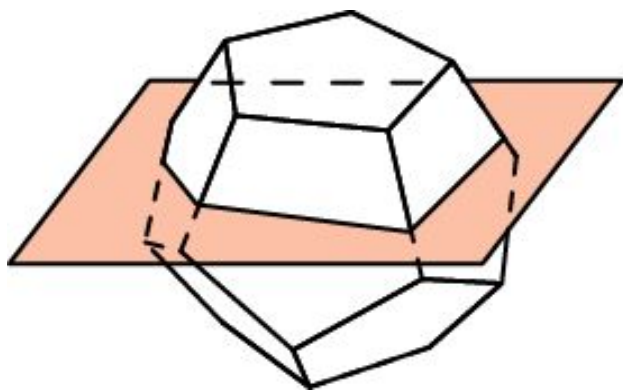
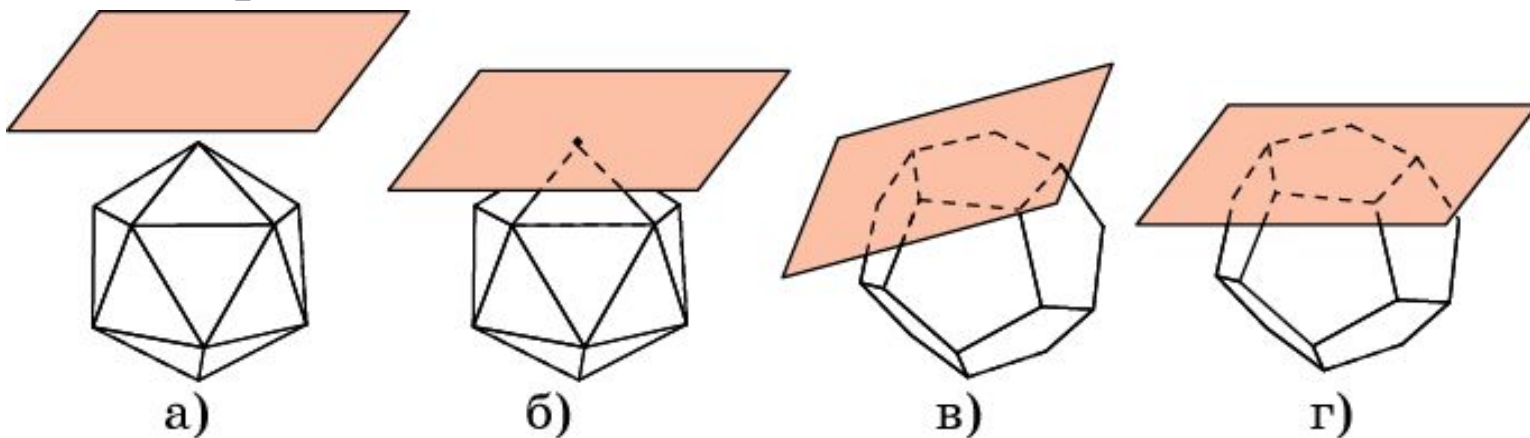


СЕЧЕНИЯ МНОГОГРАННИКОВ

Если многогранник лежит по одну сторону от данной плоскости, то он может: а) не иметь с плоскостью ни одной общей точки; б) иметь одну общую точку – вершину многогранника; в) иметь общий отрезок – ребро многогранника; г) иметь общий многоугольник – грань многогранника.

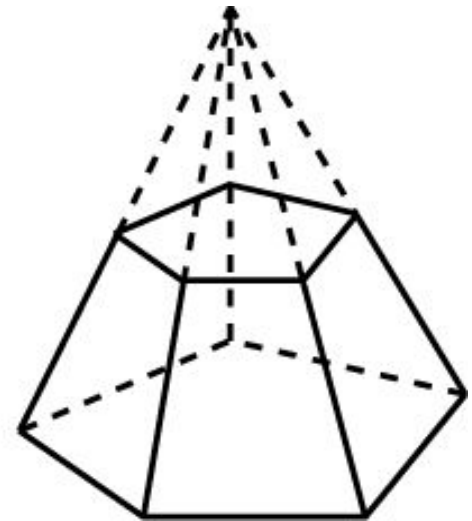
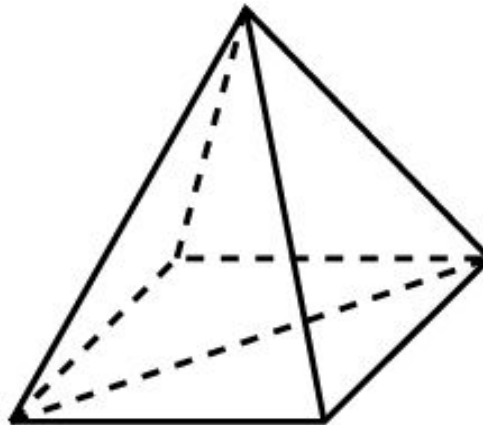
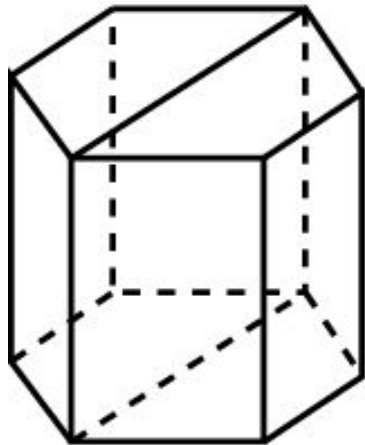


Если у многогранника имеются точки, лежащие по разные стороны от данной плоскости, то общая часть многогранника и плоскости называется **сечением** многогранника плоскостью.

Диагональные сечения

Сечение призмы плоскостью, проходящей через диагональ основания и два прилежащих к ней боковых ребра, называется **диагональным сечением** призмы.

Сечение пирамиды плоскостью, проходящей через диагональ основания и вершину, называется **диагональным сечением** пирамиды.



Пусть плоскость пересекает пирамиду и параллельна ее основанию. Часть пирамиды, заключенная между этой плоскостью и основанием, называется **усеченной пирамидой**. Сечение пирамиды также называется **основанием** усеченной пирамиды.

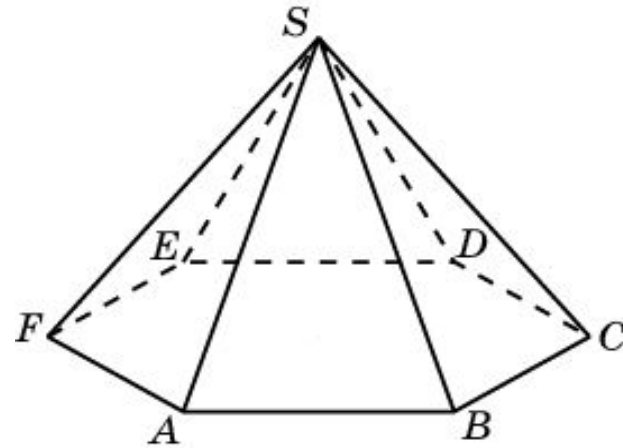
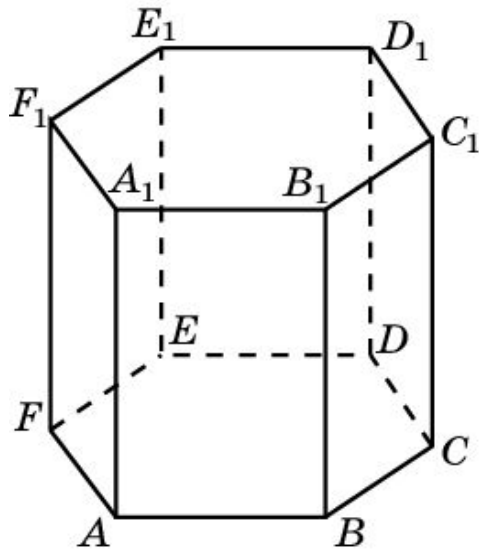
Упражнение 1

Какой фигурой может быть сечение многогранника плоскостью?

Ответ: Многоугольником или объединением нескольких многоугольников.

Упражнение 2

Сколько диагональных сечений имеет n -угольная: а) призма; б) пирамида?



Ответ: а) $\frac{n(n-3)}{2}$; б) $\frac{n(n-3)}{2}$.

Упражнение 3

Может ли в сечении куба плоскостью получиться:

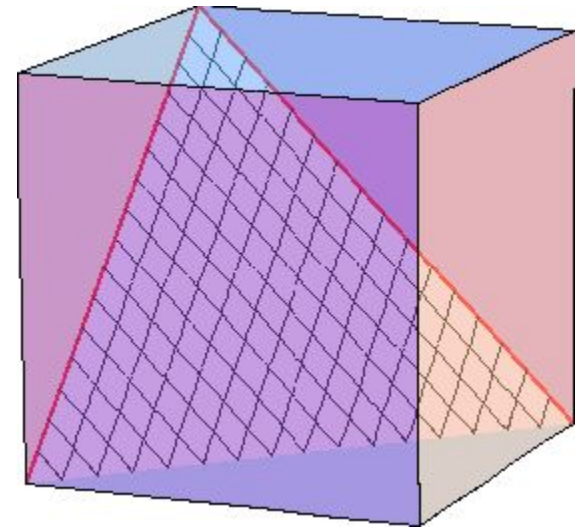
а) треугольник?

б) правильный треугольник?

в) равнобедренный треугольник?

г) прямоугольный треугольник?

д) тупоугольный треугольник?

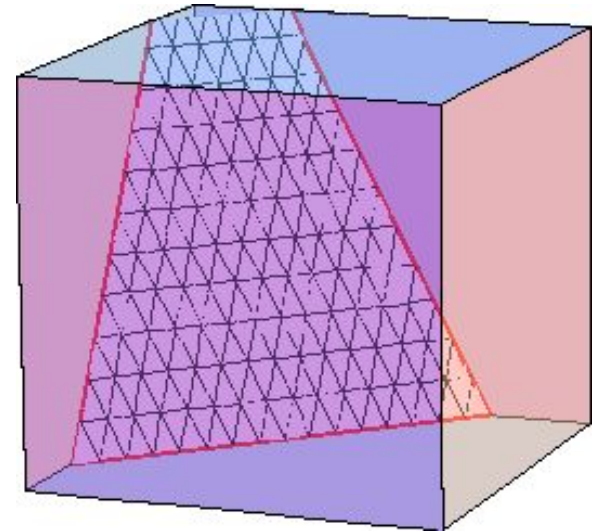


Ответ: а) Да; б) да; в) да; г) нет; д) нет.

Упражнение 4

Может ли в сечении куба плоскостью получиться:

- а) квадрат;
- б) прямоугольник;
- в) параллелограмм;
- г) ромб;
- д) трапеция;
- е) прямоугольная трапеция?



Ответ: а) Да; б) да; в) да; г) да; д) да; е) нет.

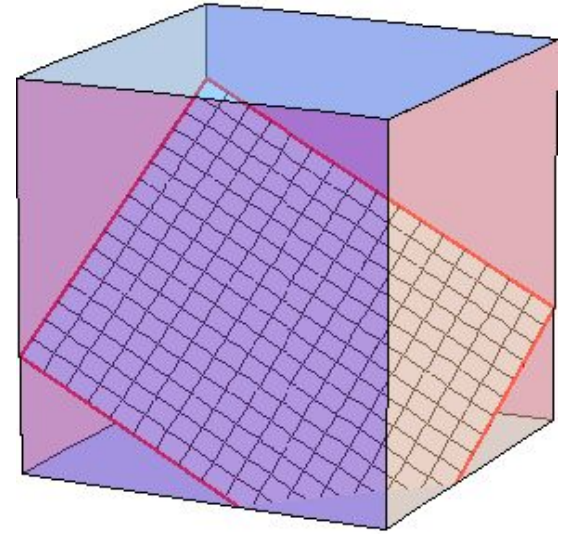
Упражнение 5

Может ли в сечении куба плоскостью получиться:

- а) пятиугольник;
- б) правильный пятиугольник?

Ответ: а) Да;

б) нет. У пятиугольников, которые получаются в сечении куба, имеются две пары параллельных сторон, а у правильного пятиугольника таких сторон нет.



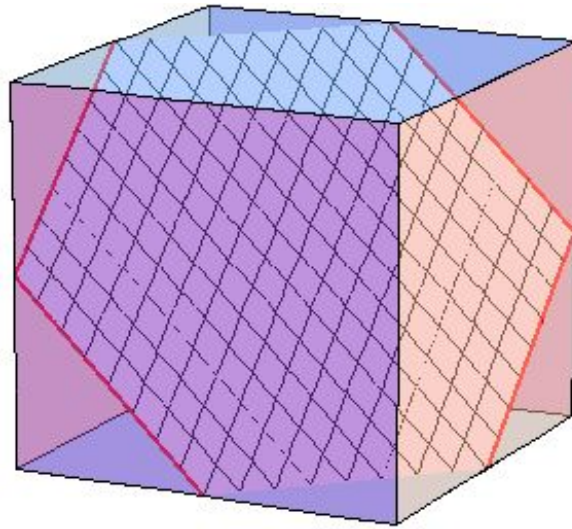
Упражнение 6

Может ли в сечении куба плоскостью получиться:

а) шестиугольник;

б) правильный шестиугольник;

в) многоугольник с числом сторон больше шести?



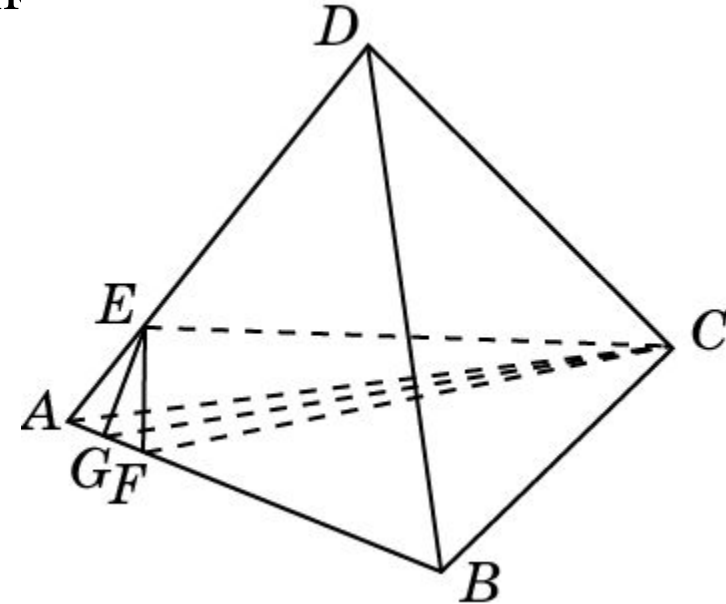
Ответ: а) Да; б) да; в) нет.

Упражнение 7

Может ли в сечении правильного тетраэдра плоскостью получиться: а) остроугольный треугольник; б) прямоугольный треугольник; в) тупоугольный треугольник?

Ответ: а) да;

б) да. Пусть $ABCD$ – единичный тетраэдр. Точка E на ребре AD отстоит от вершины A на расстояние $1/4$. Точка F на ребре AB отстоит от вершины A на расстояние x . Найдем x , для которого угол CEF будет прямым.

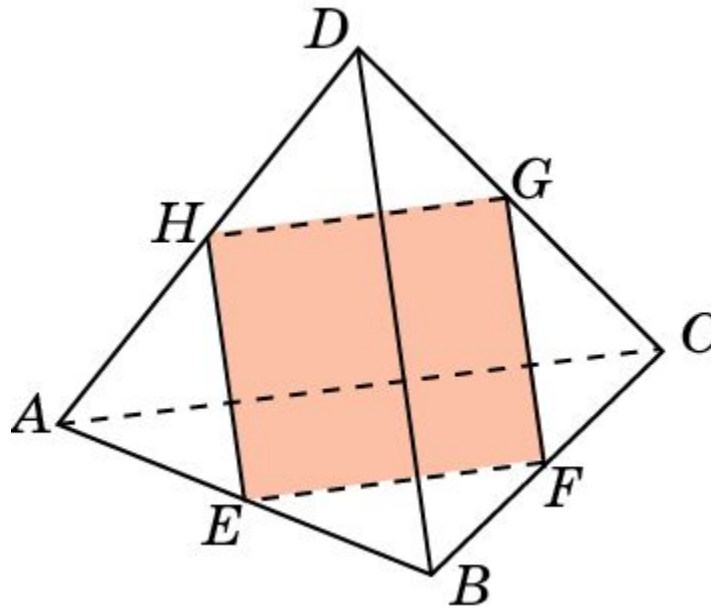


По теореме косинусов находим $CE^2 = 13/16$, $CF^2 = x^2 + 1 - x$, $EF^2 = 1/16 + x^2 - x/4$. Используя теорему Пифагора находим $x = 1/6$.

в) да. Если точку G на ребре AB взять между A и F , то угол CEF будет тупой.

Упражнение 8

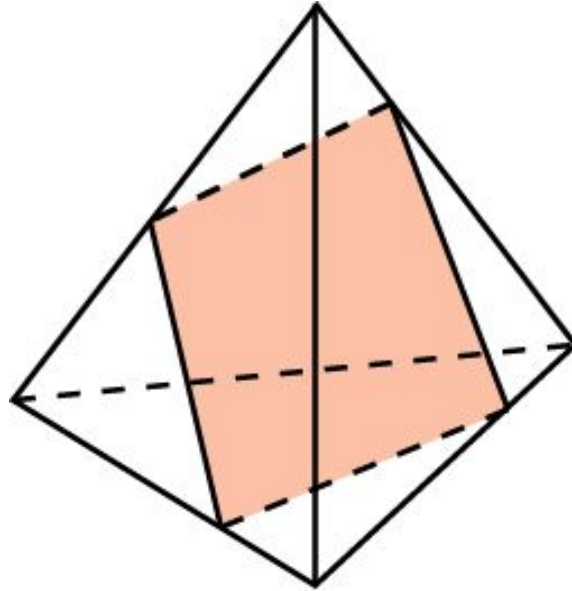
Может ли в сечении правильного тетраэдра плоскостью получиться квадрат?



Ответ: Да. Если сечение проходит через середины ребер.

Упражнение 9

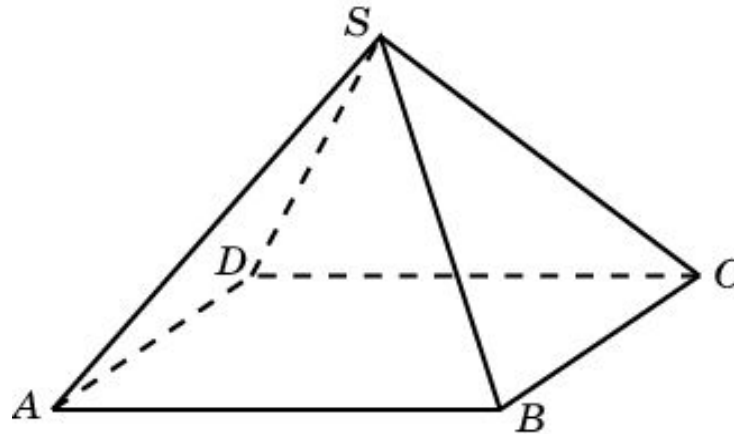
Может ли в сечении тетраэдра плоскостью получиться четырехугольник, изображенный на рисунке?



Ответ: Нет.

Упражнение 10

Какие многоугольники можно получить в сечении четырехугольной пирамиды плоскостью?

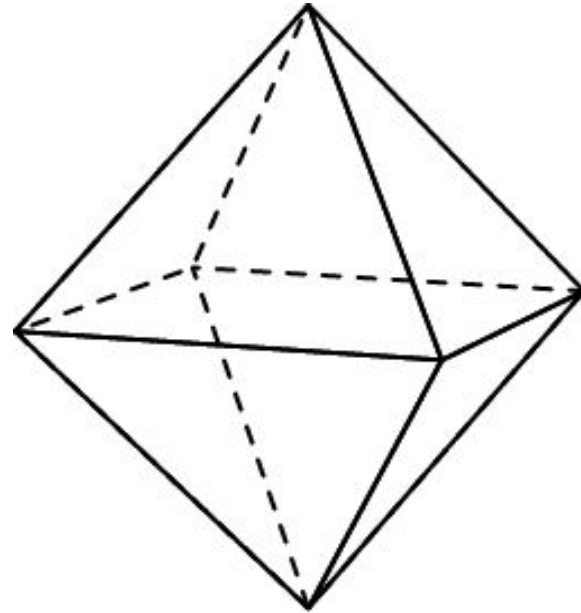


Ответ: Треугольник, четырехугольник, пятиугольник.

Упражнение 11

Может ли в сечении октаэдра плоскостью получиться:

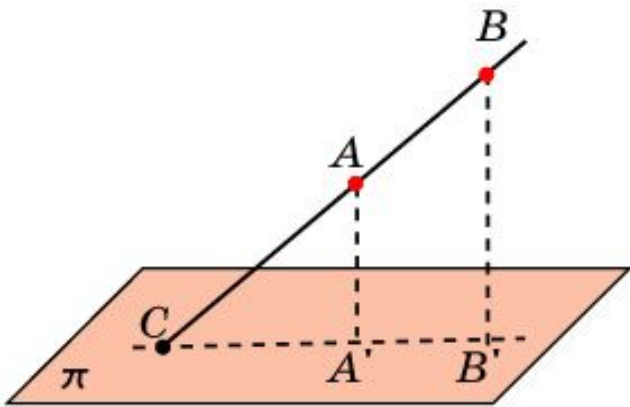
- а) треугольник;
- б) четырехугольник;
- в) пятиугольник;
- г) шестиугольник;
- д) семиугольник;
- е) восьмиугольник?



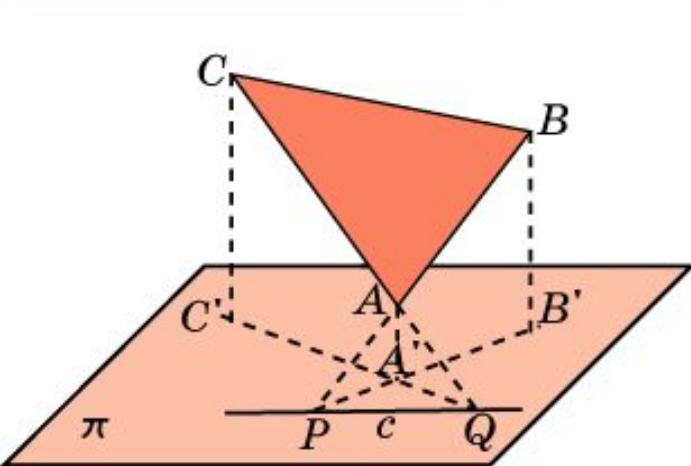
Ответ: а) Нет; б) да; в) нет; г) да; д) нет; е) нет.

Построение сечений

При построении сечений многогранников, базовыми являются построения точки пересечения прямой и плоскости, а также линии пересечения двух плоскостей.



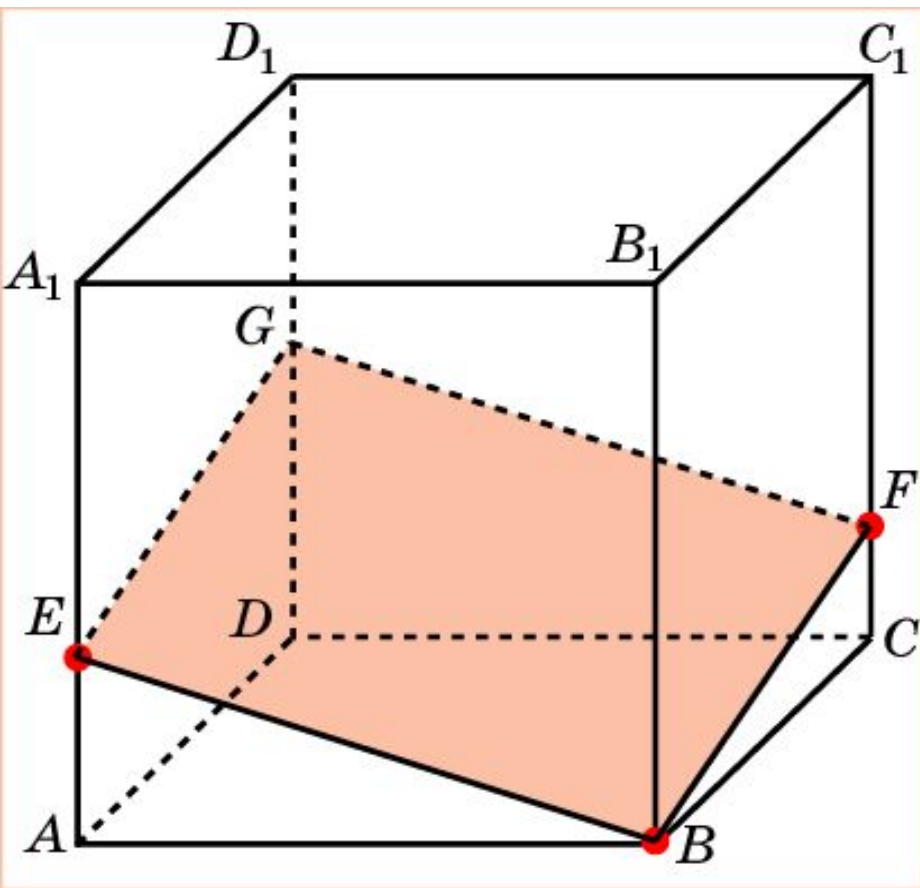
Если даны две точки A и B прямой и известны их проекции A' и B' на плоскость, то точкой C пересечения данной прямой и плоскости будет точка пересечения прямых AB и $A'B'$



Если даны три точки A , B , C плоскости и известны их проекции A' , B' , C' на другую плоскость, то для нахождения линии пересечения этих плоскостей находят точки P и Q пересечения прямых AB и AC со второй плоскостью. Прямая PQ будет искомой линией пересечения плоскостей.

Упражнение 1

Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки E , F , лежащие на ребрах куба и вершину B .



Решение. Для построения сечения куба, проходящего через точки E , F и вершину B ,

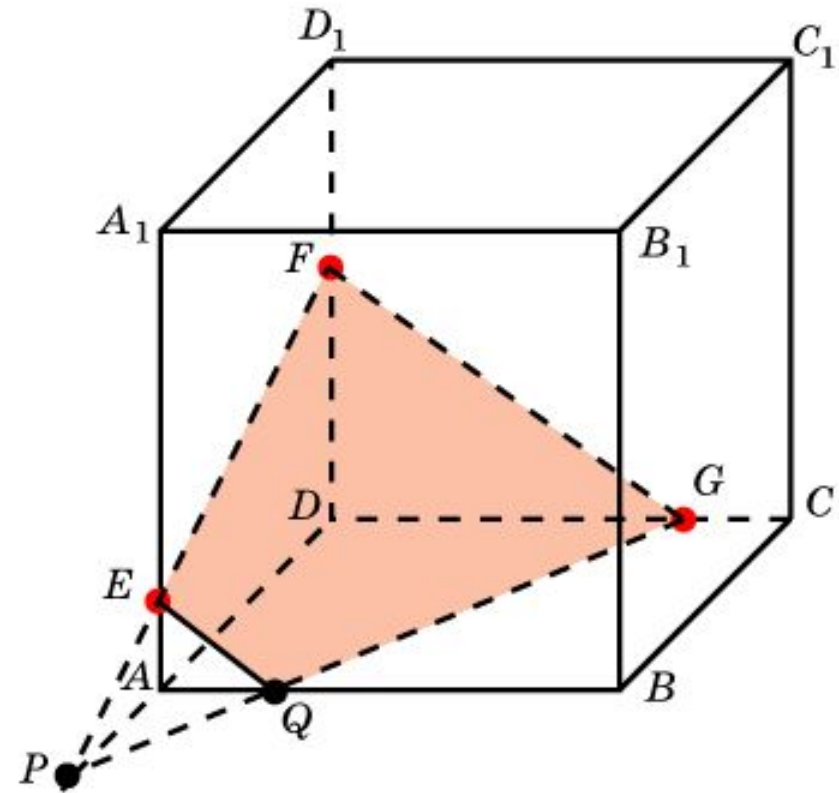
Соединим отрезками точки E и B , F и B .

Через точки E и F проведем прямые, параллельные BF и BE , соответственно.

Полученный параллелограмм $BFG E$ будет искомым сечением.

Упражнение 2

Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки E , F , G , лежащие на ребрах куба.



Решение. Для построения сечения куба, проходящего через точки E , F , G , проведем прямую EF и обозначим P её точку пересечения с AD .

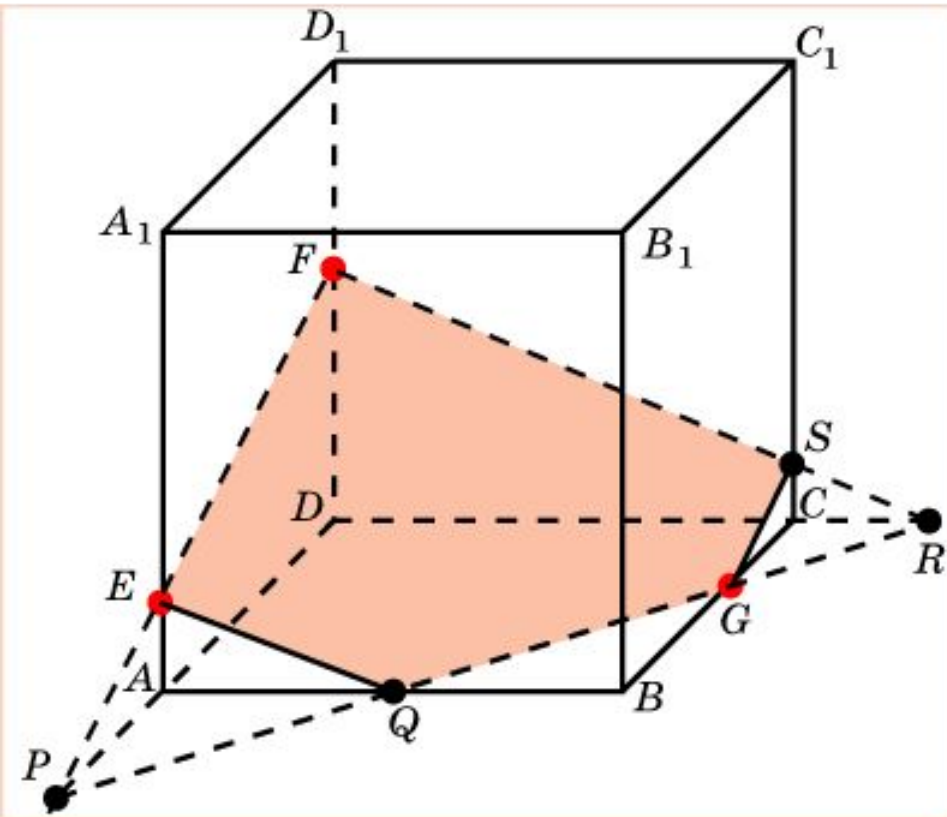
Обозначим Q точку пересечения прямых PG и AB .

Соединим точки E и Q , F и G .

Полученная трапеция $EFGQ$ будет искомым сечением.

Упражнение 3

Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки E , F , G , лежащие на ребрах куба.



Решение. Для построения сечения куба, проходящего через точки E , F , G ,

проведем прямую EF и обозначим P её точку пересечения с AD .

Обозначим Q , R точки пересечения прямой PG с AB и DC .

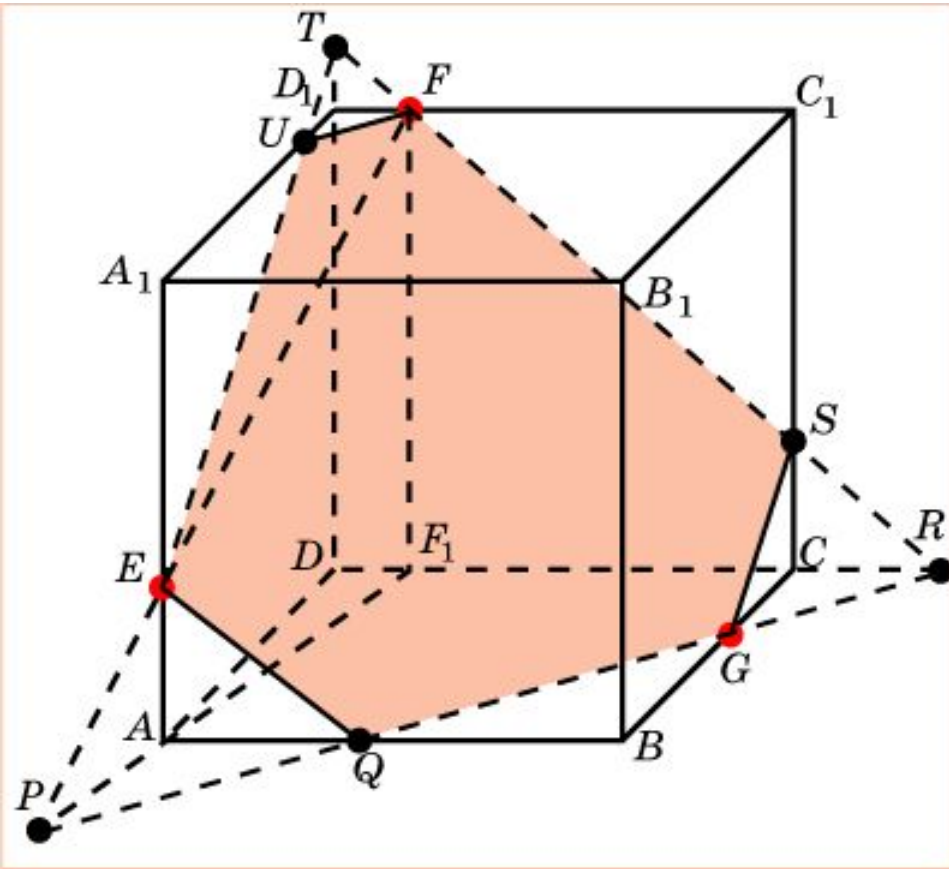
Обозначим S точку пересечения FR с CC_1 .

Соединим точки E и Q , G и S .

Полученный пятиугольник $EFSGQ$ будет искомым сечением.

Упражнение 4

Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки E , F , G , лежащие на ребрах куба.



Решение. Для построения сечения куба, проходящего через точки E , F , G , найдем точку P пересечения прямой EF и плоскости грани $ABCD$.

Обозначим Q , R точки пересечения прямой PG с AB и CD .

Проведем прямую RF и обозначим S , T её точки пересечения с CC_1 и DD_1 .

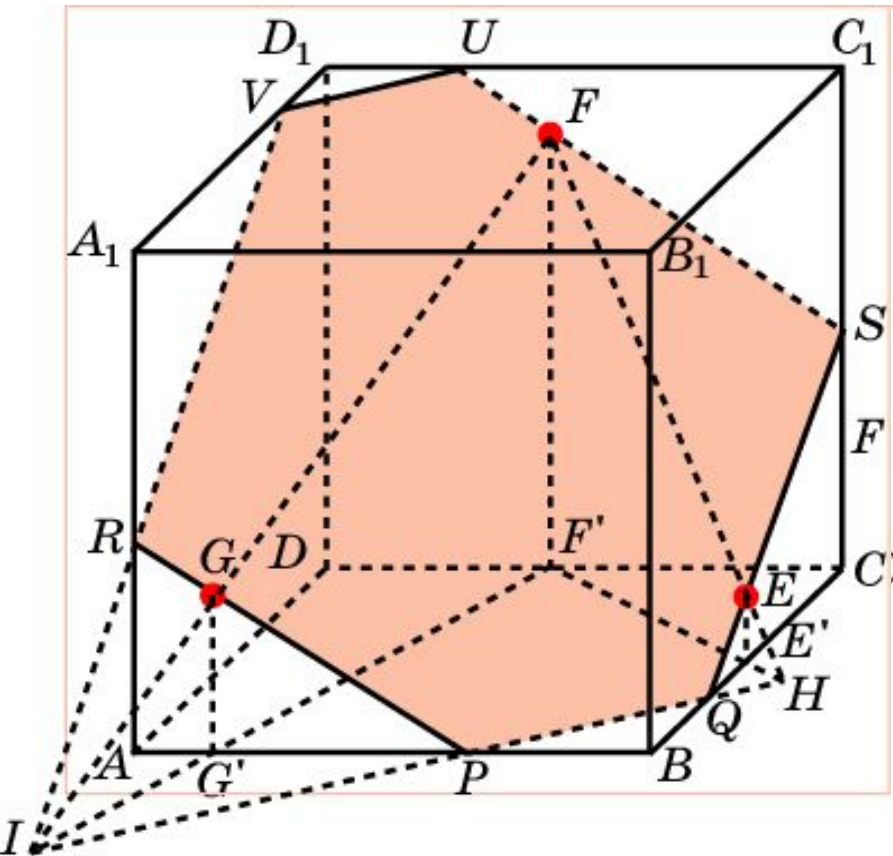
Проведем прямую TE и обозначим U её точку пересечения с A_1D_1 .

Соединим точки E и Q , G и S , U и F .

Полученный шестиугольник $EUFSGQ$ будет искомым сечением.

Упражнение 5

Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки E , F , G , принадлежащие граням BB_1C_1C , CC_1D_1D , AA_1B_1B , соответственно.



Решение. Из данных точек опустим перпендикуляры EE' , FF' , GG' на плоскость грани $ABCD$, и найдем точки I и H пересечения прямых FE и FG с этой плоскостью.

IH будет линией пересечения искомой плоскости и плоскости грани $ABCD$. Обозначим Q , R точки пересечения прямой IH с AB и BC .

Проведем прямые PG и QE и

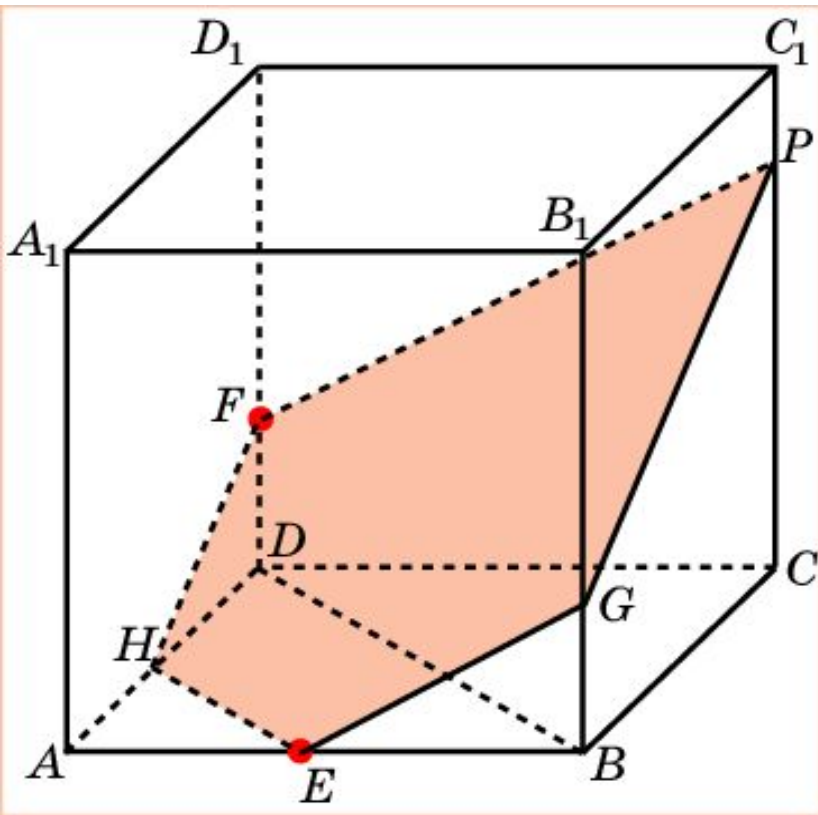
обозначим R , S их точки пересечения с AA_1 и CC_1 .

Проведем прямые SU , UV и RV , параллельные PR , PQ и QS .

Полученный шестиугольник $RPQSUV$ будет искомым сечением.

Упражнение 6

Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки E , F , лежащие на ребрах куба, параллельно диагонали BD .



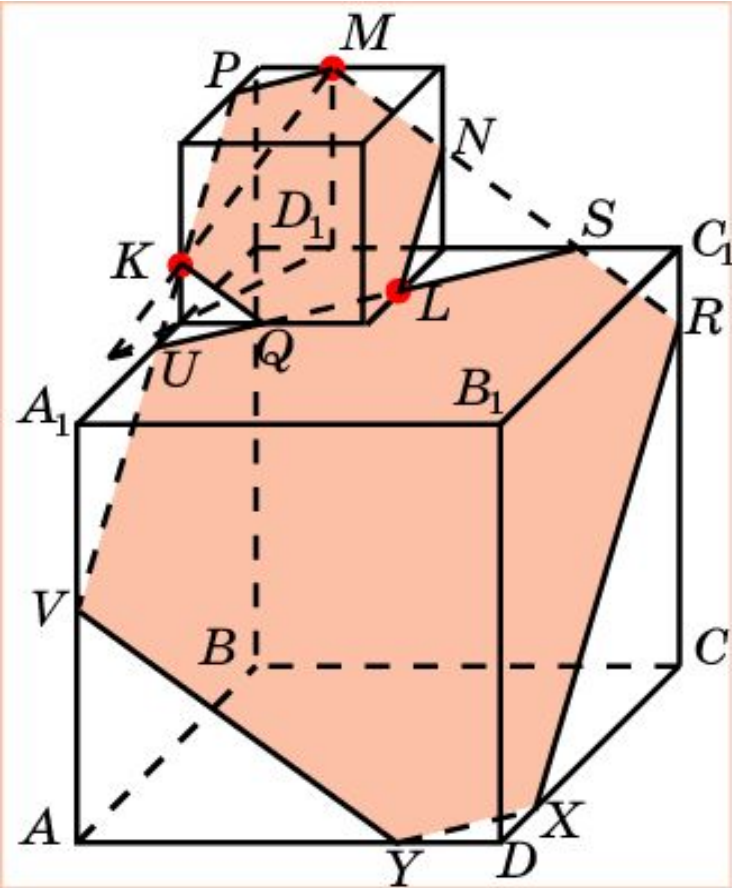
Решение. Проведем прямые FG и EH , параллельные BD .

Проведем прямую FP , параллельную EG , и соединим точки P и G .

Соединим точки E и G , F и H .

Полученный пятиугольник $EGPFH$ будет искомым сечением.

Постройте сечение двух кубов плоскостью, проходящей через точки K, L, M , лежащие на ребрах куба.



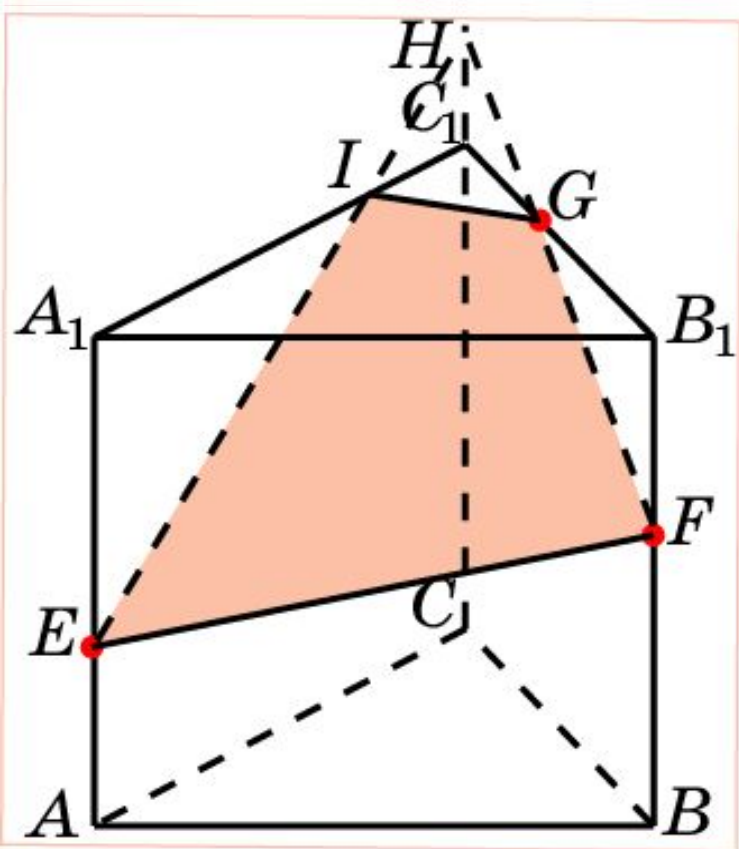
Решение. Сначала построим сечение верхнего куба. Это будет шестиугольник $LNMPKQ$.

Продолжим MN , PK и QL . Соответствующие точки обозначим R , S и U, V .

Проведем прямые RX и VY , параллельные UV и SR , соответственно.

Искомое сечение состоит из двух шестиугольников $LNMPKQ$ и $RSUVYX$.

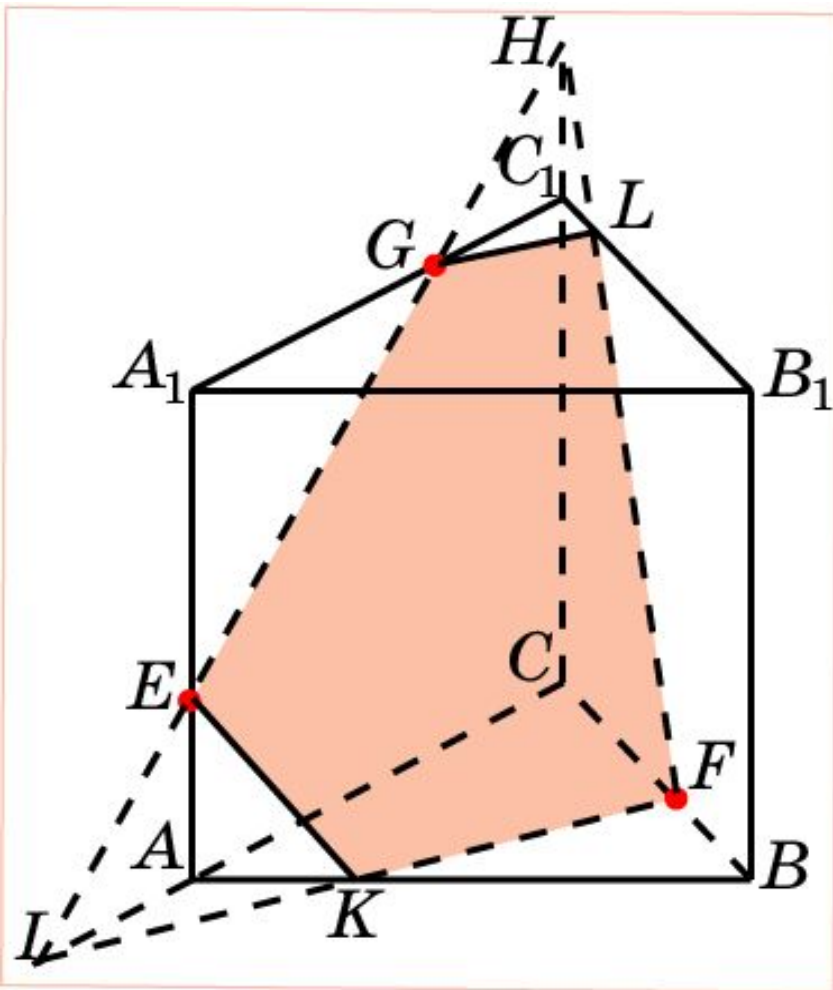
Постройте сечение призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью, проходящей через точки E, F, G .



Решение. Соединим точки E и F .
Проведем прямую FG и ее точку пересечения с CC_1 обозначим H .
Проведем прямую EH и ее точку пересечения с A_1C_1 обозначим I .
Соединим точки I и G .

Полученный четырехугольник $EFGI$ будет искомым сечением.

Постройте сечение призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью, проходящей через точки E, F, G .



Решение. Проведем прямую EG и обозначим H и I ее точки пересечения с CC_1 и AC .

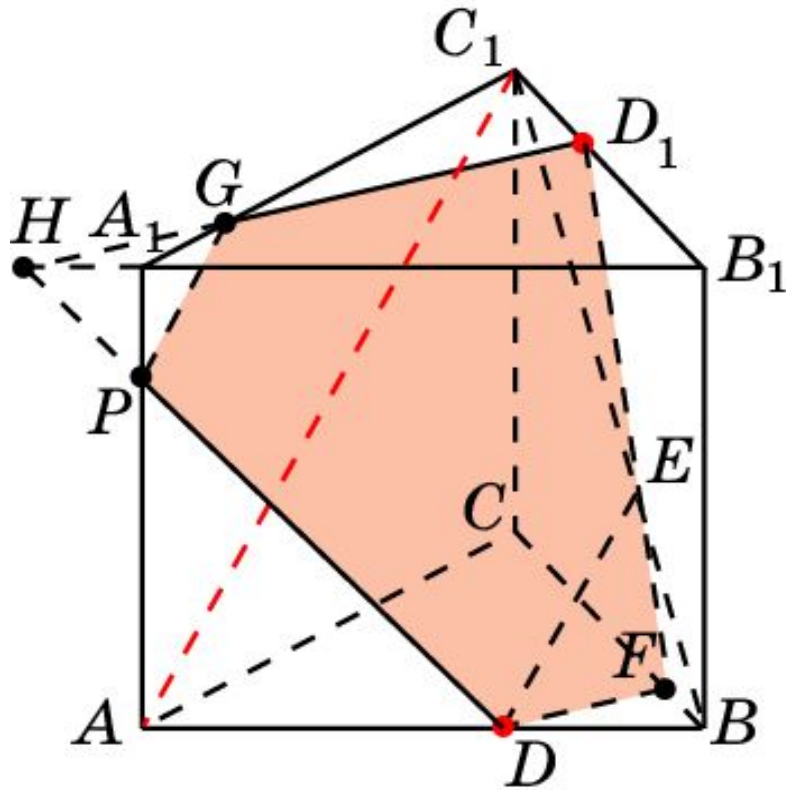
Проведем прямую IF и ее точку пересечения с AB обозначим K .

Проведем прямую FH и ее точку пересечения с B_1C_1 обозначим L .

Соединим точки E и K , G и L .

Полученный пятиугольник $EKFLG$ будет искомым сечением.

Постройте сечение призмы $ABC A_1 B_1 C_1$ плоскостью, параллельной AC_1 , проходящей через точки D и D_1 .



Решение. Через точку D проведем прямую параллельную AC_1 и обозначим E ее точку пересечения с прямой BC_1 . Эта точка будет принадлежать плоскости грани $ADD_1 A_1$.

Проведем прямую DE и обозначим F ее точку пересечения с ребром BC .

Соединим отрезком точки F и D .

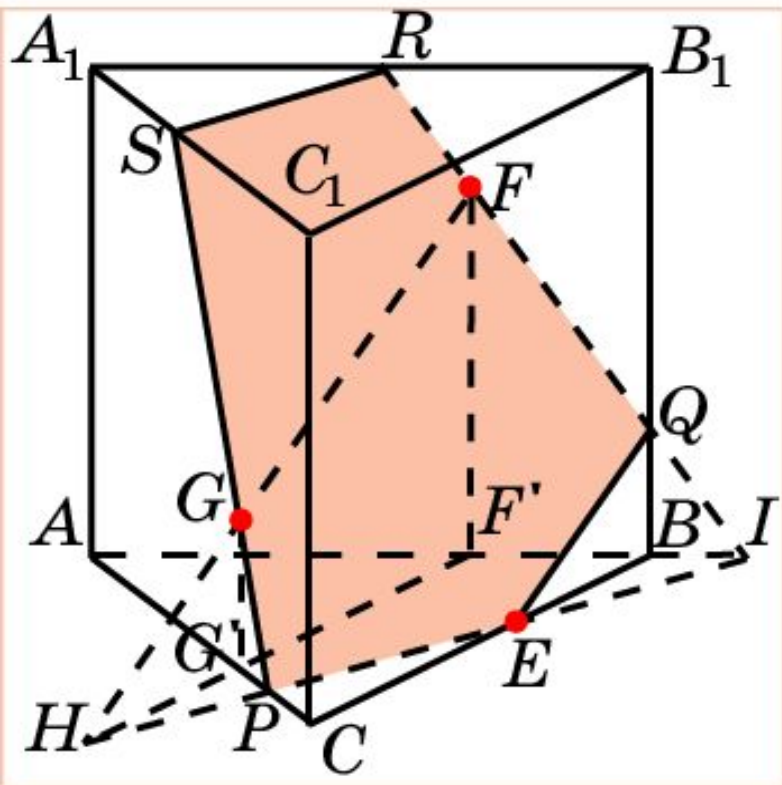
Через точку D проведем прямую параллельную прямой FD и обозначим G точку ее пересечения с ребром $A_1 C_1$, H – точку ее пересечения с прямой $A_1 B_1$.

Проведем прямую DH и обозначим P ее точку пересечения с ребром AA_1 .

Соединим отрезком точки P и G .

Полученный четырехугольник $EFHG$ будет искомым сечением.

Построить сечение призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью, проходящей через точки E на ребре BC , F на грани ABB_1A_1 и G на грани ACC_1A_1 .



Решение. Проведем прямую GF и найдем точку H ее пересечения с плоскостью ABC .

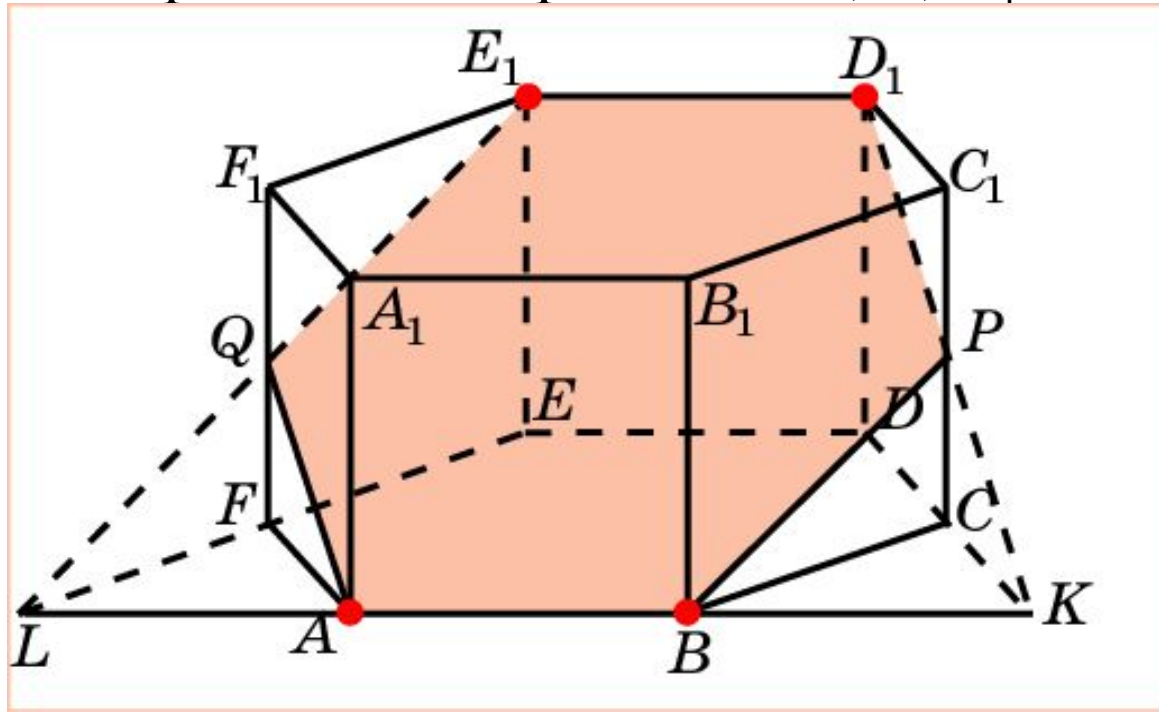
Проведем прямую EH , и обозначим P и I ее точки пересечения с AC и AB .

Проведем прямые PG и IF , и обозначим S , R и Q их точки пересечения с A_1C_1 , A_1B_1 и BB_1 .

Соединим точки E и Q , S и R .

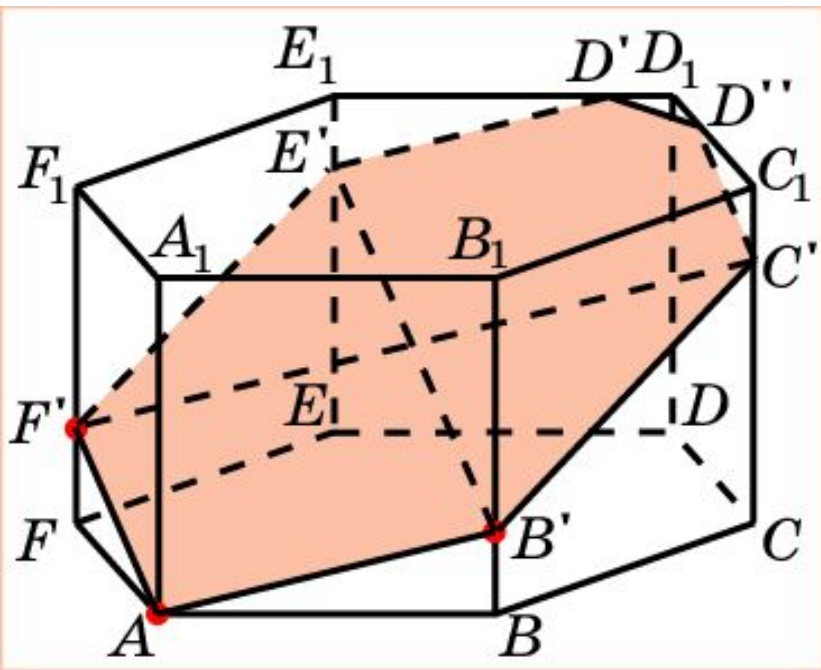
Полученный пятиугольник $EQRSP$ будет искомым сечением.

Построить сечение правильной шестиугольной призмы плоскостью, проходящей через точки A , B , D_1 .



Решение. Заметим, что сечение будет проходить через точку E_1 .
Проведем прямую AB и найдем ее точки пересечения K и L с прямыми CD и FE .
Проведем прямые KD_1 , LE_1 и найдем их точки пересечения P , Q с прямыми CC_1 и FF_1 .
Шестиугольник $ABPD_1E_1Q$ будет искомым сечением.

Построить сечение правильной шестиугольной призмы плоскостью, проходящей через точки A, B', F' .



Решение. Проведем отрезки AB' и AF' .

Через точку B' проведем прямую, параллельную AF' , и ее точку пересечения с EE_1 обозначим E' .

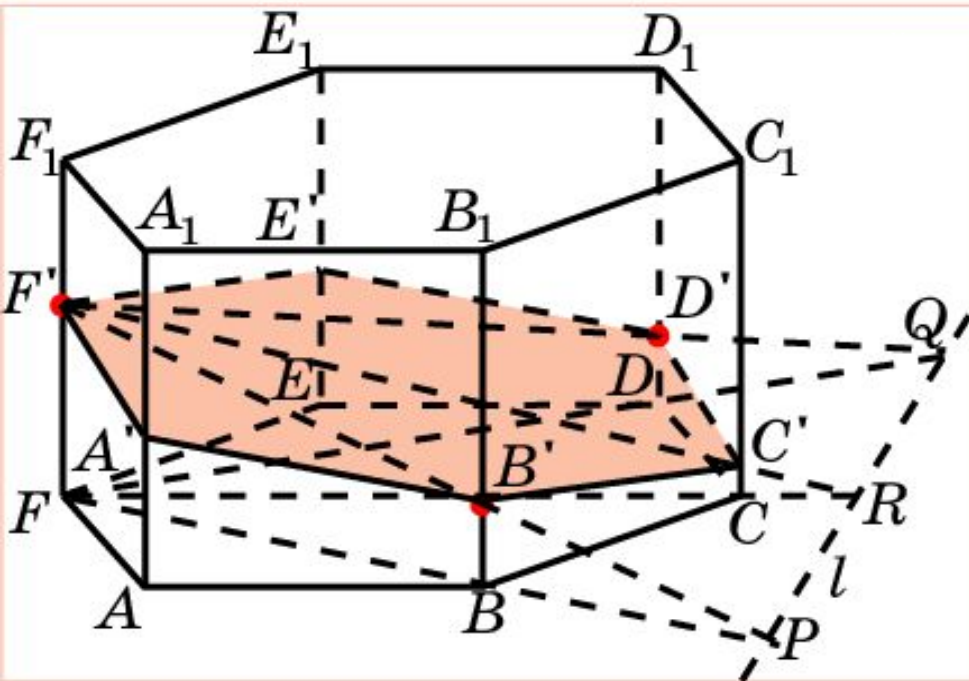
Через точку F' проведем прямую, параллельную AB' , и ее точку пересечения с CC_1 обозначим C' .

Через точки E' и C' проведем прямые, параллельные AB' и AF' , и их точки пересечения с D_1E_1 и C_1D_1 обозначим D', D'' .

Соединим точки $B', C'; D', D''; F', E'$.

Полученный семиугольник $AB'C'D''D'E'F'$ будет искомым сечением.

Построить сечение правильной шестиугольной призмы плоскостью, проходящей через точки F' , B' , D' .



Решение. Проведем прямые $F'B'$ и $F'D'$, и найдем их точки пересечения P и Q с плоскостью ABC .

Проведем прямую PQ .

Обозначим R точку пересечения PQ и FC .

Точку пересечения $F'R$ и CC_1 обозначим C' .

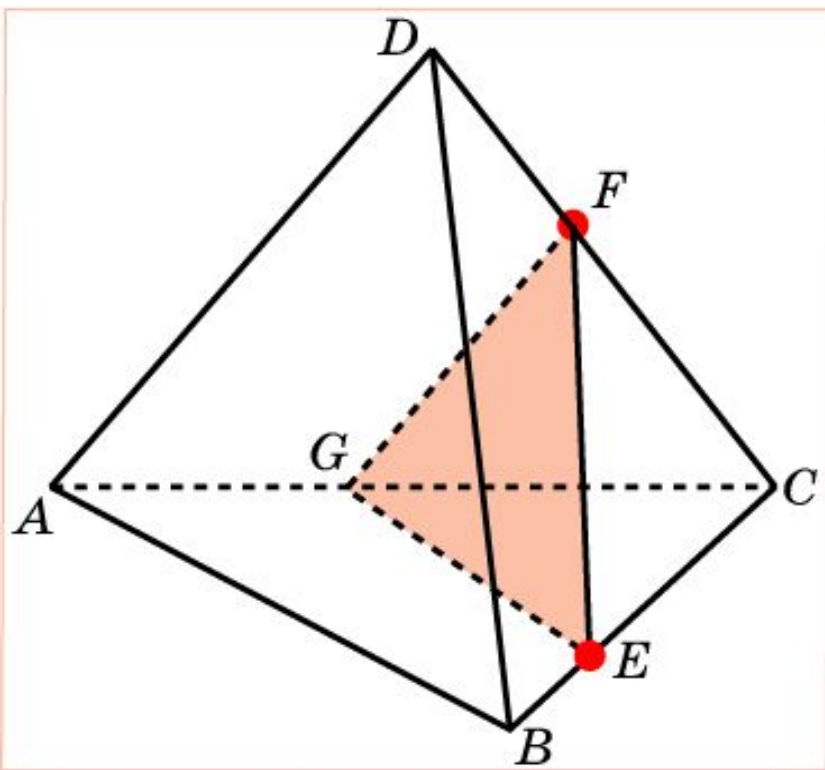
Соединим точки B' , C' и C' , D' .

Через точку F' проведем прямые, параллельные $C'D'$ и $B'C'$, и их точки пересечения с AA_1 и EE_1 обозначим A' и E' .

Соединим точки A' , B' и E' , D' .

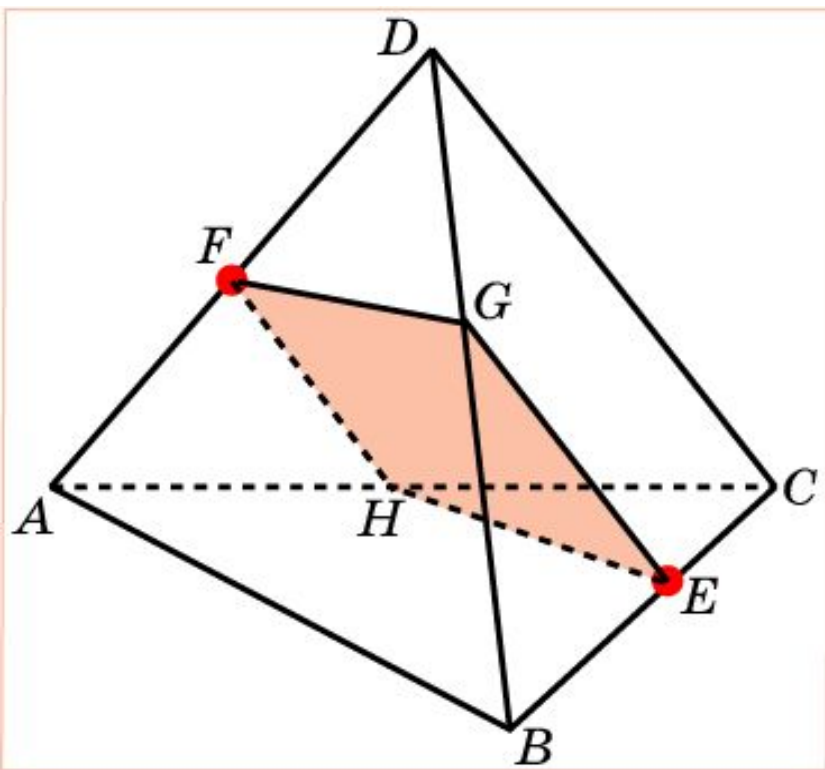
Полученный шестиугольник $A'B'C'D'E'F'$ будет искомым сечением.

Построить сечение пирамиды $ABCD$ плоскостью, параллельной ребру AD и проходящей через точки E , F .



Решение. Соединим точки E и F .
Через точку F проведем прямую FG , параллельную AD .
Соединим точки G и E .
Полученный треугольник EFG будет искомым сечением.

Построить сечение пирамиды $ABCD$ плоскостью, параллельной ребру CD и проходящей через точки E, F .

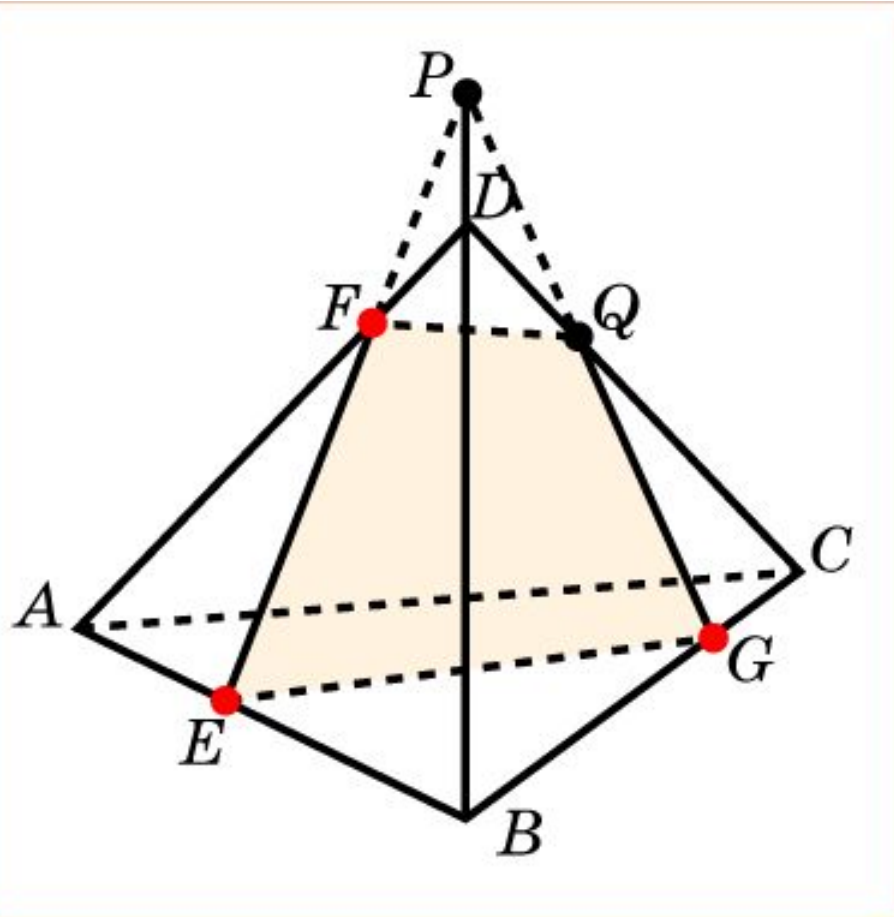


Решение. Через точки E и F проведем прямые EG и FH , параллельные CD .

Соединим точки G и F , E и H .

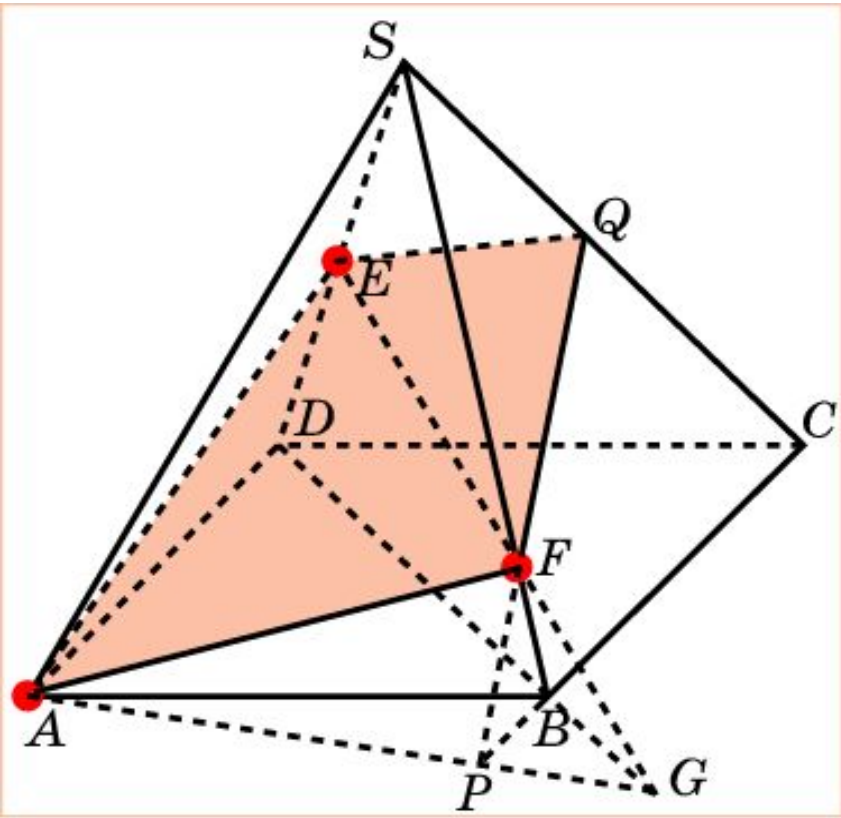
Полученный четырехугольник $EGFH$ будет искомым сечением.

Построить сечение пирамиды $ABCD$ плоскостью, проходящей через точки E, F, G .



Решение. Для построения сечения пирамиды, проходящего через точки E, F, G , проведем прямую EF и обозначим P её точку пересечения с BD . Обозначим Q точку пересечения прямых PG и CD . Соединим точки F и Q , E и G . Полученный четырехугольник $EFQG$ будет искомым сечением.

Построить сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью, проходящей через точки A, E, F .

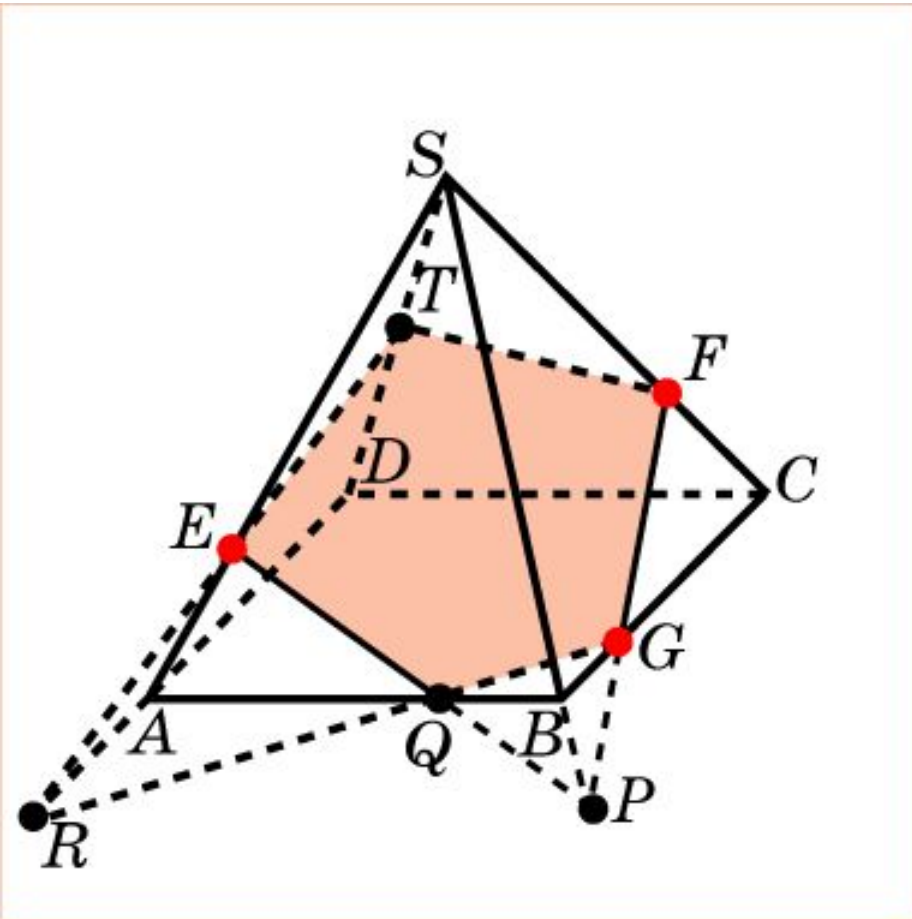


Решение. Для построения сечения пирамиды, проходящего через точки E, F, G , проведем прямую EF и обозначим G её точку пересечения с DB .

Проведем прямые AG и CB . Обозначим P их точку пересечения. Проведем прямую PF и обозначим Q её точку пересечения с SC .

Соединим точки A и F , A и E , E и Q . Полученный четырехугольник $AFQE$ будет искомым сечением.

Построить сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью, проходящей через точки E, F, G .



Решение. Для построения сечения пирамиды, проходящего через точки E, F, G ,

проведем прямую FG и обозначим P её точку пересечения с SB .

Проведем прямую PE и обозначим Q её точку пересечения с AB .

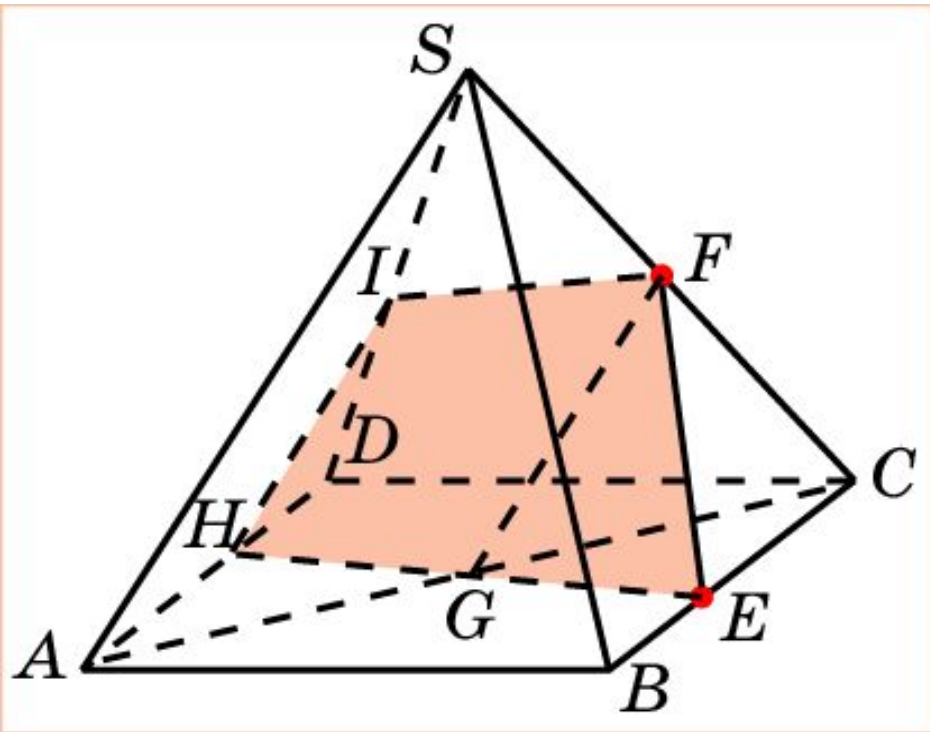
Проведем прямую GQ и обозначим R её точку пересечения с AD .

Проведем прямую RE и обозначим T её точку пересечения с SD .

Соединим точки T и F .

Полученный пятиугольник $ETFGQ$ будет искомым сечением.

Построить сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью, параллельной AS и проходящей через точки E, F .



Решение. Соединим точки E и F .
Через точку F проведем прямую, параллельную AS , и обозначим G ее точку пересечения с AC .

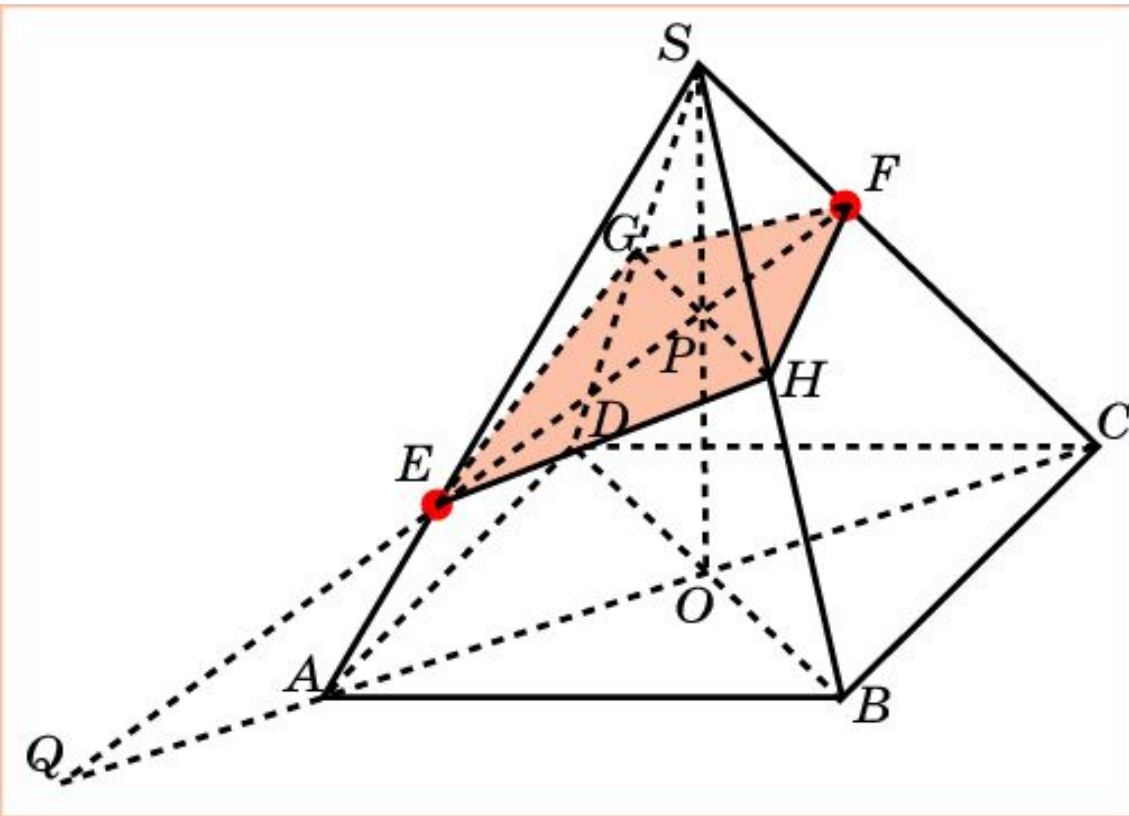
Проведем прямую EG и обозначим H ее точку пересечения с AD .

Через точку H проведем прямую, параллельную AS , и обозначим I ее точку пересечения с SD .

Соединим точки I и F .

Полученный четырехугольник $EFIH$ будет искомым сечением.

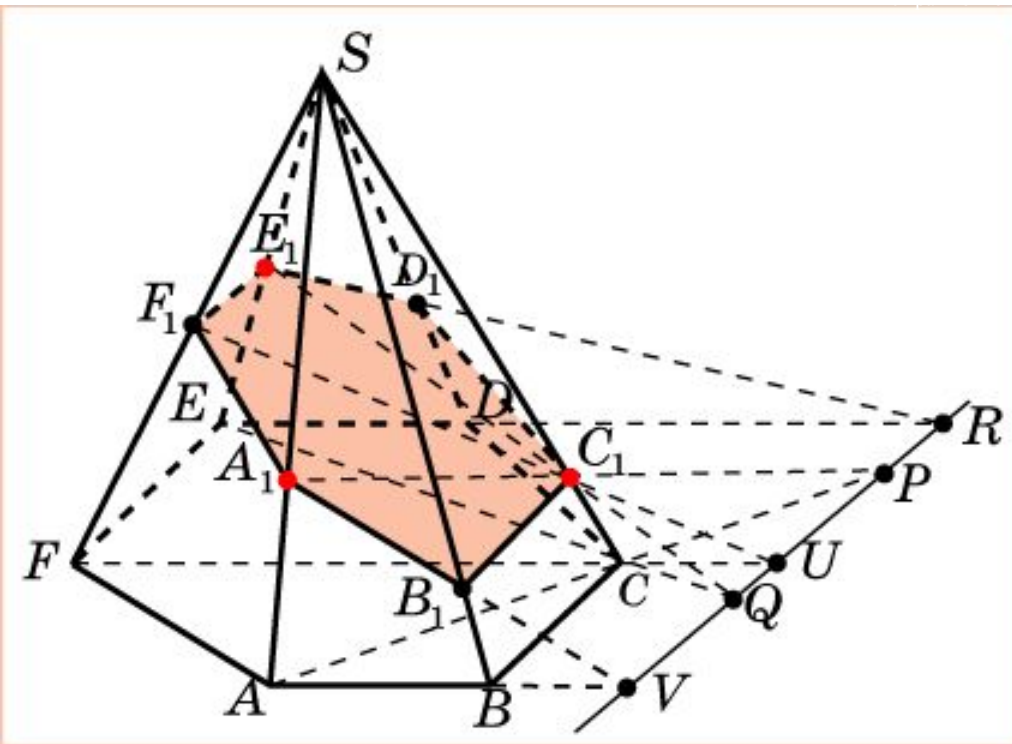
Построить сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью, параллельной BD и проходящей через точки E, F .



Решение. Проведем прямую EF и обозначим Q ее точку пересечения с AC . Проведем прямую SO и обозначим P её точку пересечения с EF . Через точку P проведем прямую GH , параллельную BD . Соединим точки F, G, E, H .

Полученный четырехугольник $FGEN$ будет искомым сечением.

Построить сечение пирамиды $SAB CDE F$ плоскостью, проходящей через точки A_1, C_1, E_1 .



Решение. Найдем точку пересечения P прямой A_1C_1 с плоскостью основания. Найдем точку Q пересечения прямой E_1C_1 с плоскостью основания. Прямая PQ будет линией пересечения плоскости сечения и плоскости основания.

Проведем прямую ED и обозначим R , её точку пересечения с прямой PQ .

Проведем прямую E_1R и обозначим D_1 её точку пересечения с SD .

Аналогичным образом находятся точки F_1 и B_1 .

Шестиугольник $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ будет искомым сечением.