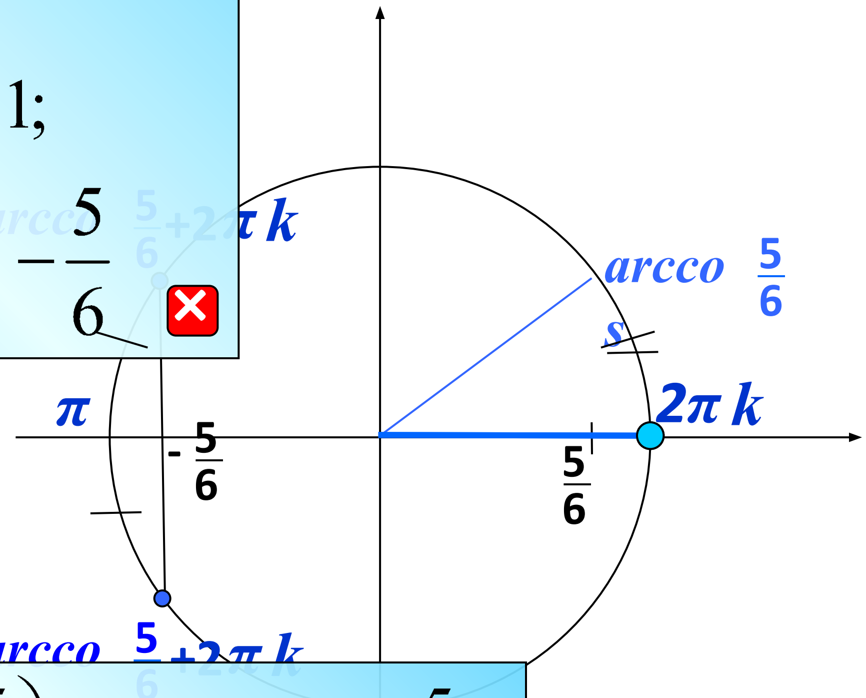
$6\cos^2 x - \cos x - 5 = 0;$

$6a^2 - a - 5 = 0$

$D = (-1)^2 - 4\cdot 6\cdot(-5) = 121$

$$a = \frac{1 \pm 11}{2\cdot 6} = \left[\begin{array}{l} a_1 = 1; \\ a_2 = -\frac{5}{6} \end{array}\right.$$

$\cos x = 1 \qquad \cos x = -\frac{5}{6}$



$$\arccos\left(-\frac{5}{6}\right) = \pi - \arccos\frac{5}{6}$$

а). *Ответ*: $2\pi k;\ \pi - \arccos\frac{5}{6} + 2\pi k;\ \pi + \arccos\frac{5}{6} + 2\pi k;\ k \in Z.$

или

$$а).\ Ответ: x = 2\pi k,\ x = \pm\arccos\left(-\frac{5}{6}\right) + 2\pi k,\ k \in Z$$

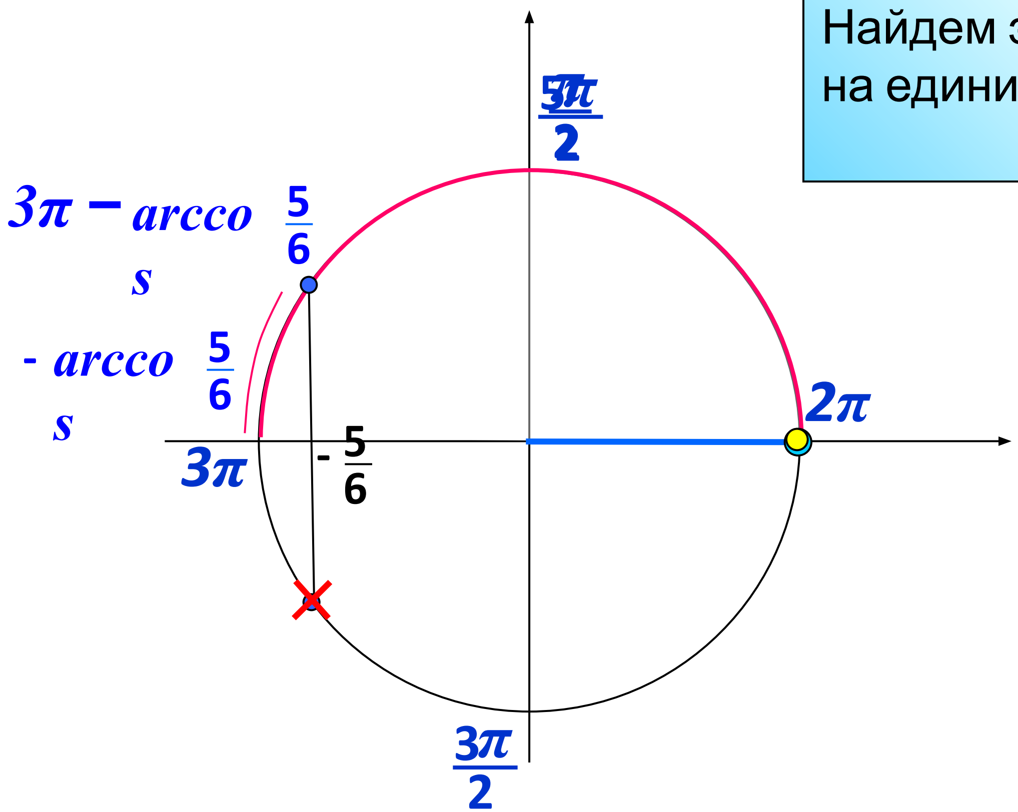
$$а).\ Ответ: x = 2\pi k,\ x = \pm\left(\pi - \arccos\frac{5}{6}\right) + 2\pi k,\ k \in Z$$

б). Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\ 3\pi\right]$

Найдем этот промежуток на единичной окружности

$$\cos x = 1$$

$$\cos x = -\frac{5}{6}$$



$$б).\ \mathit{Ответ}:\ 2\pi;\ \ 3\pi - \arccos\frac{5}{6}.$$

а). Решите уравнение $\cos 2x - \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -0{,}25$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

б). Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$

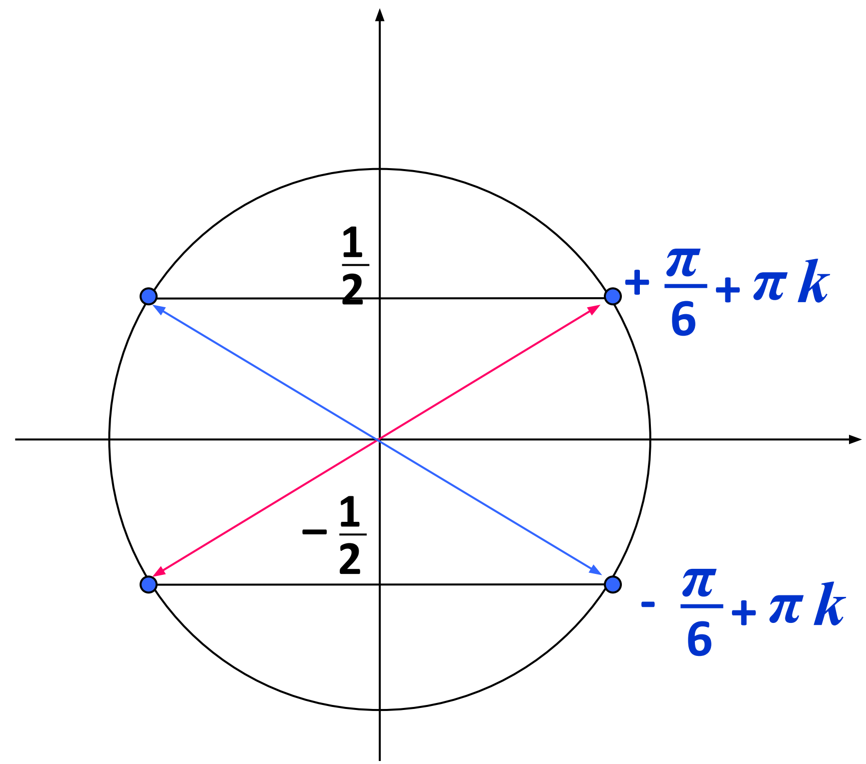
$$\cos 2x - \cos^2 x = -0{,}25$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x - \cos^2 x = -\frac{1}{4}$$

$$-\sin^2 x = -\frac{1}{4}$$

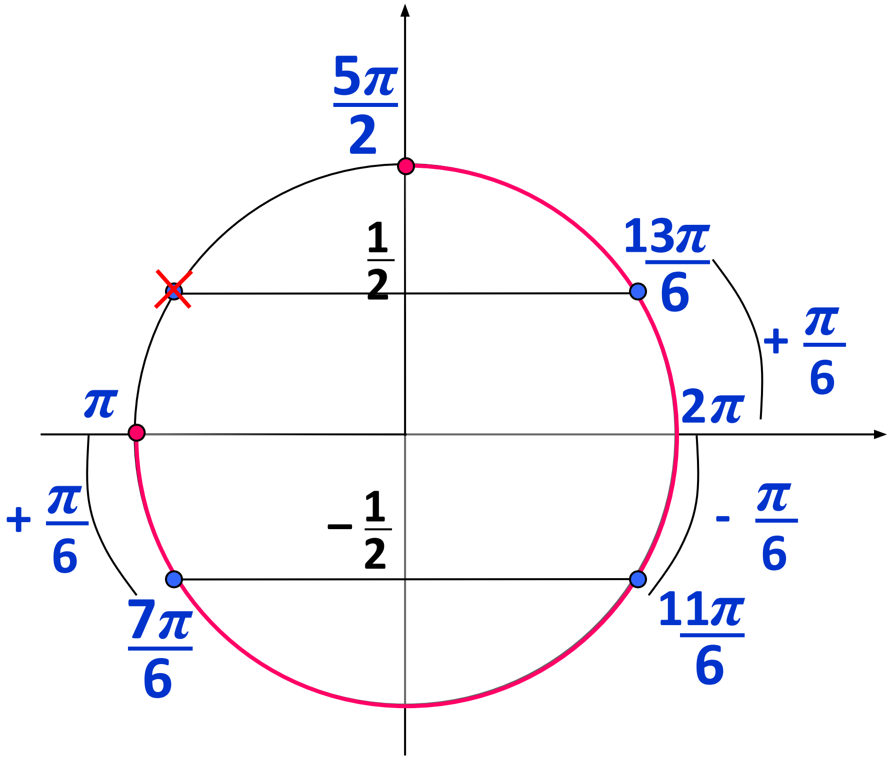
$$\sin^2 x = \frac{1}{4}$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \qquad \sin x = -\frac{1}{2}$$



$$а).\ Ответ: x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k,\ \ k \in Z$$

б). Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$



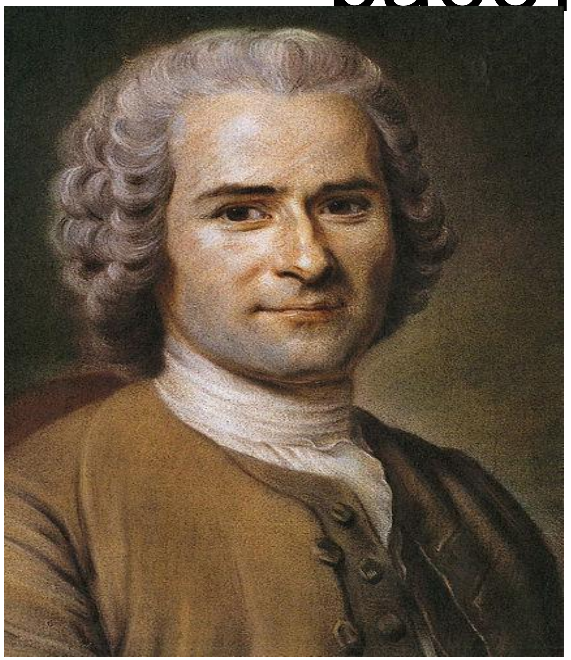
$$б).\ Ответ: \frac{7\pi}{6};\ \frac{11\pi}{6};\ \frac{13\pi}{6}.$$

Решение тригонометрического уравнения с последующим выбором корней из заданного промежутка эксперты оценивают выполнение задания по следующим критериям:

- обоснованно получены ответы в обоих пунктах – ***2 балла*** (это макс. балл);
- обосновано решение в пункте а или б – ***1 балл;***
- решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше – ***0 баллов***.

«Вы - талантливые дети! Когда – нибудь вы сами приятно поразитесь, какие вы умные, как много вы сумеете, если будете постоянно работать над собой…»

Жан-Жак Руссо

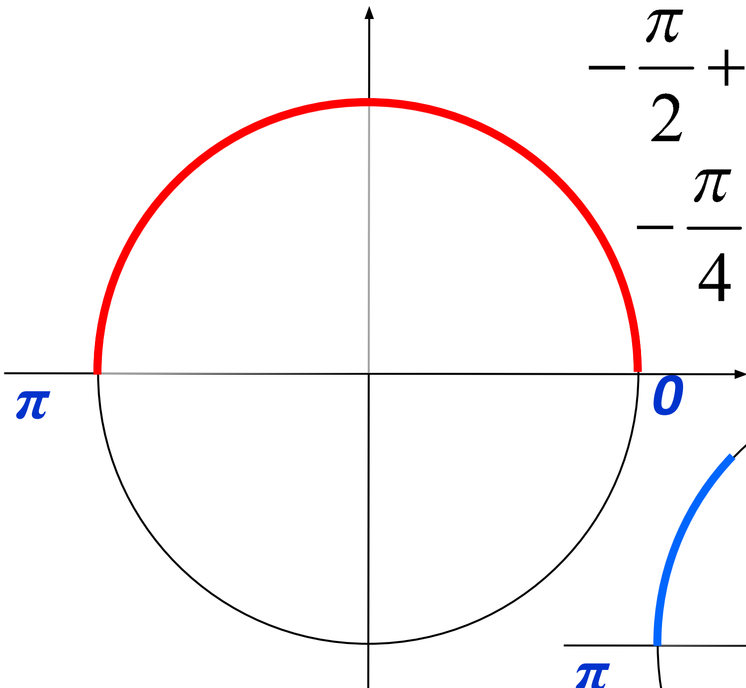


а). Решите уравнение $\sqrt{\sin x} = \sqrt{\cos 2x}$

б). Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\ \frac{7\pi}{2}\right]$

Найдем ОДЗ для уравнения (область допустимых значений уравнения)

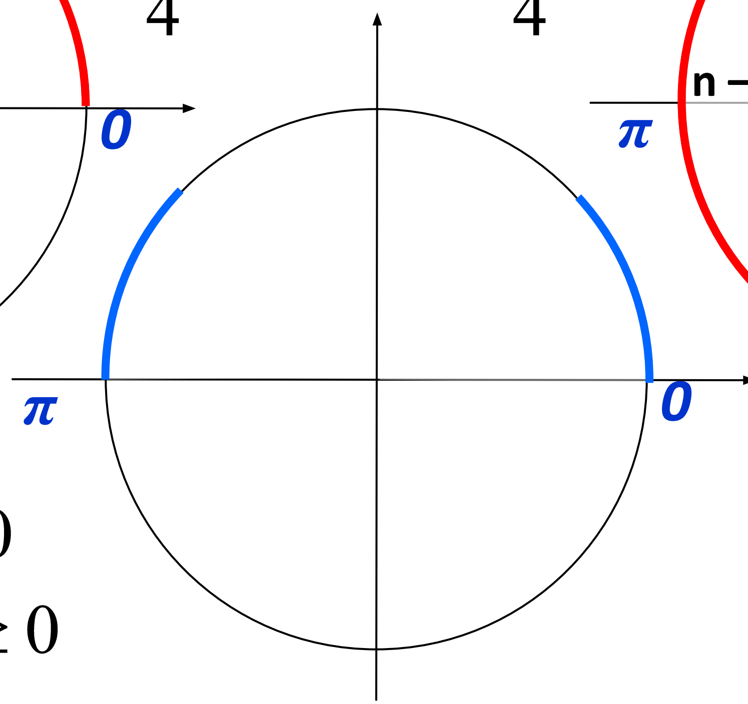
$$\sin x \geq 0$$

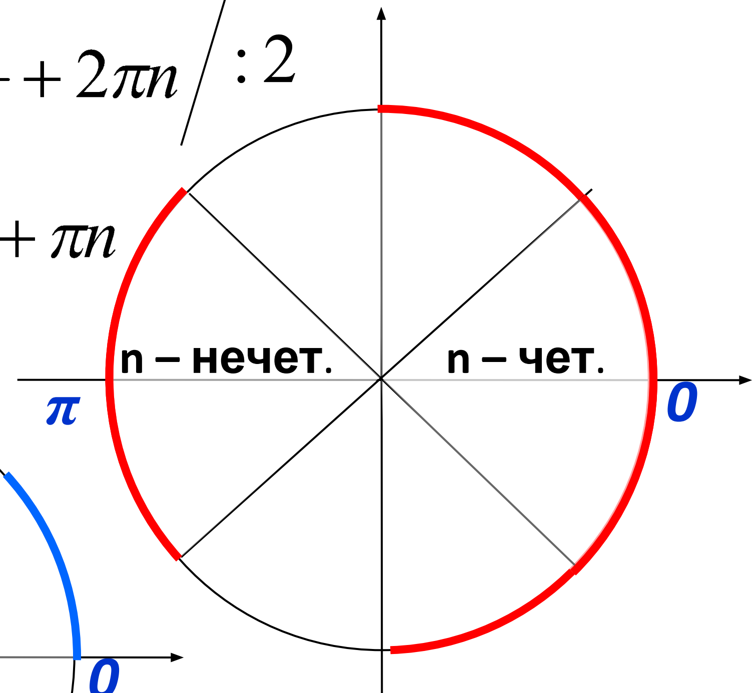


$$\cos 2x \geq 0$$

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq 2x \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad / :2$$

$$-\frac{\pi}{4} + \pi n \leq x \leq \frac{\pi}{4} + \pi n$$





Для аргумента x

$$\begin{cases} \sin x \geq 0 \\ \cos 2x \geq 0 \end{cases}$$

Отбор корней с помощью решения неравенств

б). Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\ \frac{7\pi}{2}\right]$

n=1

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$$

$$\left[2\pi;\ \frac{7\pi}{2}\right]\quad \le \quad / : \pi$$

$$2 \le \frac{1}{6} + 2n \le \frac{7}{2} \quad / -\frac{1}{6}$$

$$\frac{11}{6} \le 2n \le \frac{20}{6} \quad / : 2$$

$$\frac{11}{12} \le n \le \frac{20}{12}$$

$$n = 1, \quad x = \frac{13\pi}{6}$$

n=1

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$$

$$\left[2\pi;\ \frac{7\pi}{2}\right]\quad \le \quad / : \pi$$

$$2 \le \frac{5}{6} + 2n \le \frac{7}{2} \quad / -\frac{5}{6}$$

$$\frac{7}{6} \le 2n \le \frac{16}{6} \quad / : 2$$

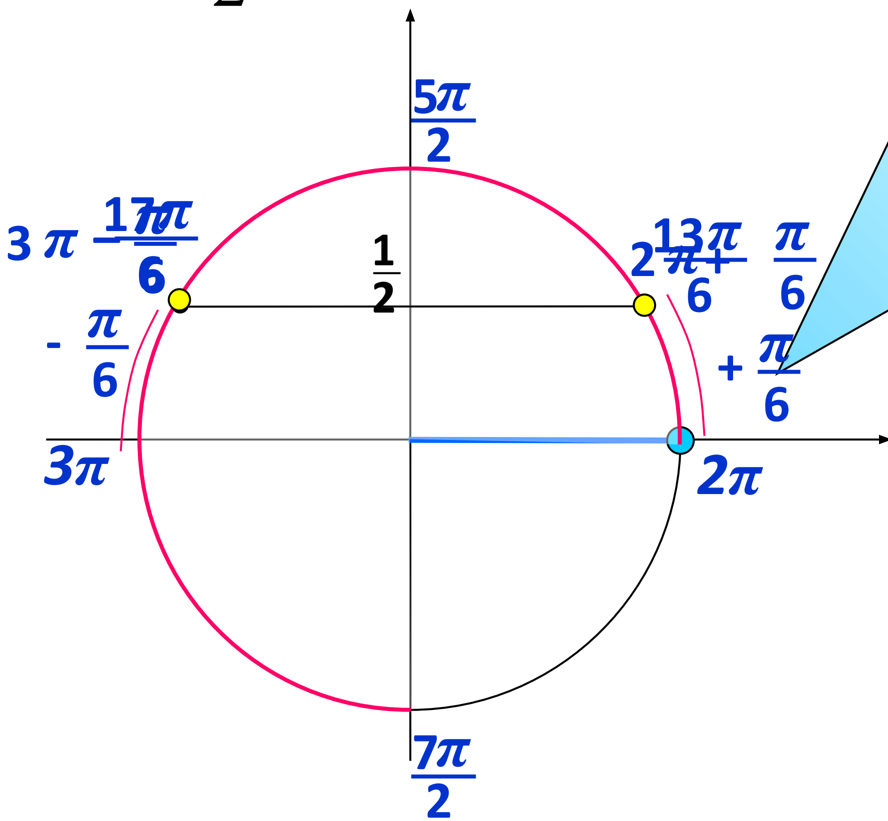
$$\frac{7}{12} \le n \le \frac{16}{12}$$

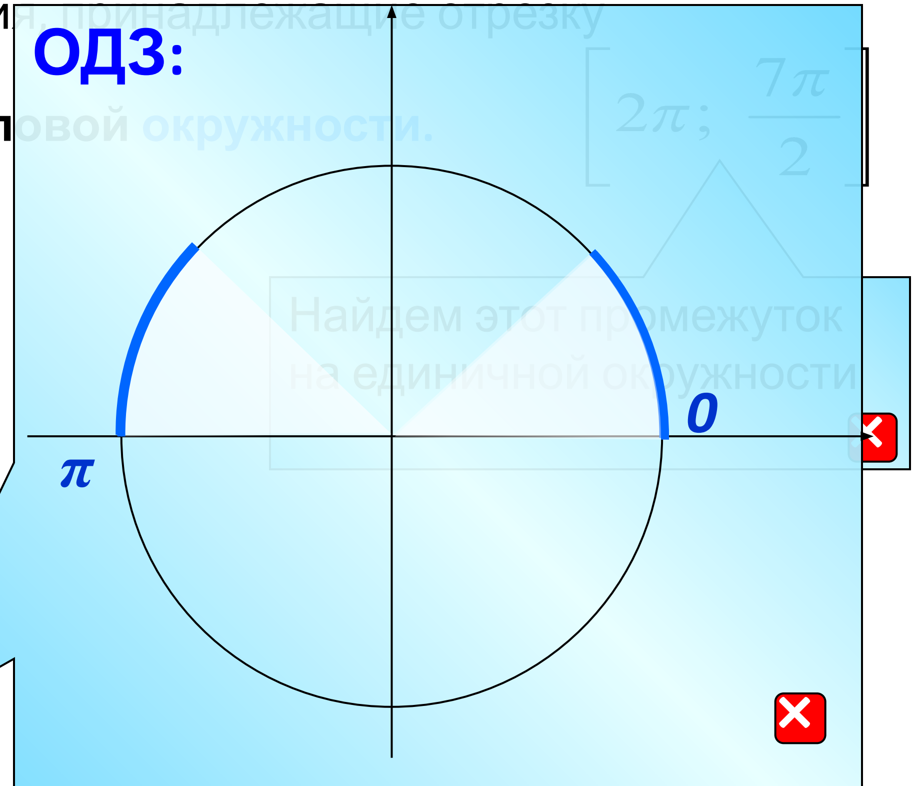
$$n = 1, \quad x = \frac{17\pi}{6}$$

б). Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\ \frac{7\pi}{2}\right]$

Отбор корней с помощью числовой окружности.

$$\sin x = \frac{1}{2}$$





$$2\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{12\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{13\pi}{6}.$$

$$3\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{18\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{17\pi}{6}.$$

б). $\dfrac{13\pi}{6};\ \dfrac{17\pi}{6}$