Лекция 2

ЭЛЕКТРОСТАТИКА

Основные уравнения электростатики в вакууме

1.4. Поток вектора напряженности электрического поля. Теорема Остроградского-Гаусса.

1.5. Применение теоремы Гаусса для расчета электрических полей

1.6. Работа сил поля по перемещению заряда. Потенциал и разность потенциалов электрического поля.

1.7. Связь между напряженностью и потенциалом электрического поля. Градиент потенциала. Теорема о циркуляции электрического поля.

1.8. Эквипотенциальные линии и поверхности и их свойства.

1.9. Потенциалы простейших электрических полей.

1.10. Уравнение Пуассона для потенциала электростатического поля

1.4. Поток вектора напряженности электрического поля. Теорема Остроградского-Гаусс

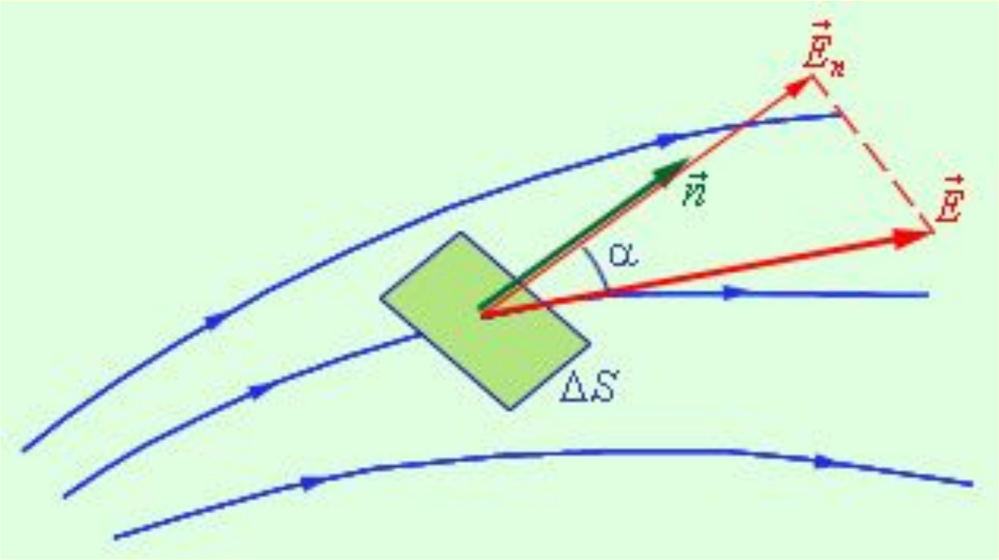
Экспериментально установленные закон Кулона и принцип суперпозиции позволяют полностью описать электростатическое поле заданной системы зарядов в вакууме. Однако, свойства электростатического поля можно выразить в другой, более общей форме, не прибегая к представлению о кулоновском поле точечного заряда.

Введем физическую величину, характеризующую электрическое поле – ***поток Φ вектора напряженности*** электрического поля. Если поле неоднородно или поверхность, через которую вычисляется поток, не является плоской, то определение потока нужно применить к *бесконечно малому элементу* поверхности ΔS. Пусть в пространстве, где создано электрическое поле, расположена некоторая достаточно малая площадка ΔS.

Ее можно представить в виде вектора $\Delta\vec{S} = \vec{n}\Delta S$, где единичный вектор $\vec{n}$ перпендикулярный площадки ΔS. Тогда ***элементарным потоком вектора напряженности*** через площадку ΔS будет

$$\Delta\Phi = (\boldsymbol{E}\Delta\boldsymbol{S}) = E\Delta S\cos\alpha,$$

где α угла между вектором **E** и нормалью **n** к площадке.



Поток через всю поверхность S будет:

$$\Phi_E = \iint_S (\vec{E}\vec{n})dS = \iint_S E_n dS,$$

где $E_n = E\cos\alpha$.

Знак потока зависит от выбора направления нормали к элементарным площадкам, на которые разбивается поверхность S при вычислении Φ_E. Изменение направления нормали на противоположное изменит знак E_n, а значит и знак потока Φ_E. В случае замкнутых поверхностей принято считать знак потока *положительным*, если силовые линии поля *выходят* из охватываемой области наружу. Численно поток равен количеству силовых линий, пресекающих данную поверхность.

Размерность потока в СИ: $[\Phi_E]$ = В·м (отметим, что она совпадает с размерностью величины q/ε_o).

Окружим точечный заряд q замкнутой сферической поверхностью радиуса r и вычислим поток электрического поля точечного заряда через эту поверхность.

По определению имеем: $$\Phi_E = \oiint_S E_n dS$$

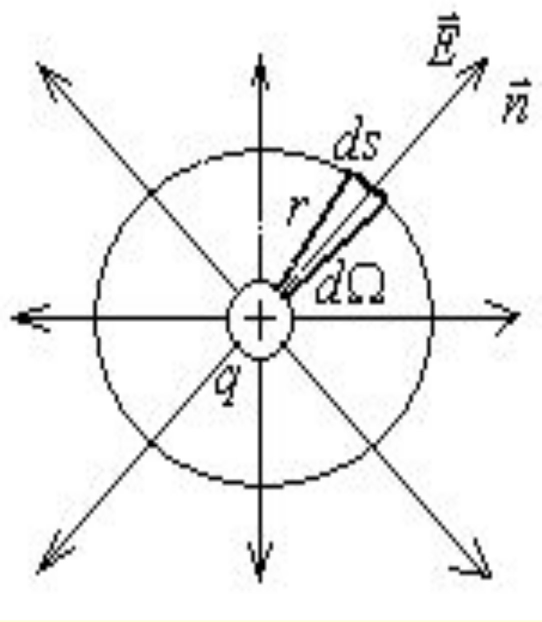
где E_n - напряженность электрического поля в направлении внешней нормали,

$$E_n = E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2};$$

dS - элемент поверхности, $dS = r^2 d\Omega$, $d\Omega$ - элемент телесного угла.

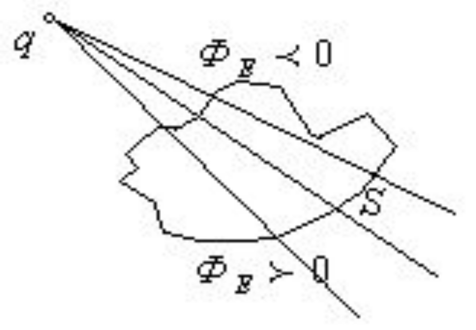
Вычисляем:

$$\boxed{\Phi_E = \int_0^{4\pi} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} r^2 d\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\varepsilon_0}.}$$



Полученный результат не зависит от формы и размеров выбранной поверхности. Это следует из того, что поток численно равен количеству силовых линий, пересекающих данную поверхность, и в случае выбора замкнутой поверхности любой другой формы он не изменится, так как силовые линии нигде не прерываются.

Если внутри замкнутой поверхности имеется несколько зарядов, то поток их результирующего поля, согласно принципу суперпозиции, будет равен:



$$\Phi_E = \oiint_S E_n dS = \oiint_S \sum_{i=1}^{n} E_{nI} dS = \sum_{i=1}^{n} (\oiint E_{ni} dS) = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{\varepsilon_0}.$$

В частности, если система зарядов находится вне выбранной поверхности или алгебраическая сумма всех зарядов, заключенных под поверхностью, равна нулю, то поток $\Phi_E = 0$.

Доказанная выше теорема, носит название ***теоремы Остроградского - Гаусса*** (Остроградский М.В. 1801-1861; Gauss C., 1777–1855). Полная ее формулировка звучит так: ***поток вектора напряженности электрического поля через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов, заключенных внутри этой поверхности деленной на*** ε_0:

$$\Phi_E = \oiint_S E_n dS = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{\varepsilon_0}.$$

Отметим, что теорема Остроградского - Гаусса является прямым ***следствием закона Кулона*** и является одной из *основных теорем* электростатики.

1.5. Применение теоремы Гаусса для расчета электрических полей.

В ряде случаев теорема Остроградского - Гаусса позволяет найти напряженность электрического поля протяженных заряженных тел, не прибегая к вычислению громоздких интегралов. Обычно это относится к телам, чья геометрическая форма обладает определенными элементами симметрии (шар, цилиндр, плоскость). Рассмотрим некоторые примеры применения теоремы Гаусса для расчета напряженности электрических полей.

Пример 1. Поле равномерно заряженной плоскости.

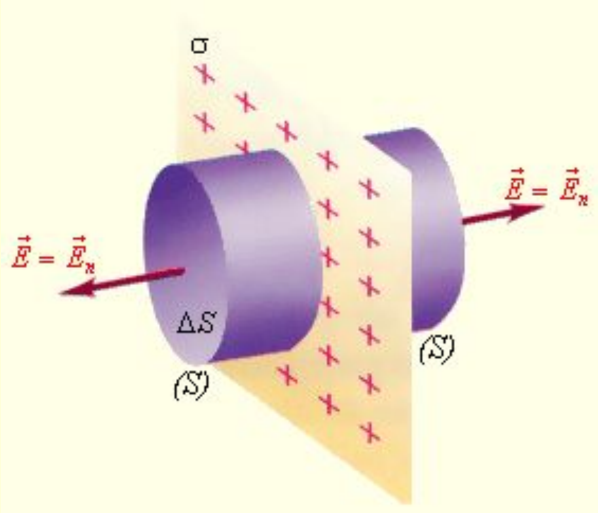
Электрическое поле, создаваемое бесконечно протяженной равномерно заряженной плоскостью, является однородным – в каждой точке пространства вне плоскости его напряженность всюду одинакова. Направлено это поле перпендикулярно к плоскости в обе стороны. Поэтому для потока вектора напряженности поля через произвольно выбранную цилиндрическую поверхность, опирающуюся на элемент плоскости ΔS,

можем написать: $\Phi_E = 2E_n S_{осн} + E_n S_{бок} = 2E\Delta S = \Delta q/\varepsilon_0$,

откуда $E = \sigma/2\varepsilon_0$, где σ - поверхностная плотность заряда.

Размерность в СИ: $[\sigma] = [\Delta q/\Delta S] =$ Кл/м^2.

Таким образом, искомая напряженность электрического поля ***равномерно заряженной плоскости*** $E = \sigma/2\varepsilon_0$.

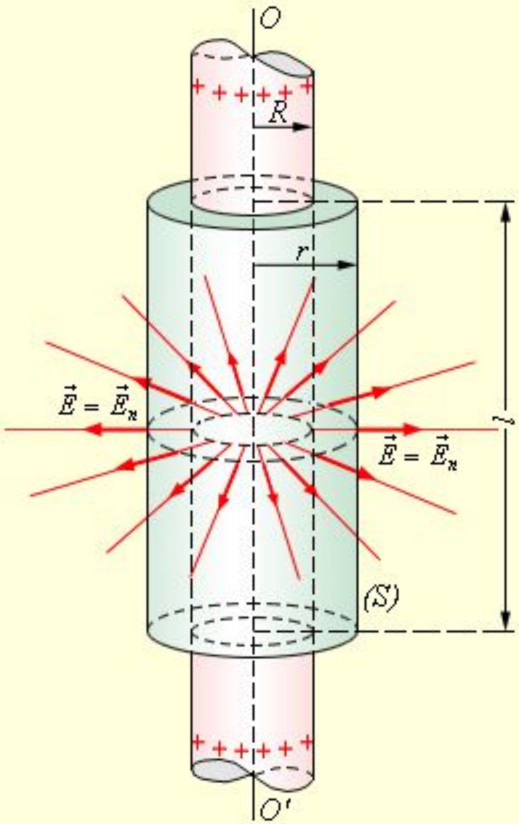


Пример 2. Поле равномерно заряженной нити (цилиндра).

В данном случае электрическое поле обладает аксиальной симметрией – не зависит от азимутального угла φ и координаты z и направлено вдоль радиус-вектора $\vec{r}$. Поэтому для потока вектора $\vec{E}$ через выбранную цилиндрическую поверхность с осью, совпадающей с заряженной нитью, имеем:

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = E \cdot r \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{l} dz = E2\pi rl \quad ,$$

где $dS = rd\varphi dz$ – элемент цилиндрической поверхности; l – длина произвольного участка нити.



С другой стороны, по теореме Остроградского – Гаусса

этот поток равен: $\Phi_E = E2\pi rl = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$, причем $q = \tau l$,

τ - линейная плотность заряда нити.

Отсюда находим:

$$E2\pi r = \frac{\tau}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

Искомая напряженность электрического поля

равномерно заряженной нити:

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r} \; .$$

Пример 3. Поле равномерно заряженного шара.

а) ***Металлический шар.*** При равновесии заряды равномерно распределяются по внешней поверхности заряженного шара. Поэтому при $r < R$ (внутри шара) электрическое поле отсутствует:

$$\Phi_E = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q_{внутри}}{\varepsilon_0} = 0 \Rightarrow E_{внутри} = 0$$

Вне шара (r > R) электрическое поле, созданное равномерно распределенными по его поверхности зарядами, обладает сферической симметрией (направлено по радиальным линиям), поэтому, согласно теореме Остроградского-Гаусса:

$$\Phi_E = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q_{шара}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q_{шара}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Видим, что электрическое поле равномерно заряженного металлического шара не зависит от радиуса шара и совпадает с полем ***точечного заряда***.

б) ***Диэлектрический шар***.

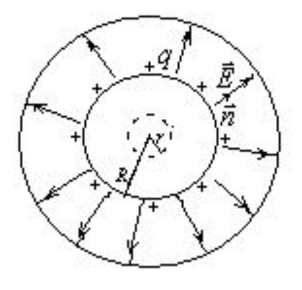
Рассмотрим шар, с условной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 1$, равномерно заряженный по объему с плотностью заряда ρ.

<u>Размерность объемной плотности заряда в СИ:</u>

$$[\rho] = \left[\frac{\Delta q}{\Delta V}\right] = \frac{Кл}{м^3}$$

Полный заряд шара, очевидно, есть:

$$q_{шара} = \rho \cdot V_{шара} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$



Имеем по теореме Гаусса:

1) <u>*Внутри шара*</u> *(r < R)*: $\Phi_E = E\cdot 4\pi r^2 = \dfrac{\Delta q}{\varepsilon_0} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho\dfrac{4}{3}\pi r^3$,

где $\Delta q = \rho\cdot\dfrac{4}{3}\pi r^3$ - заряд внутренней области шара, ограниченной выбранной сферической поверхностью радиуса *r*. Отсюда находим:

$$E_{внутри} = \frac{1}{3\varepsilon_0}\rho r = \frac{q_{шара}}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r$$

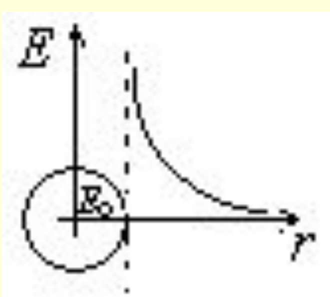
2) <u>*Вне шара*</u> (*r > R)*:

$$\Phi_E = E 4\pi R^2 = \frac{q_{шара}}{\varepsilon_0}$$

откуда $E_{вне} = \dfrac{R^3\rho}{3\varepsilon_0 r^2} = \dfrac{q_{шара}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$,

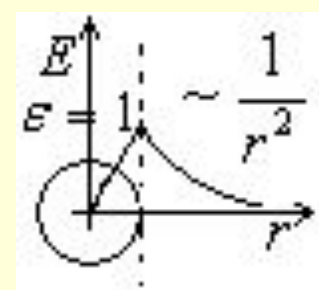
то есть ***вне*** заряженного диэлектрического шара электрическое поле ***такое же***, как и в случае ***металлического*** шара.

Качественный ход зависимостей *E(r)* для металлического и диэлектрического шаров.



Металл

Диэлектрик

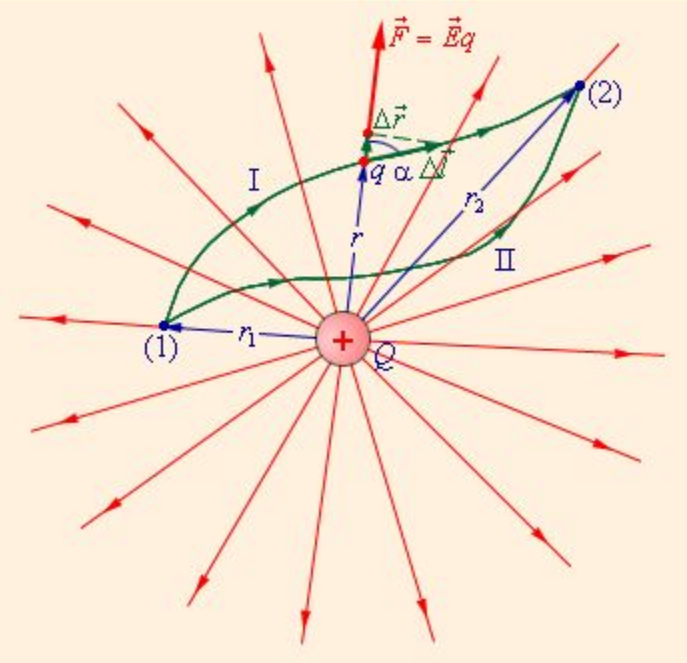


1.6. Работа сил поля по перемещению заряда. Потенциал и разность потенциалов электрического поля.

Как следует из закона Кулона, сила, действующая на точечный заряд q в электрическом поле, созданном другими зарядами, является ***центральной***. Напомним, что *центральной* называется сила, линия действия которой направлена по радиус-вектору, соединяющему некоторую неподвижную точку O (центр поля) с любой точкой траектории. Из «Механики» известно, что все ***центральные силы*** являются ***потенциальными***. Работа этих сил *не зависит* от формы пути перемещения тела, на которое они действуют, и *равна нулю* по любому замкнутому контуру (пути перемещения).

Работа кулоновских сил при перемещении заряда q зависит только от расстояний r_1 и r_2 начальной и конечной точек траектории

Полученный результат не зависит от формы траектории. На траекториях I и II, изображенных на рисунке, работы кулоновских сил одинаковы. Если на одной из траекторий изменить направление перемещения заряда q на противоположное, то работа изменит знак. Отсюда следует, что на замкнутой траектории работа кулоновских сил равна нулю.



То есть, работа сил поля по перемещению заряда q из точки 1 в точку 2 равна по величине и противоположна по знаку работе по перемещению заряда из точки 2 в точку 1, независимо формы пути перемещения. Следовательно, работа сил поля по перемещению заряда может быть представлена разностью потенциальных энергий заряда в начальной и конечной точках пути перемещения: $A = W_1 - W_2$.

Введем ***потенциал*** электростатического поля φ, задав его как отношение:

$$\varphi = \frac{W}{q}$$

Тогда **работа, совершаемая электростатическое полем при перемещении точечного заряда *q* из точки (1) в точку (2), равна разности значений потенциальной энергии в этих точках и не зависит от пути перемещения заряда и от выбора точки (0):**

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2) = qU$$

Разность потенциалов $U = \varphi_1 - \varphi_2$ называется электрическим напряжением.

В СИ размерность потенциала [φ] и напряжения [U] Дж/Кл = В.

Считается, что на бесконечности электрические поля отсутствуют, и значит $\varphi_\infty = 0$. Это позволяет дать ***определение потенциала*** как ***работы, которую нужно совершить, чтобы переместить пробный заряд q из бесконечности в данную точку пространства отнесенной к величине этого заряда.*** Таким образом, потенциал электрического поля является его ***энергетической характеристикой***

1.7. Связь между напряженностью и потенциалом электрического поля. Градиент потенциала. Теорема о циркуляции электрического поля

Напряженность и *потенциал* – это две характеристики одного и того же объекта – электрического поля, поэтому между ними должна существовать функциональная связь. Действительно, работа сил поля по перемещению заряда q из одной точки пространства в другую может быть представлена двояким образом:

$$\begin{cases} A = (\varphi_1 - \varphi_2)\cdot q = -q\int_1^2 d\varphi \\ A = \int_1^2 (\vec{F}d\vec{r}) = q\int_1^2 (\vec{E}d\vec{r}) \end{cases}$$

Откуда следует, что

$$q\int_1^2 \vec{E}d\vec{r} = -q\int_1^2 d\varphi$$

$$(\vec{E}d\vec{r}) = -d\varphi$$

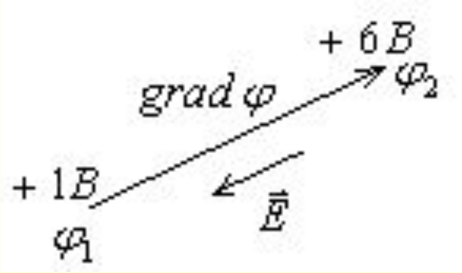
Это значит, что $\mathrm{d}\varphi = -\vec{E}\,\mathrm{d}\vec{r} = -\left(E_x\,\mathrm{d}x + E_y\,\mathrm{d}y + E_z\,\mathrm{d}z\right)$

Легко видеть, что дифференциал потенциала φ равен элементарной работе против сил электростатического поля, совершаемой над единичным точечным зарядом на перемещении $\mathrm{d}\vec{r}$

Если учесть, что dφ - полный дифференциал, т.е.: $\mathrm{d}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathrm{d}z$

то:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}; E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}; E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$



В компактной форме это можно записать в виде: $\vec{E} = -grad\varphi$

где вектор
$$grad\varphi (\equiv \nabla\varphi) = \vec{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

Градиент скалярного поля выделяет направление наискорейшего возрастания скалярной функции (направленный из точки с меньшим потенциалом в точку с большим потенциалом), а его модуль численно равен максимальной интенсивности возрастания этой функции.

Из свойства потенциальности электростатического поля следует, что работа сил поля по замкнутому контуру ($\varphi_1 = \varphi_2$) равна нулю:
$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2) = q\oint(\vec{E}d\vec{r}) = 0$$

поэтому можем написать
$$\oint(\vec{E}d\vec{r}) = 0$$

Последнее равенство отражает суть *второй основной теоремы* электростатики – ***теоремы о циркуляции электрического поля***, согласно которой *циркуляция поля вдоль произвольного замкнутого контура равна нулю*. Эта теорема является прямым следствием ***потенциальности*** электростатического поля.

Теорема стокса

$$\operatorname{rot} a = \nabla \times a = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) i + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) k$$

Теорема СТОКСА - одна из основных интегральных теорем *векторного анализа,* связывающая поверхностный интеграл с криволинейным:

$$\oint_{\partial S} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r} = \int_{S} (\operatorname{rot} \boldsymbol{a})_n\, dS .$$

Интегральные теоремы электростатики в вакууме

Теорема о потоке вектора $\vec{E}$: $\Phi_{\textcircled{E}} = \oint_S \vec{E}d\vec{S} = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$

Теорема о циркуляции вектора $\vec{E}$: $C_{\textcircled{E}} = \oint \vec{E}d\vec{l} = 0$

Дифференциальные теоремы электростатики в вакууме

$$div(\vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$rot(\vec{E}) = \vec{\nabla} \times \vec{E} = \left[\vec{\nabla}, \vec{E}\right] = 0$$

1.8. Эквипотенциальные линии и поверхности и их свойства.

Для наглядного представления электростатическое поля наряду с силовыми линиями используют **эквипотенциальные поверхности**.

Поверхность, во всех точках которой потенциал электрического поля имеет одинаковые значения, называется *эквипотенциальной поверхностью* или *поверхностью равного потенциала*.

Их свойства непосредственно вытекают из представления работы сил поля:

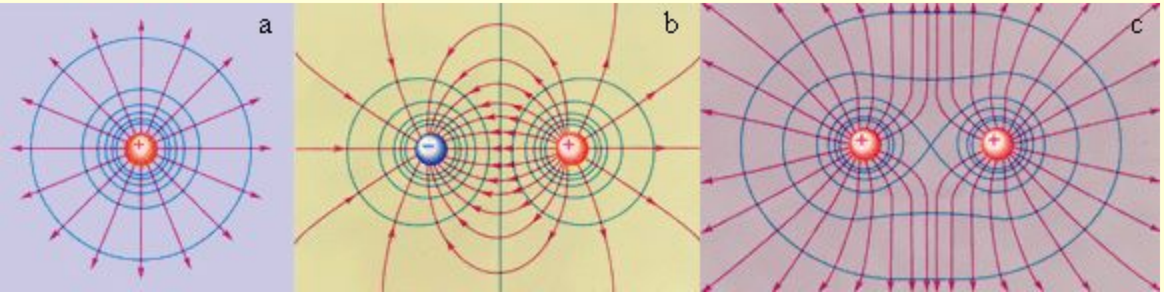
1) $A = q(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$ – работа по перемещению заряда вдоль эквипотенциальной линии (поверхности) равна нулю, т. к. $\varphi_1 = \varphi_2$.

2) $$A = q\int_1^2 Edl\cos\alpha = 0 \Rightarrow \cos\alpha = 0$$ - силовые линии поля в каждой точке ортогональны к эквипотенциальной линии (поверхности).

Силовые линии электростатическое поля всегда перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям.

Эквипотенциальные поверхности кулоновского поля точечного заряда – концентрические сферы. В случае однородного поля эквипотенциальные поверхности представляют собой систему параллельных плоскостей.

На рисунке представлены картины силовых линий и эквипотенциальных поверхностей некоторых простых электростатических полей.



1.9. Потенциалы простейших электрических полей.

Из соотношения $\vec{E} = -\frac{d\varphi}{d\vec{r}}$, определяющего связь между напряженностью и потенциалом электрического поля, следует формула для вычисления потенциала поля:

$$\varphi = -\int (\vec{E}d\vec{r}) + C$$

где интегрирование производится вдоль силовой линии поля; C – произвольная постоянная, с точностью до которой определяется потенциал электрического поля.

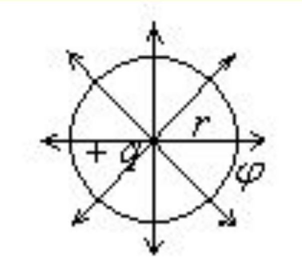
Если направление поля $\vec{E}$ совпадает с направлением радиус–вектора ($\cos\alpha = 0$), то вычисления можно производить по формуле:

$$\varphi = -\int E dr + C$$

.

Рассмотрим ряд примеров на применение этой формулы.

Пример1. Потенциал поля точечного заряда.



$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\varphi = -\int \frac{q dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + C$$

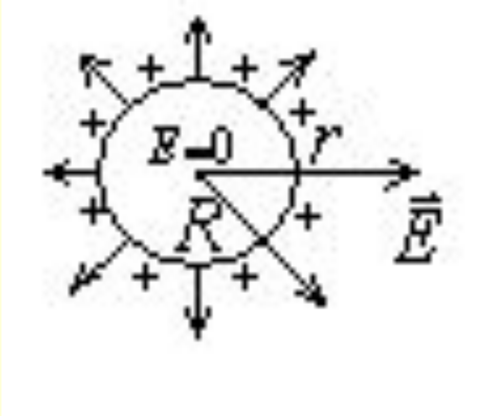
$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + C$$

При $r \to \infty$ полагают, что $\varphi(\infty) = 0$, тогда С = 0.

Таким образом, потенциал поля ***точечного заряда*** определяется по формуле:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Пример 2. Потенциал поля металлического заряженного шара.



$E = 0$ при $r \le R$, т.е. внутри шара $\varphi(r \le R) = \varphi_0 = const.$

Вне шара

$$\varphi(r \ge R) = -\int \frac{q\,dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + C = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + C .$$

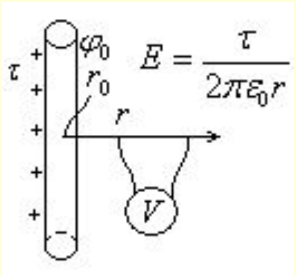
При $r \to \infty$ $\varphi = 0$, следовательно, $C = 0$.

$$\varphi(r \ge R) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$ - вне шара.

Для определения φ_0 используем свойство *непрерывности потенциала*: при переходе через границу поверхности шара, потенциал не претерпевает скачка. Полагая в последней формуле $r = R$, находим:

$$\varphi_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$ - внутри шара.

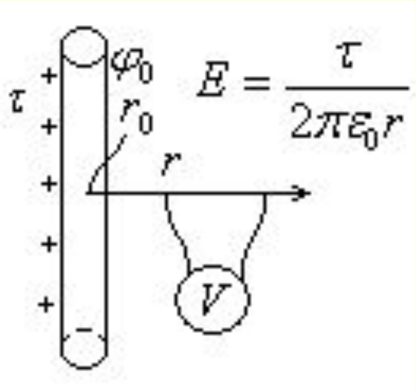
Разность потенциалов U двух точек на силовой линии электрического поля заряженного шара определяется по формуле:



$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{R}\right) - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{R}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

Пример 3. Потенциал поля заряженной нити

При $r \geq r_0$:



$$\varphi = -\int \frac{\tau dr}{2\pi\varepsilon_0 r} + C = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln r + C$$

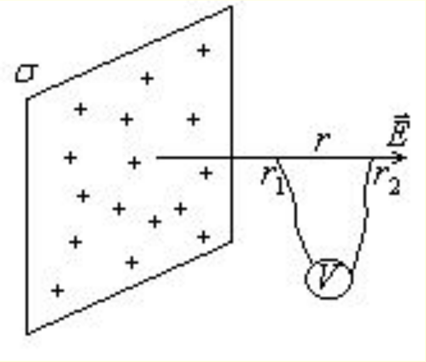
$$\varphi_0 = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln r_0 + C \Rightarrow C = \varphi_0 + \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r_0}\ln r_0$$

$$\varphi(r) = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_0}{r} + \varphi_0$$

Разность потенциалов U двух точек на силовой линии поля заряженной нити:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\left(\ln\frac{r_0}{r_1} - \ln\frac{r_0}{r_2}\right) = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

Пример 4. Потенциал поля заряженной плоскости



$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

$$\varphi = -\int \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} dr + C$$

$$\varphi = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} r + C$$

Разность потенциалов U двух точек на силовой линии поля заряженной плоскости:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon}(r_2 - r_1)$$

1.10. Уравнение Пуассона для потенциала электростатического поля.

Для расчета электростатического поля в общем случае служит уравнение Пуассона.

Значимость уравнения Пуассона для проблем электростатики заключается в том, что с его помощью решение может быть найдено практически всегда, а с помощью теоремы Гаусса только в исключительных случаях.

Если записать теорему Остроградского-Гаусса в дифференциальной форме

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

и записать связь векторного поля с потенциалом электростатического поля $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$

то есть $E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}$

то получим уравнение $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ Это уравнение называют уравнением Пуассона. В операторной форме уравнение Пуассона имеет вид: $\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$

где Δ - оператор Лапласа (лапласиан)

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

в декартовой системе координат. Заметим, что формы записи оператора Δ различны в различных системах координат.

Уравнение Пуассона является линейным дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка. В общем случае оно может иметь бесчисленное множество решений. Единственное решение этого уравнения получается, если на границе области, в которой рассматривается это уравнение, заданы граничные условия первого рода (задача Дирихле), второго рода (задача Неймана) или третьего рода. В первом случае на границе области считается известной искомая функция, во втором - ее нормальная производная, в третьем - линейная комбинация функции и ее нормальной производной.