- **Пример**. Найти частные производные функции

$$z = x^2 y + \frac{x}{y}$$

- **Решение.** Полагая *y* = const, находим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + \frac{1}{y}$$

- Полагая *x* = const, находим

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cdot 1 + x\left(-\frac{1}{y^2}\right) = x^2 - \frac{x}{y^2}$$

- **Пример.** Найти значения частных производных функции

$$u = \ln(x^2 + y^2) + xyz$$

в точке $M(1, -1, 0)$.

- **Решение.** Полагая *y* = const, *z* = const, находим

$$\frac{\partial u}{\partial x}_{y,z=c} = \frac{1}{x^2+y^2}(2x+0)+1\cdot yz =$$

$$= \frac{2x}{x^2+y^2}+yz\Bigg|_{\grave{I}} = \frac{2}{1+1}+0=1$$

- Аналогично находим

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{x,z=c} = \frac{1}{x^2+y^2}(0+2y)+1\cdot xz =$$

$$= \left.\frac{2y}{x^2+y^2}+xz\right|_M = \frac{-2}{1+1}+0=-1$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{x,y=c} = 0+1\cdot xy = xy\big|_M = -1$$

- **Геометрическим смыслом** частной производной (например, $\partial z/\partial x$) является тангенс угла наклона касательной, проведенной в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ к сечению поверхности плоскостью $y = y_0$.

- Предположим, что функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)$$

- Эти производные в свою очередь являются функциями независимых переменных *x* и *y*. Будем называть $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ *частными производными 1-го порядка*.

- *Частными производными 2-го порядка* называются частные производные от частных производных 1-го порядка.
- Для функции $z = f(x, y)$ двух переменных можно найти четыре частные производные 2-го порядка, которые обозна-чаются следующим обр-м:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x,y);$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y);\\
&\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x,y);
\end{aligned}\right\}\ \text{смешанные частные производные}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}(x,y).$$

- В общем случае смешанные частные производные могут не совпадать, однако для них справедлива теорема:
- **Теорема**. Если смешанные частные производные f''_{xy} и f''_{yx} непрерывны в некоторой точке *M*(*x*, *y*), то они равны, т. е.

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$$

- Частными производными *n*–го порядка называются частные производные от частных производных (*n* – 1)–го порядка.
- Их обозначают

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^n}, \quad \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y}, \quad \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-2}\partial y^2}$$

и т. д.

- Частные производные любого порядка, взятые по различным переменным, называются смешанными.

- **Пример.** Найти частные производные 2-го порядка функции

$$z = x^3 y^2 + \sin(xy + 1)$$

- **Решение.** Последовательно находим

$$\frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{y=c} = 3x^2y^2 + y\cos(xy+1);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{x=c} = 2x^3y + x\cos(xy+1);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2y^2 + y\cos(xy+1)\right)\underset{y=c}{=}$$

$$\underset{y=c}{=} 6xy^2 - y^2\sin(xy+1);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2y^2 + y\cos(xy+1)\right)\underset{x=c}{=}$$

$$\underset{x=c}{=} 6x^2y + \cos(xy+1) - yx\sin(xy+1);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x^3 y + x\cos(xy+1)\right)\underset{y=c}{=}$$

$$\underset{y=c}{=} 6x^2 y + \cos(xy+1) - yx\sin(xy+1)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(2x^3 y + x\cos(xy+1)\right)\underset{x=c}{=}$$

$$\underset{x=c}{=} 2x^3 - x^2\sin(xy+1)$$

§ 5. Дифференциал функции нескольких переменных

- Рассмотрим функцию $z = f(x, y)$. Дадим аргументу x приращение Δx, а аргументу y приращение Δy. Тогда z получит приращение

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

которое называется *полным приращением функции z.*

- Предположим, что $f(x, y)$ в точке $M(x, y)$ имеет непрерывные частные производные.

- **Определение**. *Дифференциалом 1-го порядка* функции $z = f(x, y)$ называется главная часть полного приращения Δz этой функции, линейная относительно Δx и Δy, обозначается символом dz или df и вычисляется по формуле

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

- Так как дифференциалы независимых переменных совпадают с их приращениями, т.е. dx = Δ*x*, dy = Δ*y*, то эту формулу можно записать в виде:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

- **Геометрическим смыслом** полного дифференциала функции двух переменных f(x, y) в точке (x_0, y_0) является приращение аппликаты (координаты z) касательной плоскости к поверхности при переходе от точки (x_0, y_0) к точке $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$.

- Геометрический смысл полного дифференциала функции двух переменных является пространственным аналогом геометрического смысла дифференциала функции одной переменной.

- Дифференциалом 2-го порядка функции $z = f(x, y)$ называется дифференциал от ее дифференциала 1-го порядка и обозначается

$$d^2 z = d(dz)$$

- Если все частные производные 2-го порядка функции $z = f(x, y)$ непрерывны, то имеет место формула:

$$\mathrm{d}^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2$$

- Аналогично определяется дифференциал *n*–го порядка:

$$\mathrm{d}^n z = \mathrm{d}(\mathrm{d}^{n-1} z)$$

- **Пример.** Найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции

$$z = x^2 y + \frac{x}{y}$$

- **Решение.** Найдем частные производные 1-го и 2-го порядков:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + \frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 - \frac{x}{y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2xy + \frac{1}{y}\right) \underset{y=c}{=} 2y + 0 = 2y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(2xy + \frac{1}{y}\right) \underset{x=c}{=} 2x - \frac{1}{y^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 - \frac{x}{y^2}\right) \underset{y=c}{=} 0 - x(-2y^{-3}) = \frac{2x}{y^3}$$

- Следовательно, дифференциалы 1-го и 2-го порядков запишутся в виде:

$$dz = (2xy + \frac{1}{y})dx + (x^2 - \frac{x}{y^2})dy$$

$$d^2z = 2y\,dx^2 + 2(2x - \frac{1}{y^2})dx\,dy + \frac{2x}{y^3}dy^2$$

Приближенные вычисления с помощью полного дифференциала

- Пусть функция f(x, y) дифференцируема в точке (x, y). Найдем полное приращение этой функции:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \Delta z$$

- Если подставить в эту формулу выражение

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

то получим приближенную формулу:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx$$

$$\approx f(x,y) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y$$

- <u>Пример.</u> Вычислить приближенно значение

$$\sqrt{1{,}04^{1{,}99} + \ln 1{,}02}$$

исходя из значения функции

$$u = \sqrt{x^y + \ln z}$$

при x = 1, y = 2, z = 1

- **Решение.** Из заданного выражения определим

$\Delta x = 1{,}04 – 1 = 0{,}04,$

$\Delta y = 1{,}99 – 2 = -0{,}01,$

$\Delta z = 1{,}02 – 1 = 0{,}02.$

- Найдем значение функции u(x, y, z) = $\sqrt{1^2 + \ln 1} = 1$

- Находим частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y \cdot x^{y-1}}{2\sqrt{x^y + \ln z}} = \frac{2 \cdot 1}{2\sqrt{1}} = 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^y \ln x}{2\sqrt{x^y + \ln z}} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\frac{1}{z}}{2\sqrt{x^y + \ln z}} = \frac{1}{2}$$

- Полный дифференциал функции u равен:

$$du =$$

$$= 0{,}04 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - 0{,}01 \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + 0{,}02 \cdot \frac{\partial u}{\partial z} =$$

$$= 1 \cdot 0{,}04 - 0 \cdot 0{,}01 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}02 =$$

$$= 0{,}04 + 0{,}01 = 0{,}05$$

$$\sqrt{1{,}04^{1{,}99}+\ln 1{,}02}\approx$$

$$\approx u(1{,}2{,}1)+du=$$

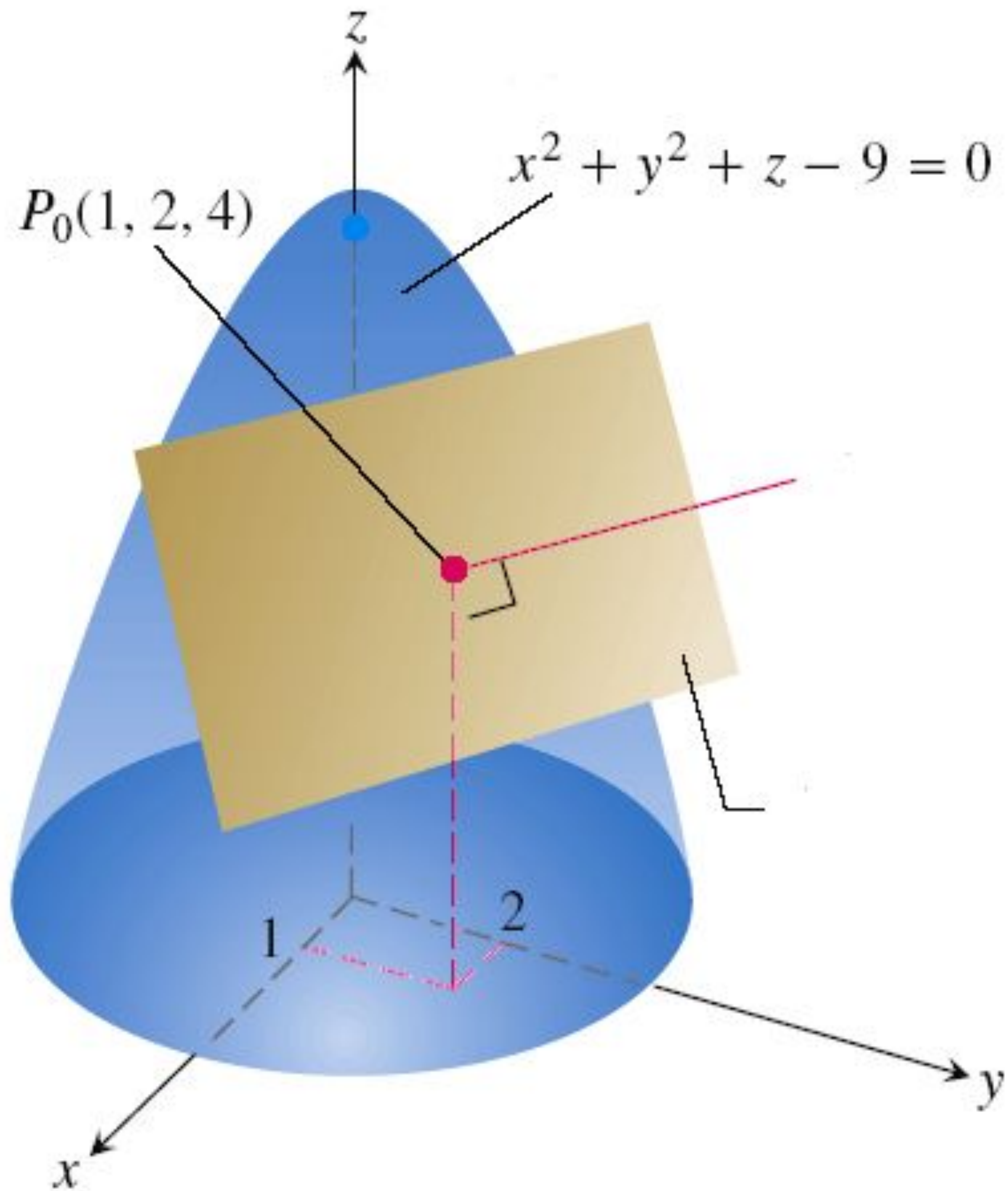
$$=1+0{,}05=1{,}05$$

- Точное значение этого выражения: 1,049275225687319176.

§ 6. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

- *Касательной плоскостью* к поверхности в ее точке M_0 называется плоскость, которая содержит все касательные к кривым, проведенным на поверхности через эту точку.

- *Нормалью к поверхности* в точке M_0 называется прямая, проходящая через эту точку и перпендикулярная касательной плоскости, проведенной в данной точке.



z
$x^2 + y^2 + z - 9 = 0$
$P_0(1, 2, 4)$
1
2
x
y

- Если поверхность задана уравнением $F(x, y, z) = 0$ то уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид:

$$F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) +$$

$$+ F'_z(M_0)(z - z_0) = 0$$

- Уравнения нормали, проведенной к поверхности в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, запишутся следующим образом:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}$$

- Если поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, то уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид:

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) +$$

$$+ f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

- а уравнения нормали запишутся так:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

- **Пример.** Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

$$x^2 + 2y^2 + 3xy + xz + 3yz + 1 = 0$$

в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, если

$$x_0 = 2, \quad y_0 = -1.$$

- **Решение.** Подставляя x_0 и y_0 в уравнение поверхности, находим значение z_0:

$$4 + 2(-1)^2 + 3 \cdot 2(-1) + 2z_0 + 3(-1)z_0 + 1 = 0$$

откуда находим $z_0 = 1$. Следовательно, $M_0(2, -1, 1)$ – точка касания.

- По условию задачи поверхность задана неявно. Обозначим

$$F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3xy + xz + 3yz + 1$$

и найдем частные производные в точке $M_0(2, -1, 1)$:

$$F'_x = 2x + 3y + z,$$

$$F'_x(M_0) = 2 \cdot 2 + 3(-1) + 1 = 2$$

$$F'_y = 4y + 3x + 3z,$$

$$F'_y(M_0) = 4 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 5$$

$$F'_z = x + 3y,$$

$$F'_z(M_0) = 2 + 3 \cdot (-1) = -1$$

- Подставляем найденные значения частных производных в уравнение касательной плоскости

$$F'_x(M_0)(x-x_0)+F'_y(M_0)(y-y_0)+$$

$$+F'_z(M_0)(z-z_0)=0$$

и получаем искомое уравнение касательной плоскости:

$$2(x-2)+5(y+1)-1(z-1)=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x+5y-z+2=0$$

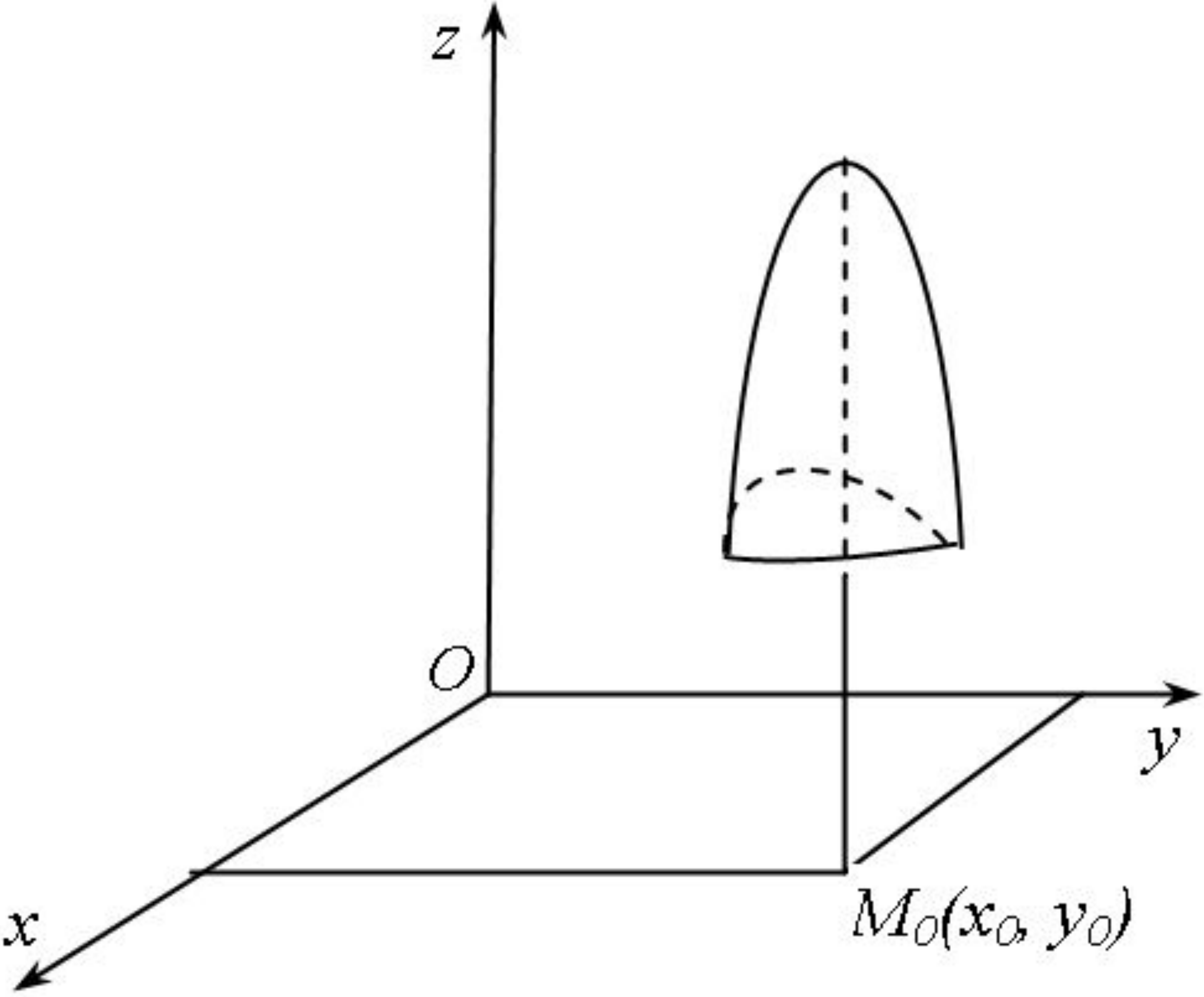
- Уравнения нормали имеют вид

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{5}=\frac{z-1}{-1}$$

§ 7. Экстремум функции двух переменных

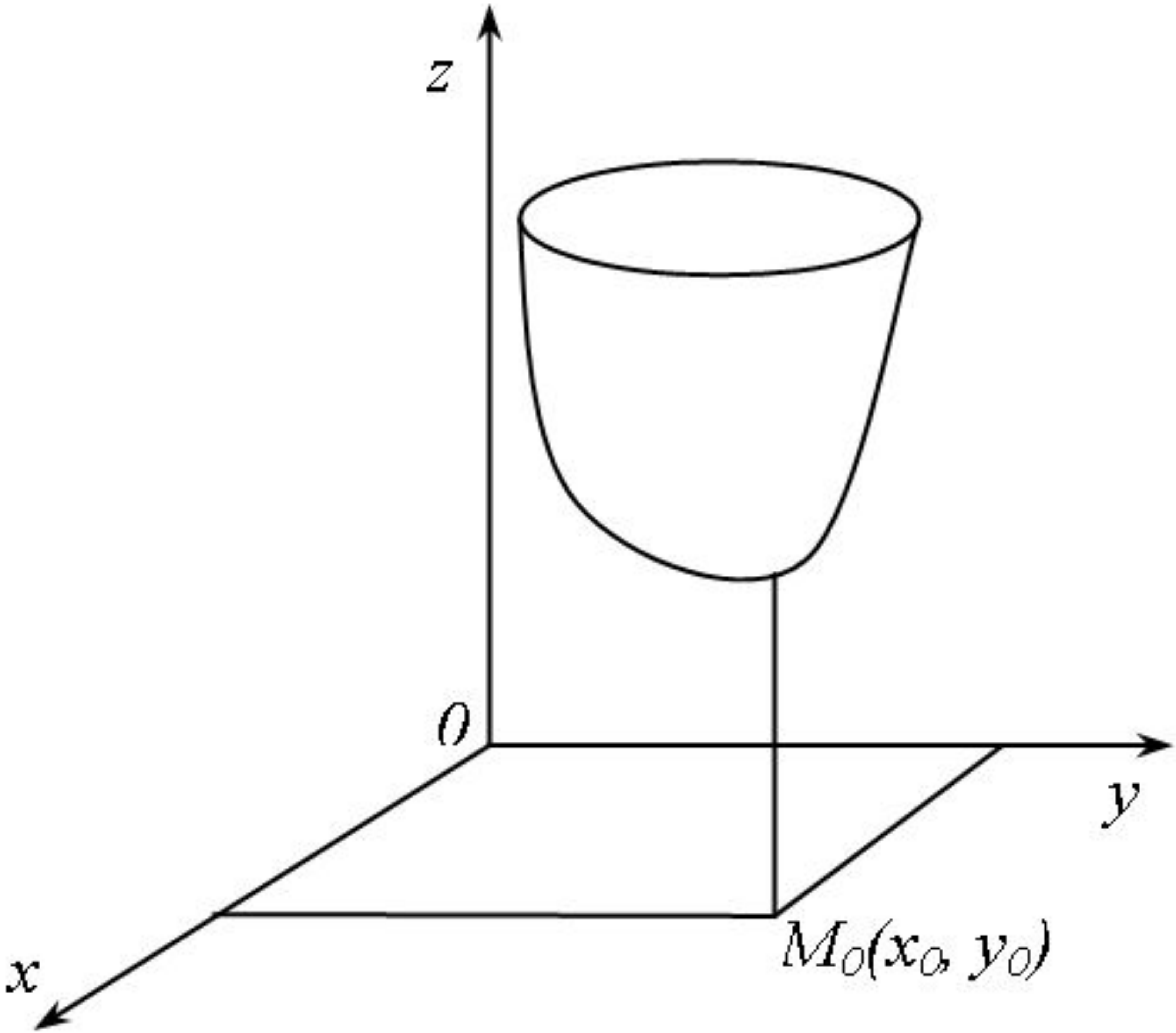
- **Определение**. Функция $z = f(x, y)$ имеет *максимум* в точке $M_0(x_0, y_0)$, если существует такая окрестность этой точки, что для любых точек $M(x, y)$ из этой окрестности выполняется неравенство

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$$

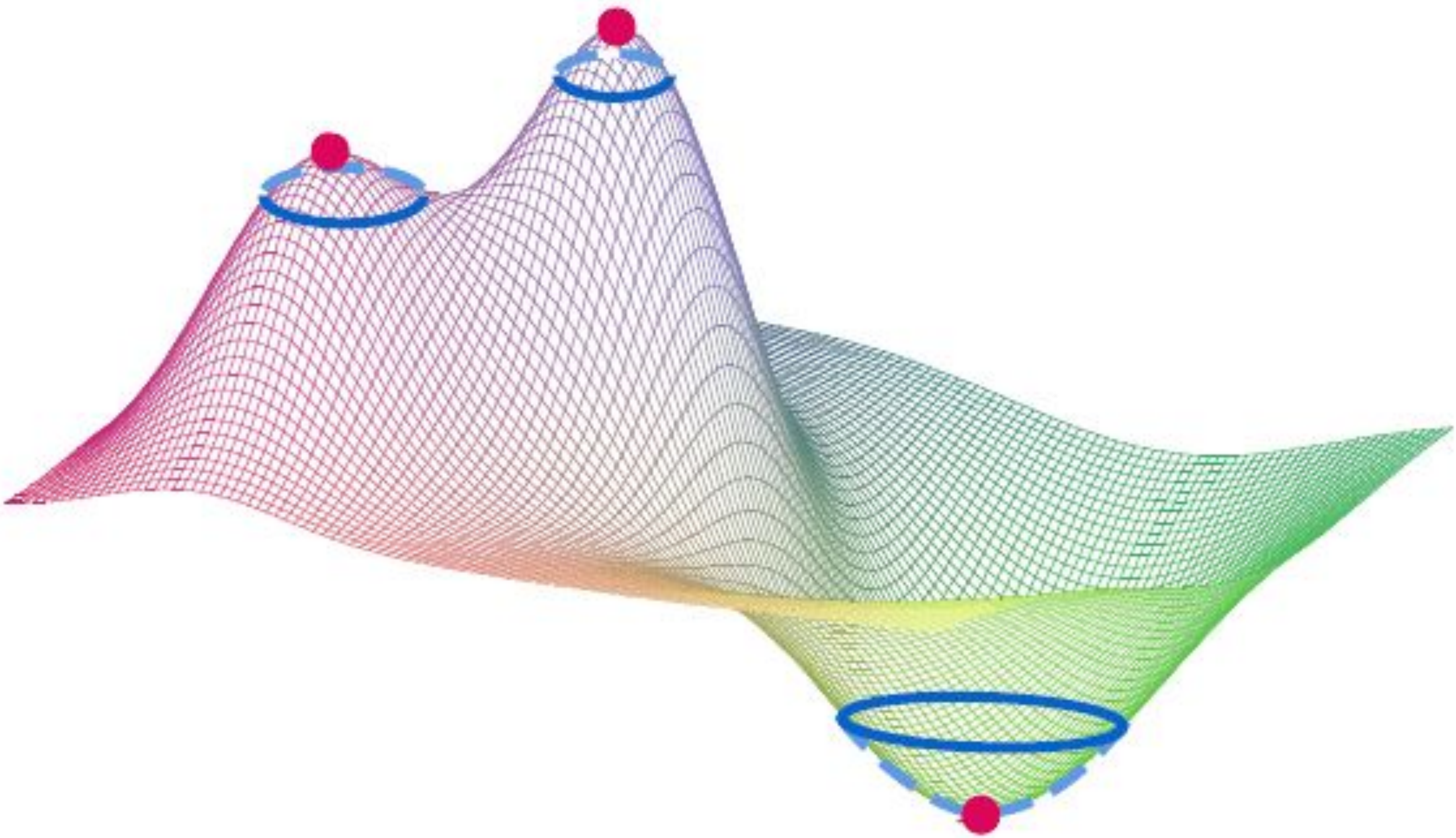

z
O
y
x
M0(x0, y0)

- **Определение.** Функция $z = f(x, y)$ имеет *минимум* в точке $M_0(x_0, y_0)$, если существует такая окрестность этой точки, что для любых точек $M(x, y)$ из этой окрестности выполняется неравенство

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$$


z
0
y
x
$M_0(x_0, y_0)$

- Точки максимума и минимума называют *точками экстремума*, а значения функции в этих точках называются *экстремальными*.



- **Теорема 1 (*необходимые условия экстремума*).** *Если дифференцируемая функция* $z = f(x, y)$ *имеет экстремум в точке* $M_0(x_0, y_0)$, *то ее частные производные в этой точке равны нулю, т. е.*

$$\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]_{M_0} = 0 \qquad \left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]_{M_0} = 0$$

- Функция $z = f(x, y)$ может иметь экстремум и в точках, где функция непрерывна, но частные производные не существуют.

- Точки, в которых $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, называются *стационарными* точками функции $z = f(x, y)$.

- **Теорема 2 (*достаточные условия экстремума*).** *Пусть* $M_0(x_0, y_0)$ *является стационарной точкой функции* $z = f(x, y)$ *и в ее окрестности существуют непрерывные частные производные 2-го порядка.*

- *Обозначим*

$$\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right]_{M_0} = A \quad \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right]_{M_0} = B \quad \left[\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right]_{M_0} = C$$

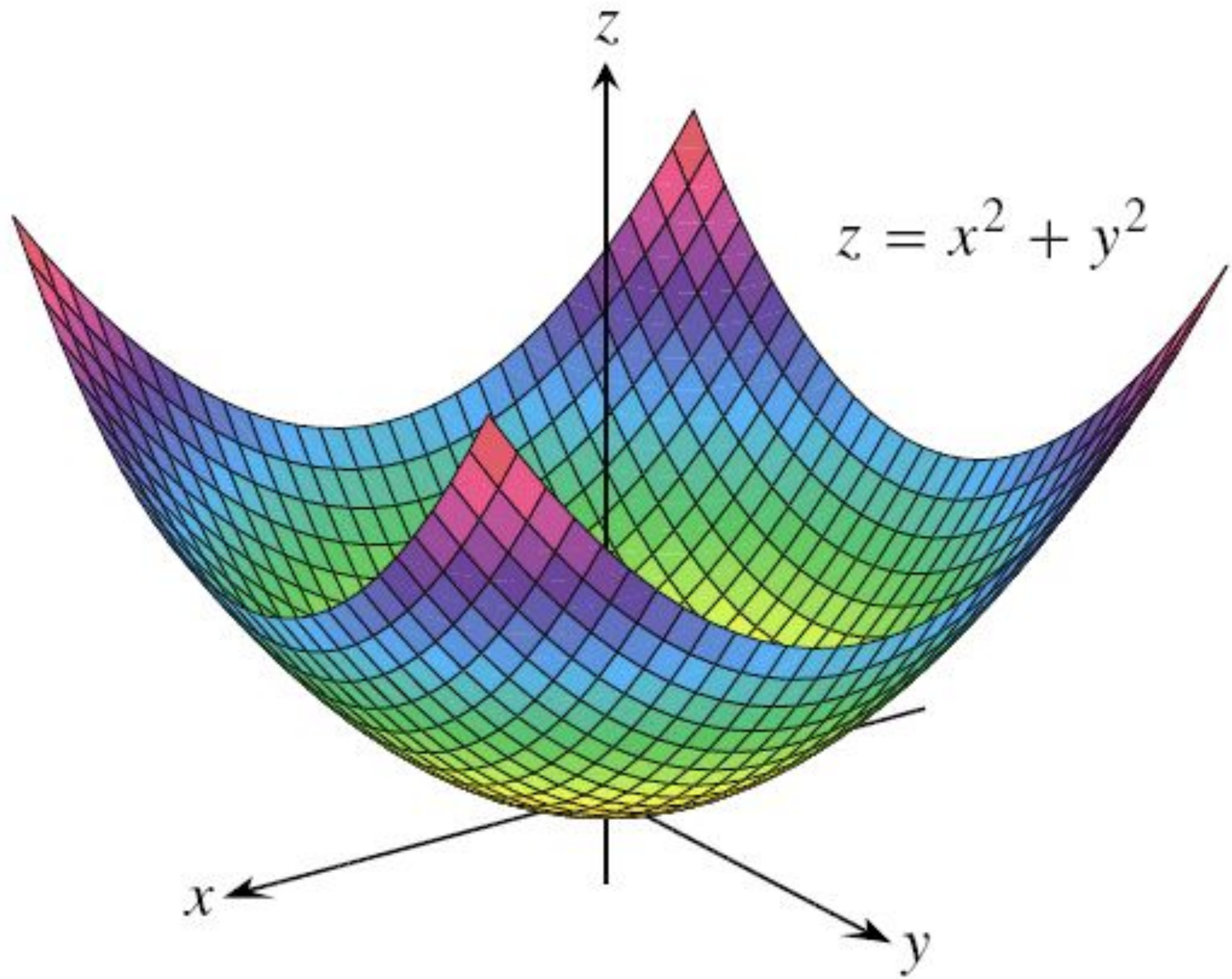
и составим определитель

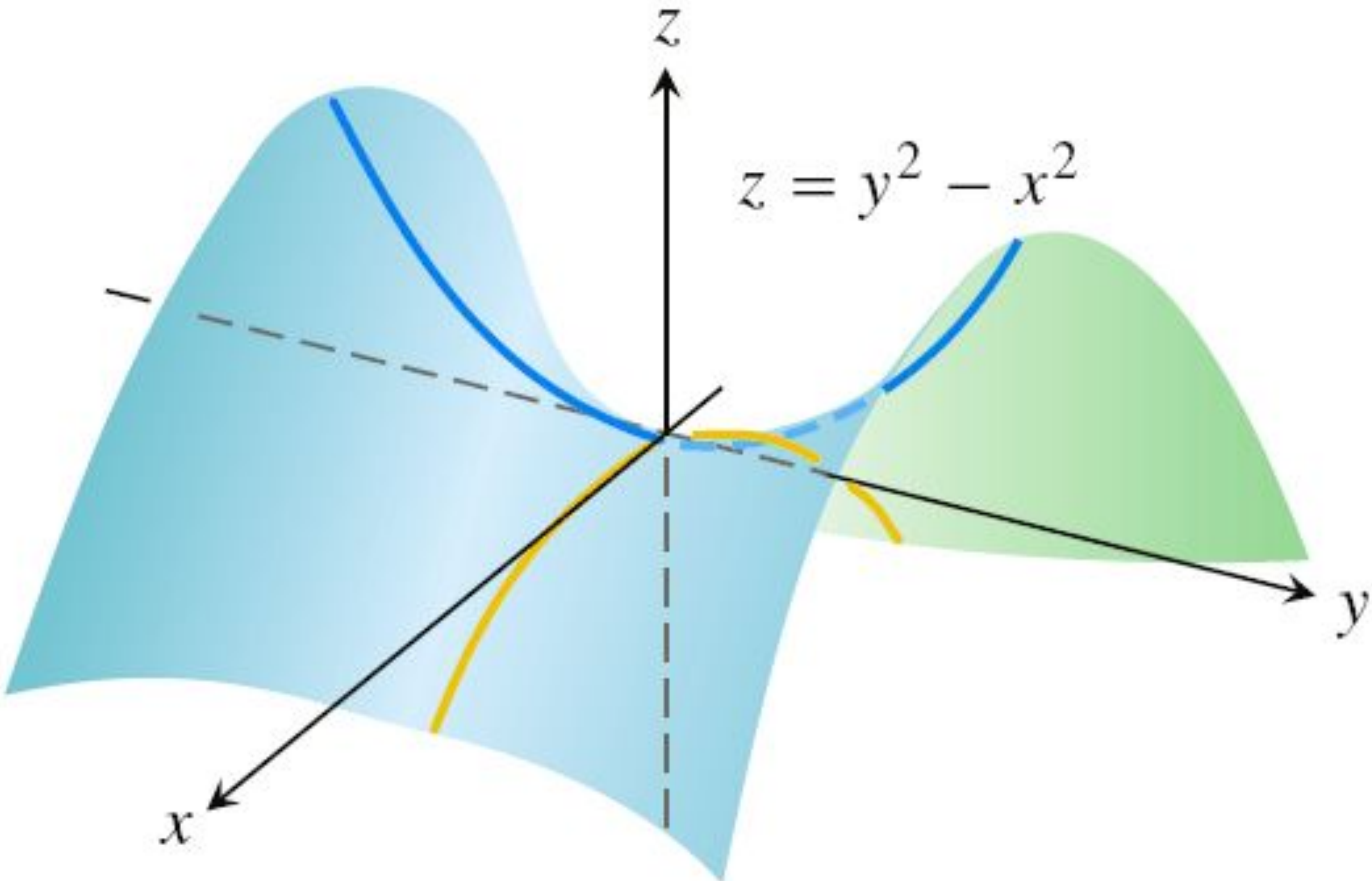
$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$$

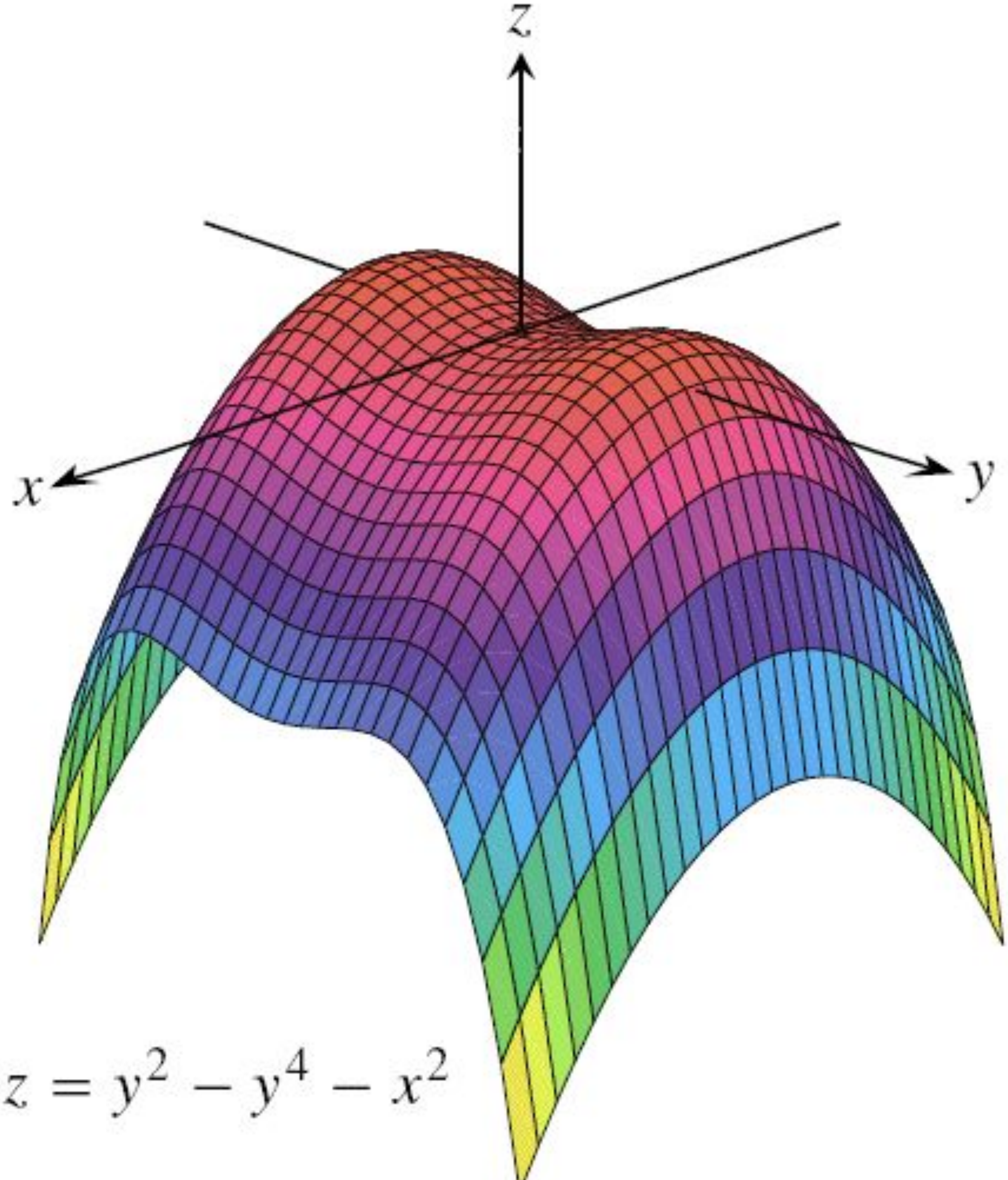
Тогда:

- *1) если* $\Delta < 0$, *то в точке* M_0 *нет экстремума;*
- *2) если* $\Delta > 0$, *то в точке* M_0 *есть экстремум, причем максимум при* $A < 0$

  и минимум при $A > 0$;
- *3) если* $\Delta = 0$, *то требуется дополнительное исследование.*


z
$z = x^2 + y^2$
x
y


z
$z = y^2 - x^2$
y
x



$z = y^2 - y^4 - x^2$

- **Пример.** Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^3 + y^3 - 3xy$$

- **Решение.** Находим частные производные 1-го порядка

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x.$$

- Стационарные точки найдем из системы уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0, \\ 3y^2 - 3x = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y = 0, \\ y^2 - x = 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2, \\ x^4 - x = 0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$x(x^3 - 1) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$x_1 = 0, \;\; x_2 = 1, \;\; y_1 = 0, \;\; y_2 = 1.$$

- Получили две стационарные точки: $M_1(0, 0)$, и $M_2(1, 1)$.

- Находим частные производные 2-го порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y$$

- Исследуем каждую стационарную точку.

- В точке $M_1(0, 0)$ имеем:
$A = 0$, $B = -3$, $C = 0$.

- Тогда $$\Delta = AC - B^2 = -9 < 0$$

- Так как $\Delta < 0$, то в этой точке нет экстремума.

- В точке $M_2(1, 1)$ имеем:
  $A = 6$, $B = -3$, $C = 6$.
- В этом случае

$$\Delta = 36 - 9 = 27 > 0$$

- Так как $\Delta > 0$ и $A > 0$, то в этой точке функция имеет минимум

$$z_{\min} = z\ (1; 1) = 1 + 1 - 3 = -1$$