

Лекция 10. Дифференциал, его геометрический смысл. Производные высших порядков, формула Лейбница, дифференциалы высших порядков.

Пусть задана функция $y = f(x)$ на (a,b) . Точка $x_0 \in (a,b)$. Придадим аргументу x в точке x_0 некоторое приращение Δx , тогда функция получает соответствующее приращение

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Δy будем так же называть **ПОЛНЫМ** приращением функции, соответствующим приращению Δx .

Определение 1. Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0 , если полное приращение представимо в следующем виде:

$$\Delta y = P \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x,$$

где: $P = const, \alpha(\Delta x) \rightarrow 0.$

$\Delta x \rightarrow 0$

Пример

Исследовать на дифференцируемость в точке x_0 функцию $f(x) = 4x^2 - x + 8$.

Решение

$$D(f) = R.$$

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \\ &= 4(x_0 + \Delta x)^2 - (x_0 + \Delta x) + 8 - 4x_0^2 + x_0 - 8 = \\ &= 4x_0^2 + 8x_0\Delta x + 4\Delta x^2 - x_0 - \Delta x - 4x_0^2 + x_0 = \\ &= (8x_0 - 1)\Delta x + 4\Delta x\Delta x.\end{aligned}$$

$$\alpha(\Delta x) = 4\Delta x, P = 8x_0 - 1 = f'(x_0).$$

Следовательно, функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 .

Определение 2. Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0 , если она в этой точке имеет производную $f'(x_0)$.

Теорема (о равносильности двух определений дифференцируемой функции)

Определения 1 и 2 равносильны. Иными словами, функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0 тогда и только тогда, когда полное приращение Δy , соответствующее приращению Δx аргумента x в точке x_0 представимо в виде:

$$\Delta y = P \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x,$$

где: $P = const, \alpha(\Delta x) \rightarrow 0.$

$\Delta x \rightarrow 0$

Доказательство

Необходимость. Дано: $f'(x)$. Надо доказать:

$$\Delta y = P \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x,$$

где: $P = \text{const}$, $\alpha(\Delta x) \rightarrow 0$.

$\Delta x \rightarrow 0$

Пусть существует $f'(x_0)$ и мы знаем, что это есть:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x)$$

где: $\alpha(\Delta x) \rightarrow 0$.

$\Delta x \rightarrow 0$

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x, \quad \text{где: } \alpha(\Delta x) \rightarrow 0.$$

$\Delta x \rightarrow 0$

А это и есть нужное представление где $P \equiv f'(x_0)$

Достаточность. Дано: $\Delta y = P \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$.

Надо доказать: существование $f'(x)$.

Пусть : $\Delta y = P \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$,

где: $P = const, \alpha(\Delta x) \rightarrow 0$.

$\Delta x \rightarrow 0$

Разделим на Δx : $\Delta y/\Delta x = P + \alpha(\Delta x)$, где: $\alpha(\Delta x) \rightarrow 0$.

$\Delta x \rightarrow 0$

Таким образом, функция представима в виде константы и бесконечно малой величины, таким образом, по теореме об асимптотическом

разложении): $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = P$, а значит $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$

существует $f'(x_0) = P$.

Исходя из предыдущего, можно сказать, что $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 , если:

$$\Delta y = \underbrace{f'(x_0) \cdot \Delta x}_{\text{I}} + \underbrace{\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x}_{\text{II}}, \text{ где: } \alpha(\Delta x) \rightarrow 0. \text{ Ч.т.д.}$$

$\Delta x \rightarrow 0$

I

II

Первое слагаемое правой части I называется главной частью полного приращения Δy , оно содержит главную информацию о полном приращении. Второе слагаемое II мало влияет на Δy .

Определение 3. Главная часть полного приращения функции Δy линейная относительно приращения аргумента Δx (а именно: $f'(x_0) \cdot \Delta x$) называется дифференциалом этой функции в точке x_0 .

Обозначается $dy = df(x_0)$.

Таким образом, $dy = f'(x_0) \cdot \Delta x$ — переменная величина: различным Δx соответствуют различные значения дифференциала dy .

Определение 4. Дифференциалом аргумента x в точке x_0 называется его приращение Δx , т.е. по определению $dx = \Delta x$.

Это определение оправдывается следующим.
Рассмотрим функцию $f(x) = x$.
Дифференциал ее:

$$dy = df(x) = f'(x) \cdot \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x, \text{ т. е.: } dy = dx = \Delta x.$$

Действительно $dx = \Delta x$.

Перефразируем формулу для дифференциала следующим образом:

$$dy = f'(x_0) \cdot dx,$$

где x_0 - произвольная точка.

Отсюда: $f'(x_0) = \frac{dy}{dx} \Rightarrow$ производная есть

отношение таких дифференциалов.

Тем самым оправдывается определение:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Правила дифференцирования

Пусть $u = u(x)$, $v = v(x)$.

$$1. d(u \pm v) = du \pm dv;$$

$$2. d(uv) = vdu + udv;$$

$$3. d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2};$$

$$4. dc = 0 \quad (c = \text{const});$$

$$5. d(cu) = cdu \quad (c = \text{const}) \text{ – свойство однородности}$$

Доказательство

$$1. d(u \pm v) = (u \pm v)'dx = (u' \pm v')dx = u'dx \pm v'dx = du \pm dv;$$

Доказательство (продолжение)

$$\begin{aligned} 2. \quad d(uv) &= (uv)'dx = (u'v + v'u)dx = \\ &= v(u'dx) + u(v'dx) = vdu + udv; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad d\left(\frac{u}{v}\right) &= \left(\frac{u}{v}\right)' dx = \left(\frac{u'v - v'u}{v^2}\right) dx = \\ &= \frac{v(u'dx) - u(v'dx)}{v^2} = \frac{vdu - udv}{v^2}; \end{aligned}$$

$$4. \quad dc = c'dx = 0;$$

$$\begin{aligned} 5. \quad d(cu) &= (cu)'dx = (c'u + u'c)dx = \\ &= u(c'dx) + c(u'dx) = cdu. \end{aligned}$$

Механический смысл дифференциала

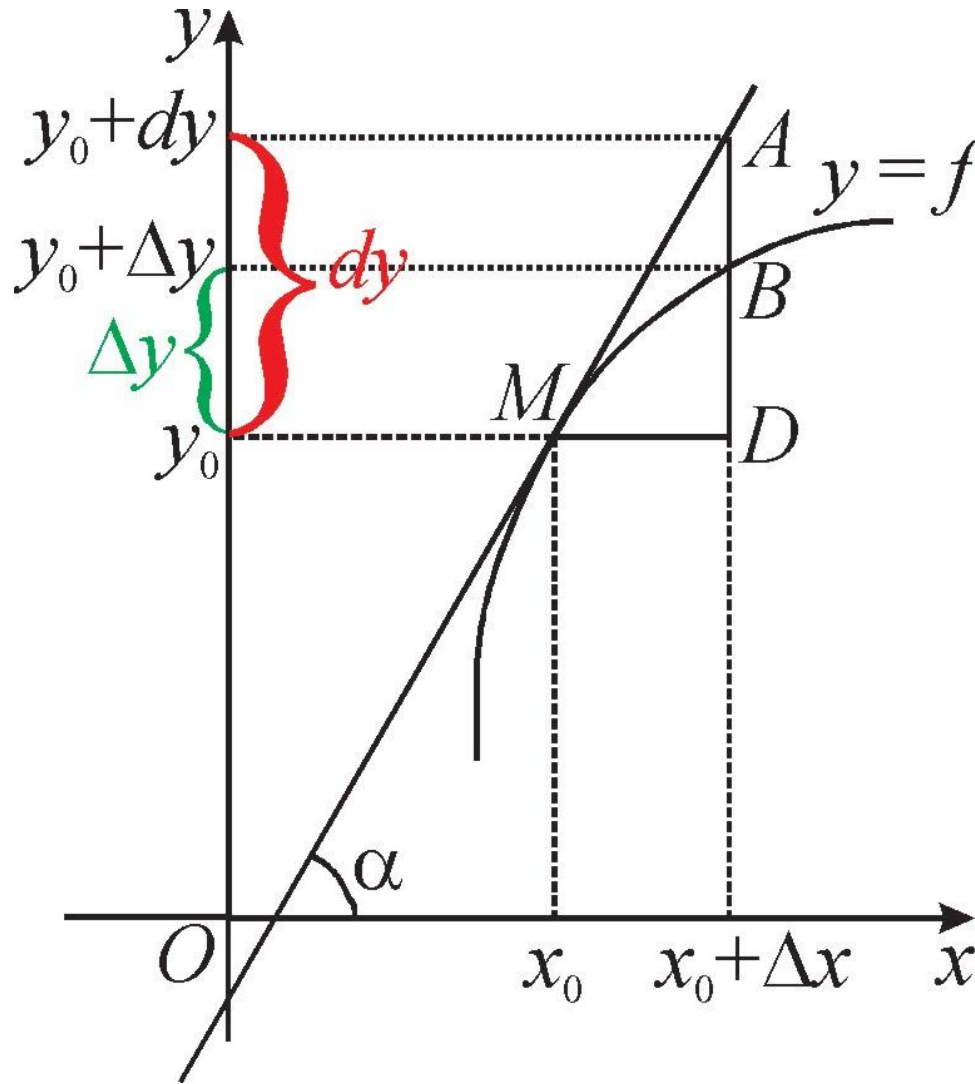
Возвращаемся к задаче о вычислении скорости. Пусть материальная точка совершает прямолинейное, вообще говоря неравномерное движение по закону: $s = f(t)$, где s – путь, пройденный за время t . Дифференциал функции:

$$ds = df(t_0) = f'(t_0)dt,$$

где $f'(t_0)$ – мгновенная скорость в момент времени t_0 .

Таким образом, механический смысл дифференциала заключается в следующем: ds – путь, который прошла бы точка за промежуток времени dt , если бы она двигалась равномерно со скоростью $f'(t_0)$, которую она имела в начале пути.

Геометрический смысл дифференциала



Пусть дана функция $y = f(x)$.

Проведем касательную к графику функции в точке $M(x_0, f(x_0))$.

Придадим аргументу x в точке x_0 некоторое приращение

$$\Delta x = MD.$$

Соответствующее приращение получит

$$\Delta y = DB.$$

Дифференциал:

$$\begin{aligned} dy &= df(x_0) = f'(x_0)dx = \operatorname{tg} \alpha \cdot dx = \\ &= (AD/MD) \cdot MD = AD. \end{aligned}$$

Следовательно, геометрический смысл дифференциала dy есть приращение ординаты касательной, соответствующее приращению аргумента Δx .

В отличие от дифференциала, Δy есть приращение ординаты самой кривой $y = f(x)$.

Инвариантность формы дифференциала (Инвариантность – неизменность).

Рассмотрим функцию $y = f(x)$. Ее дифференциал

$$dy = f'(x) \cdot dx, \quad (1)$$

где x – независимая переменная.

Оказывается, что эта формула остается прежней, когда x – зависимая переменная, т.е.

$$x = \phi(t).$$

В этом свойство инвариантности формулы (1).

Действительно, имеем: $y = f(\phi(t))$, считаем $\phi(t)$ дифференцируемой по t . Тогда существует производная $y'_t = y'_x \cdot x'_t$. Тогда можно вычислить дифференциал, исходя из аргумента t по « t »:

$$dy = y'_t dt = y'_x \cdot (x'_t \cdot dt) = y'_x \cdot dx = f'(x) \cdot dx. \quad \text{ч.т.д.}$$

Замечание. Форма дифференциала

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x$$

свойством инвариантности в отличие от формы

$$dy = f'(x) \cdot dx$$

не обладает, так как $y \Delta x$ и dx полное приращение функции $x = \phi(t)$, вообще говоря не совпадает.

Применение дифференциала при приближенных вычислениях

Как известно, если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 , то ее полное приращение представимо в виде:

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x, \text{ где: } \alpha(\Delta x) \rightarrow 0. \\ \Delta x \rightarrow 0$$

$$\text{Или } \Delta y = dy + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x, \text{ где: } \alpha(\Delta x) \rightarrow 0. \\ \Delta x \rightarrow 0$$

Причем, dy является главной частью приращения Δy . Поэтому:

$$\Delta y \approx dy.$$

Это равенство тем точнее, чем меньше приращение аргумента Δx . Тогда:

$$f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)(x - x_0), \text{ или}$$

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Это основная формула является основной для приближенных вычислений значений функции с помощью дифференциала. Она тем точнее, чем ближе точка x находится к точке x_0 .

Особенно часто эта формула используется когда $x_0 = 0$. В этом случае она принимает следующий вид:

$$f(x) \approx f(0) + f'(0) \cdot x$$

Она служит источником многих приближенных формул, если вместо $f(x)$ рассматривать конкретные функции.

Примеры

№ 1

$$f(x) = (1 + x)^\mu.$$

$$x_0 = 0,$$

Найдем:

$$f(0) = (1 + 0)^\mu = 1,$$

$$f'(x) = \mu(1 + x)^{\mu-1},$$

$$f'(0) = \mu(1 + 0)^{\mu-1} = \mu,$$

Тогда:

$$(1 + x)^\mu \approx 1 + \mu x.$$

Для $x \rightarrow 0$.

№ 2

$$f(x) = \ln(1 + x).$$

$$x_0 = 0,$$

Найдем:

$$f(0) = \ln(1 + 0) = 0,$$

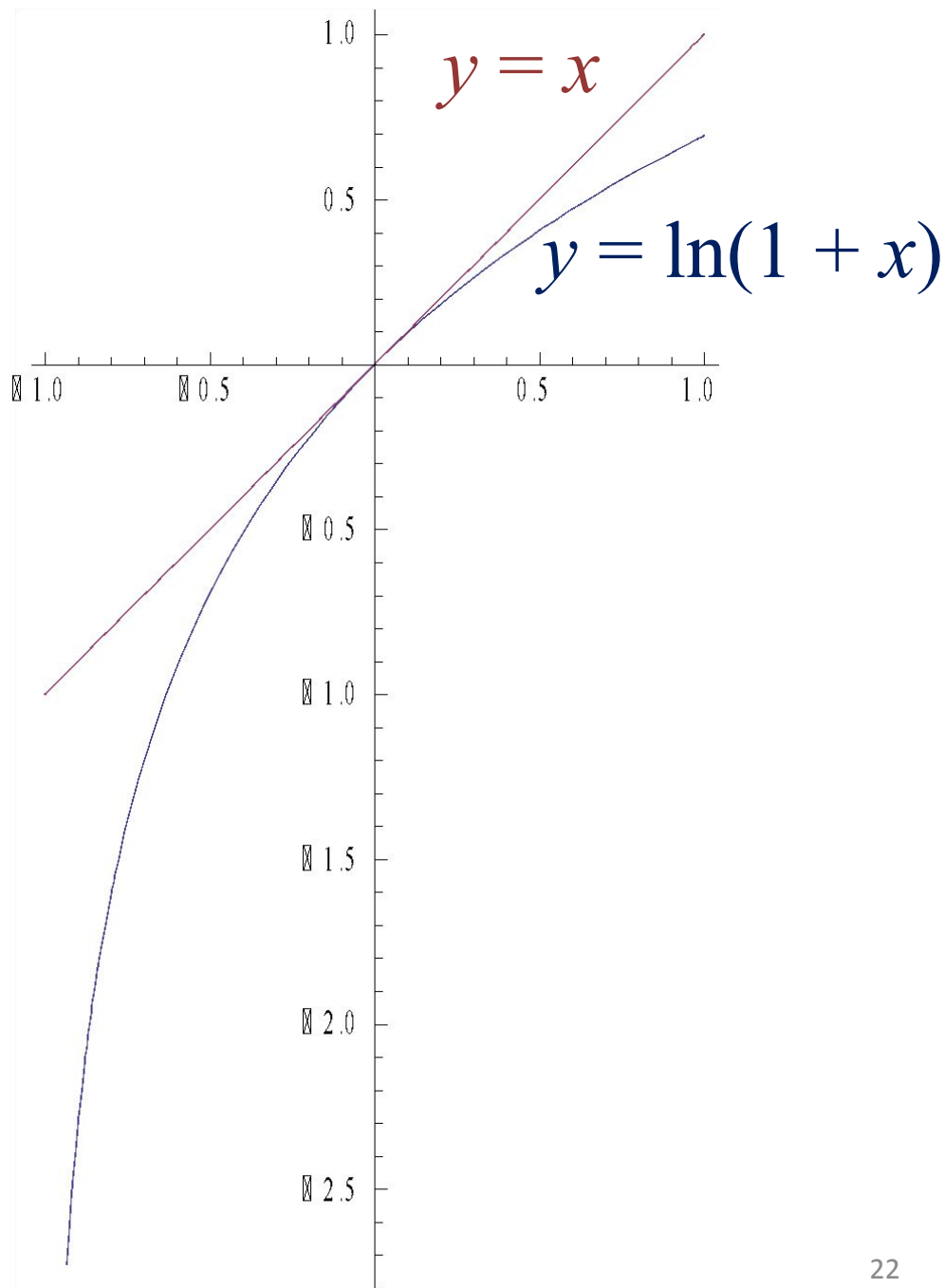
$$f'(x) = \frac{1}{1+x},$$

$$f'(0) = \frac{1}{1+0} = 1,$$

Тогда:

$$\ln(1 + x) \approx x.$$

Для $x \rightarrow 0$.



№ 3

$$f(x) = e^x.$$

$$x_0 = 0,$$

Найдем:

$$f(0) = e^0 = 1,$$

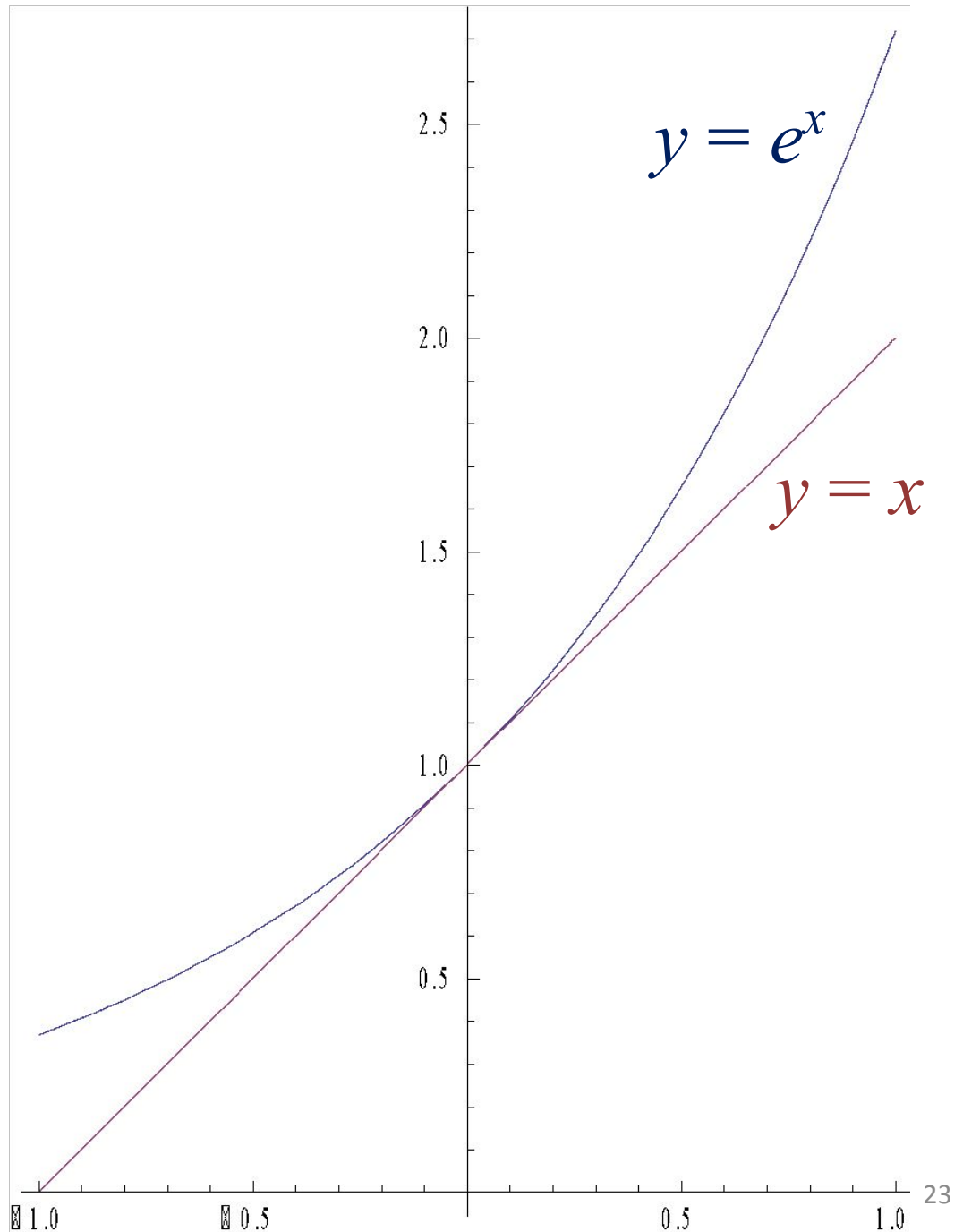
$$f'(x) = e^x,$$

$$f'(0) = e^0 = 1,$$

Тогда:

$$e^x \approx 1 + x.$$

Для $x \rightarrow 0$.



№ 4

$$f(x) = \sin x.$$

$$x_0 = 0,$$

Найдем:

$$f(0) = \sin 0 = 0,$$

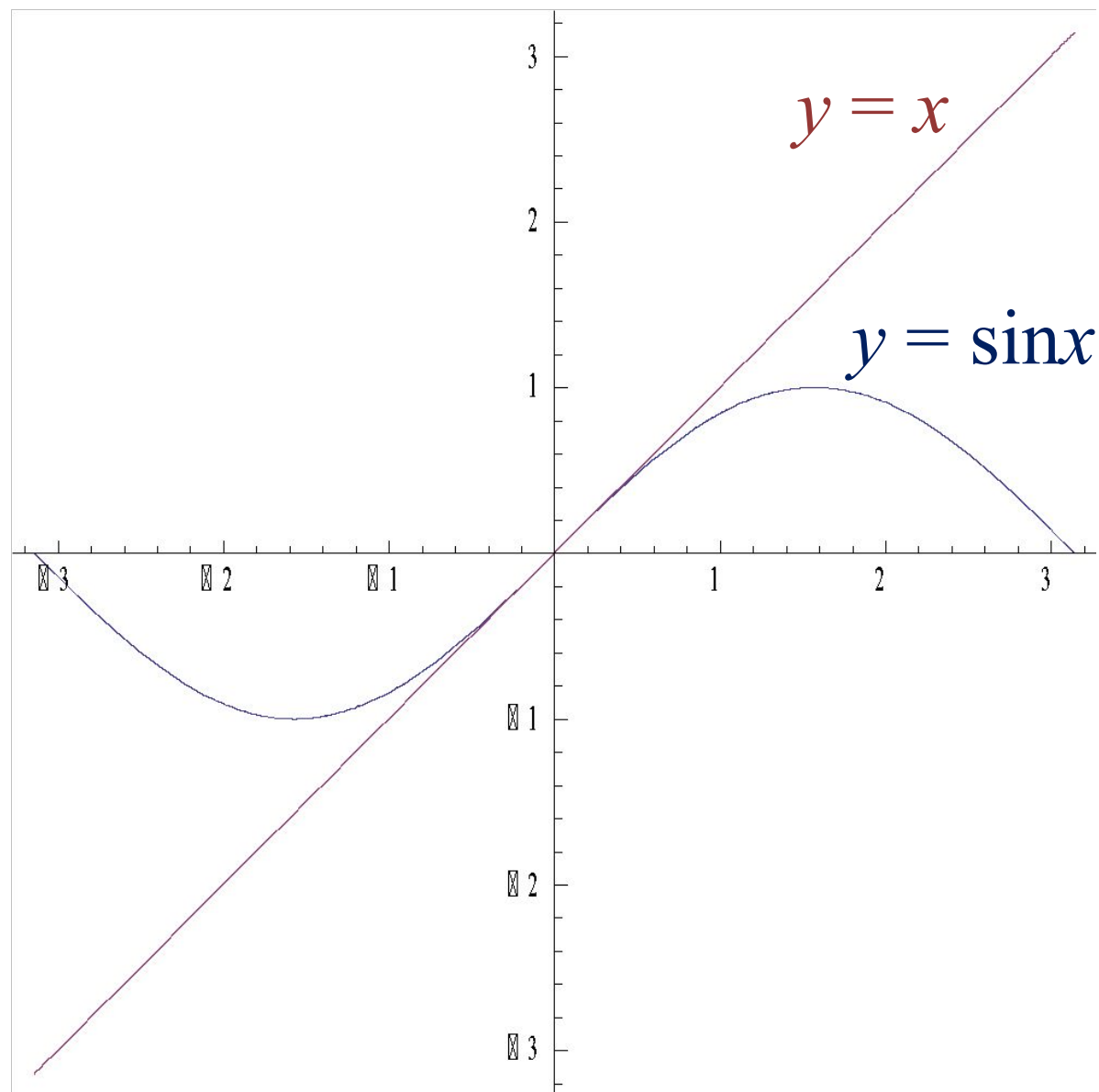
$$f'(x) = \cos x,$$

$$f'(0) = \cos 0 = 1,$$

Тогда:

$$\sin x \approx x.$$

Для $x \rightarrow 0$.



Пример

Вычислить приближенно с помощью дифференциала $\sqrt{17}$.

$$\sqrt{17} = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{16 \left(1 + \frac{1}{16} \right)} =$$

$$4 \left(1 + \frac{1}{16} \right)^{\frac{1}{2}} \approx 4 \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16} \right) = \frac{33}{8}$$

Таблица дифференциалов

Она получается из таблицы производных по формуле:

$$df(x) = f'(x)dx.$$

Каждая строчка таблицы производных дает соответствующую строчку таблицы дифференциалов.

Пример

$$dx^\mu = \mu x^{\mu-1} dx,$$

$$d\sin x = \cos x dx.$$

Производные высших порядков

Определение. Пусть функция $y = f(x)$ имеет на интервале (a, b) производную $f'(x)$ дифференцируема в некоторой точке $x_0 \in (a, b)$, т.е. существует $[f'(x)]'$ в точке x_0 . Эта производная называется второй производной функции f в точке x_0 или производной второго порядка.

$$\text{Обозначения: } f''(x_0) = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

Пусть вторая производная $f''(x)$ определена на всем интервале (a, b) , т.е. это функция. Может случиться, что эта функция $f''(x)$ вновь дифференцируема в точке $x_0 \in (a, b)$, тогда $[f''(x)]'$ называется производной третьего порядка.

$$\text{Обозначения: } f'''(x_0) = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right) = \frac{d^3 y}{dx^3}$$

Пусть на интервале (a, b) определена производная $(n - 1)$ -го порядка $f^{(n - 1)}(x)$ при $n \in \mathbb{N}$. Если существует ее производная в точке $x_0 \in (a, b)$, тогда $[f^{(n - 1)}(x)]'$ называется производной n -го порядка функции f в данной точке.

$$\text{Обозначения: } f^{(n)}(x_0) = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \right) = \frac{d^n y}{dx^n}$$

Механический смысл второй производной

Путь $s = f(t)$

$f'(t)$ – мгновенная скорость = v .

Возьмем момент времени t_0 и зададим приращение Δt . Тогда скорость получит приращение

$$\Delta v = v(t_0 + \Delta t) - v(t_0) = f'(t_0 + \Delta t) - f'(t_0).$$

Рассмотрим отношение

$$w_{cp} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

это есть среднее ускорение за промежуток времени Δt . А его предел:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t_0) = f''(t_0)$$

называется **мгновенное ускорение движения**, т.е. скорость изменения скорости.

Дифференциалы высших порядков

Пусть задан дифференциал

$$dy = f'(x)dx.$$

В частности, он является функцией x . Может случиться, что эта функция вновь дифференцируема и можно вычислить ее дифференциал. Полагаем по определению:

$$d^2y = d(dy).$$

Вычислим:

$$\begin{aligned}d^2y &= d(dy) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)'dx = \\ &= dx(f'(x))'dx = f''(x)dx^2.\end{aligned}$$

Дифференциал $dx = const$.

Таким образом, получаем формулу:

$$d^2y = f''(x)dx^2.$$

Отсюда:

$$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Аналогично получаем: $d^3y = d(d^2y)$.

И вообще: $d^n y = d(d^{n-1}y)$, то есть:

$$d^n y = f^{(n)}(x)dx^n.$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}.$$