Способы решения тригонометрических уравнений

Содержание

I. Введение

перейти
К оглавлению | К обучающей с/р

- При решении тригонометрических уравнений, стараются привести уравнения к уравнению, содержащему одну функцию одного аргумента.

- Способы решения уравнений различны, однако, можно выделить основные типы уравнений и стандартные способы их решений.

II.Способы решения

перейти

К оглавлению | К обучающей с/р

1 Замена переменной

Пример: $3\,tg^2 x + tgx - 2 = 0$

Решение:

$t = tg\,x$

$3t^2 + t - 2 = 0$

$D = 1+4*2*3=25$

$t = \frac{-1-5}{6}$ или $t = \frac{-1+5}{6}$

$t = 2/3$ $\quad$ $t = -1$

$tgx = -1$ $\quad$ $tgx = 2/3$

$$\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4}+\pi k;\ k \in Z \\ x = arctg2/3+\pi n;\ n \in Z \end{array}\right.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{4}+\pi n;\ arctg2/3+\pi n;\ n \in Z$

II.Способы решения

перейти

К оглавлению | К обучающей с/р

2 решение однородных уравнений

Однородные уравнения относительно sin x и cos x:

$$a \sin x + b \cos x = 0$$

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$$

Значения x, при которых <u>cosx = 0</u>, не являются решениями уравнения, т.к. если cosx = 0, то sinx = 0, а sinx и cosx не могут быть равными нулю одновременно.

$\cos x \neq 0$ в однородных уравнениях

II. Способы решения

перейти

К оглавлению | К обучающей с/р

2 **решение однородных уравнений**

Пример: $3\sin x + 2\cos x = 0$ // разделим на $\cos x \neq 0$ в однородном уравнении

Решение:

$3\,\mathrm{tg}x + 2 = 0$

$3\mathrm{tg}x = -2$

$\mathrm{tg}x = -2/3$

$x = \mathrm{arctg}(-2/3) + \pi n,\ n \in Z$

Ответ: $\mathrm{arctg}(-2/3) + \pi n,\ n \in Z$

II.Способы решения

перейти

К оглавлению | К обучающей с/р

3 разложение на множители

Пример: $\sin 2x = 2\cos^2 x$

Решение:

$2 \sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0$! Делить на cosx нельзя

$2\cos x(\sin x - \cos x) = 0$

$\cos x = 0$ или $\sin x - \cos x = 0$ |разделим на $\cos x \neq 0$ в однородном ур-и

$x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$, или $\operatorname{tg} x - 1 = 0$

$x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi k,\ \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$

II.Способы решения

перейти

К оглавлению | К обучающей с/р

4 Линейные уравнения относительно sinx и cosx

$$a \sin x + b \cos x = c,$$

где: $c \neq 0$; $\sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$

4а Введение вспомогательного угла

$$\sqrt{a^2 + b^2}\ \sin(x + \mu) = c,$$

где: $\mu = \mathrm{arctg}\frac{b}{a}$

$a > 0$

II.Способы решения

перейти

К оглавлению | К обучающей с/р

4 Линейные уравнения относительно sinx и cosx

4a Введение вспомогательного угла

Пример: $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{3}$

Решение:

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3+1} = 2$$

$$\mu = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$$

$$\sin(x+\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}/2$$

$$x = (-1)^n\frac{\pi}{3} + \pi n - \frac{\pi}{6}$$

Ответ: $(-1)^n\frac{\pi}{3} + \pi n - \frac{\pi}{6}$

II.Способы решения

5 **Решение уравнений, содержащих выс. степени**

перейти

[К оглавлению](#) | [К обучающей с/р](#)

Формулы понижения степени:

$$2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$$
$$2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$$
$$2\sin x \cos x = \sin 2x$$
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = 1$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x =$$
$$= \sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x - 2\sin^2 x \cos^2 x =$$
$$= 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - 0{,}5\sin^2 2x$$

$$\sin^6 x + \cos^6 x =$$
$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) =$$
$$= \sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x - 3\sin^2 x \cos^2 x = 1 - ¾*\sin^2 2x$$

II.Способы решения

перейти

К оглавлению | К обучающей с/р

5 Решение уравнений, содержащих выс. степени

Пример: $4\sin^4 x + 12\cos^2 x = 7$

Решение:

$(2\sin^2 x)^2 + 6(2\cos^2 x) = 7$

$(1-\cos 2x)^2 + 6(1+\cos 2x)=7$

$1-2\cos 2x+\cos^2 2x+6+6\cos 2x=7$

$\cos^2 2x + 4\cos 2x = 0$

$\cos 2x(\cos 2x + 4)=0$

$\cos 2x=0$ или $\cos 2x + 4=0$

$2x = \pm \pi/2 + \pi n$ или т.к. $|\cos t|<1$, нет корней

$x = \pm \pi/4+\pi n/2,\ n \in Z$

Ответ: $\pm \pi/4+\pi n/2,\ n \in Z$

II.Способы решения

перейти

К оглавлению | К обучающей с/р

6 Решение уравнений с ограниченной ОДЗ

Пример: $\frac{\sin x}{1+\cos x}=0$

Решение:

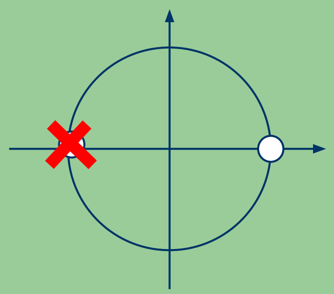
Найдем ОДЗ:

$\cos x \neq -1$; $x \neq \pi + 2\pi n$, $n \in Z$

$\sin x = 0$

$x = \pi n$, $n \in Z$ – сравним с ОДЗ

$x = 2\pi n$



Ответ: $2\pi n$