8.4. ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Пусть переменная *y* есть функция от переменной *u*, *y=f(u)*.

И пусть переменная *u* есть функция от переменной *x*, *u=φ(x)*.

То есть задана сложная функция

$$y = f\left[\varphi(x)\right]$$

ТЕОРЕМА

Если y=f(u), u=φ(x) – дифференцируемые функции своих аргументов, то производная сложной функции существует и равна производной данной функции по промежуточному аргументу, умноженной на производную самого промежуточного аргумента по независимой переменной:

$$y' = f'(u) \cdot u'_x$$

Доказательство:

Дадим аргументу x приращение Δx, не равное 0, тогда функции $u=\varphi(x)$, $y=f(u)$ получат приращения Δu и Δy.

Предположим, что Δu не равно нулю, тогда в силу дифференцируемости функции $y=f(u)$ получим:

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u)$$

Причем, величина $f'(u)$ не зависит от Δu.

На основании *теоремы о <u>связи бесконечно малых величин с пределами функций</u>* функцию, стоящую под знаком предела, можно представить как сумму этого предела и бесконечно малой величины:

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u) + \alpha(\Delta u)$$

где *α(Δu)* – бесконечно малая величина при $\Delta u \to 0$

Отсюда: $$\Delta y = f'(u)\cdot\Delta u + \alpha(\Delta u)\cdot\Delta u$$

Делим обе части равенства на *Δx:*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u)\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha(\Delta u)\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Т.к. по условию функция *u=φ(x)* дифференцируема, то она непрерывна в точке *x*.

Следовательно, при $\Delta x \to 0$ **и** $\Delta u \to 0$

$$\alpha(\Delta u) \to 0$$

Переходим в последнем равенстве к пределу при

$$\Delta x \to 0$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}}_{u'_x} \cdot f'(u) + \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta u)}_{0} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} =$$

$$= f'(u) \cdot u'_x$$

<u>Правило дифференцирования сложной функции</u> **можно записать иначе:**

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

или

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Примеры.

Найти производные сложных функций:

1

$$y = \left(\sqrt{x} + 5\right)^3$$

Решение:

$$y' = 3\cdot\left(\sqrt{x}+5\right)^2\cdot\left(\sqrt{x}+5\right)' =$$

$$= 3\cdot\left(\sqrt{x}+5\right)^2\cdot\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\left(\sqrt{x}+5\right)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}$$

2

$$y = \sqrt[3]{\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}}$$

Решение:

$$y' = \frac{1}{3}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)' =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{(x^2-1)' \cdot (x^2+1) - (x^2+1)' \cdot (x^2-1)}{(x^2+1)^2} =$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{2x\cdot(x^2+1)-2x\cdot(x^2-1)}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{\cancel{2x^3}+2x-\cancel{2x^3}+2x}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{4x}{(x^2+1)^2}$$