

***Двойственность
линейного
программирования***

Правила построения двойственных задач:

1. Если в исходной задаче целевая функция исследуется на \min , то в двойственной задаче она будет исследоваться на \max и наоборот.
2. Если в исходной задаче n переменных и m уравнений, то в двойственной задаче будет m переменных и n уравнений.
3. Коэффициенты целевой функции исходной задачи становятся правыми частями ограничений двойственной задачи, а правые части системы ограничений исходной задачи становятся коэффициентами целевой функции исходной задачи.

4. Матрица ограничений двойственной задачи получается из матрицы ограничений исходной задачи транспонированием.

5. Если в исходной задаче $x_k \geq 0$, то в двойственной задаче k -ое ограничение будет неравенством, если же в исходной задаче x_k не имело ограничений на знак, то k -ое ограничение в двойственной задаче будет равенством.

6. Если в исходной задаче l -ое ограничение - неравенство, то в двойственной задаче $y_l \geq 0$; если же в исходной задаче l -ое ограничение - равенство, то в двойственной задаче нет ограничений на знак y_l .

Пример построения двойственной задачи.

Исходная задача

$$3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_4 \geq 5 \\ 3x_2 - 2x_3 = 10 \\ 4x_1 + 5x_2 - 3x_4 \geq 7 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Двойственная задача

$$5y_1 + 10y_2 + 7y_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 4y_3 \leq 3 \\ 3y_2 + 5y_3 \leq 2 \\ -2y_2 \leq -3 \\ -4y_1 - 3y_3 = 5 \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0$$

$$y_2 \text{ } \forall \text{ знака}$$

$$y_3 \geq 0$$

Лемма 1

Если исходная задача (X) исследуется на \max , а двойственная (Y) на \min , то $Z(x) \leq Z'(y)$

Лемма 2

Если $Z(x^*) = Z(y^*)$, то x^*, y^* – оптимальные планы.

Теорема 1 (1 –ая теорема двойственности)

Если одна из пары двойственных задач имеет оптимальные планы, то и другая имеет оптимальный план, причем: $Z^*_{\max} = Z^*_{\min}$

Если же в одной из задач целевая функция не ограничена на ОДЗ, то у другой задачи вообще нет допустимых планов.

Теорема 2

Планы x^* и y^* пары двойственной задачи являются оптимальными тогда и только тогда, когда выполняется:

$$\left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* - c_j \right) x_j^* = 0 \quad j = 1, \dots, n$$

Пара симметричных двойственных задач.

$$Z = C_1 X_1 + \dots + C_n X_n \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases}$$

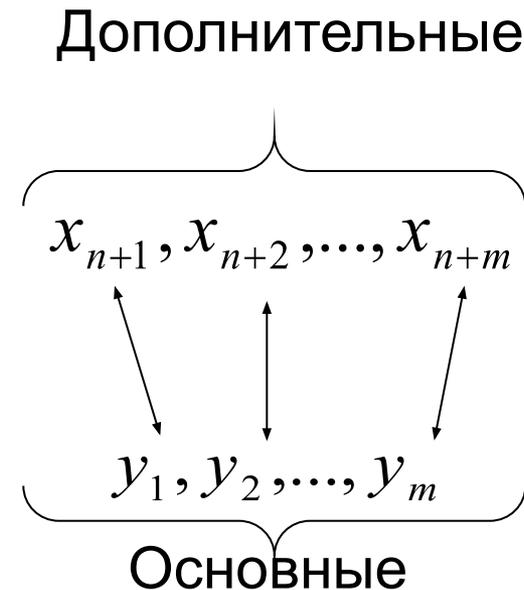
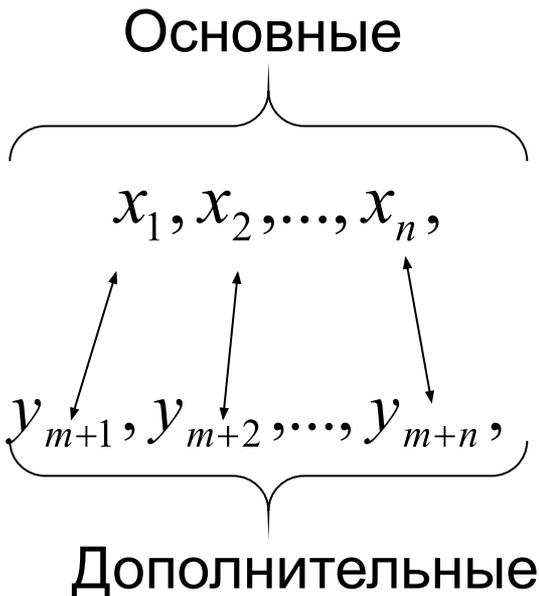
$$x_j \geq 0 (j = \overline{1, n})$$

$$Z = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \geq C_1 \\ \dots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m \geq C_n \end{cases}$$

$$y_i \geq 0 (i = \overline{1, m})$$

Пары сопряженных переменных.



Экономический смысл основной теоремы двойственности

План производства $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ и набор цен ресурсов $Y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$ оказываются **оптимальными** тогда и только тогда, когда прибыль (выручка) от продукции, найденная при “внешних” (известных заранее) ценах c_1, c_2, \dots, c_n , равна затратам на ресурсы при “внутренних” (определяемым только из решения задачи) ценах y_1, y_2, \dots, y_m .

Для всех других планов X и Y обеих задач прибыль (выручка) от продукции всегда меньше (или равна) затратам на ресурсы.

$$F = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ 2x_1 + x_2 \leq 16 \\ x_2 \leq 5 \\ 3x_1 \leq 21 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$Z = 18y_1 + 16y_2 + 5y_3 + 21y_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + 3y_4 \geq 2 \\ 3y_1 + y_2 + y_3 \geq 3 \end{cases}$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

$$F^*_{\max} = Z^*_{\min} = 24$$

Задача 1					
Число единиц продукции		Остатки ресурсов (ед.)			
$x^*_1 = 6$	$x^*_2 = 4$	$x^*_3 = 0$	$x^*_4 = 0$	$x^*_5 = 1$	$x^*_6 = 3$
$y^*_5 = 0$	$y^*_6 = 0$	$y^*_1 = 4/5$	$y^*_2 = 3/5$	$y^*_3 = 0$	$y^*_4 = 0$
Превышение затрат на ресурсы над ценой реализации		Условные цены ресурсов			
Задача 2					

Компоненты оптимального решения двойственной задачи называются оптимальными двойственными оценками исходной задачи (скрытые доходы).

Они определяют степень дефицитности ресурса.

Исследование на устойчивость

Исследование на устойчивость – исследование диапазона изменения правых частей системы ограничений, при котором найденное оптимальное решение не изменяется.

Исследование на чувствительность

При исследовании на чувствительность исследуется зависимость решения ЗЛП от небольших изменений коэффициентов в условии задачи. При этом предыдущее решение может стать либо недопустимым, либо неоптимальным.

- К недопустимости пред. решения могут привести изменения запасов ресурсов и/или добавление новых ограничений.
- К неоптимальности пред. решения могут привести изменение целевой функции и/или изменение технологических коэффициентов и/или включение в модель нового вида производственной деятельности.