

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Лекція 4

Загальні визначення

Диференціальним рівнянням називають співвідношення, що пов'язує між собою незалежну змінну, функцію та її похідні (чи диференціали)

- **Порядком** диференціального рівняння називають найбільший порядок похідної (чи диференціала), що входить у рівняння.
- У **загальному виді** диференціальне рівняння n -го порядку може бути записано таким чином:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

У цьому рівнянні x – незалежна змінна, y - невідома функція, $y', y'', y^{(n)}$ - похідні функції.

- Звичайне диференціальне рівняння першого порядку можна записати у такому вигляді:

$$F(x, y, y') = 0 \quad (2)$$

• **Загальним розв'язком** диференціального рівняння n -го порядку називається функція:

$$y = f(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \quad (3)$$

де C_1, C_2, \dots, C_n - сталі величини.

• **Загальним розв'язком** диференціального рівняння першого порядку називається функція:

$$y = f(x, C) \quad (4)$$

• **Частинним розв'язком** диференціального рівняння (2) називають такий розв'язок, що можна одержати із загального розв'язку (4) при деякому конкретному значенні сталої величини C . Це значення знаходять при, так званих, початкових умовах :

$$y = y_0 \quad x = x_0 \quad ,$$

розв'язавши рівняння $y_0 = f(x_0, C)$ відносно C .

Рівняння з відокремлюваними змінними

Диференціальне рівняння першого порядку, що може бути приведене до вигляду:

$$f_1(x) \cdot f_2(y) dx + \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(y) dy = 0, \quad (5)$$

називають диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними.

Після ділення обох частин рівняння на добуток $\varphi_1(x) \cdot f_2(y)$, рівняння (5) прийме вид:

$$\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)} dx + \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)} dy = 0 \quad (6)$$

Якщо проінтегрувати обидві частини рівняння (6), то його загальний розв'язок може бути записаний у вигляді:

$$\int \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)} dx + \int \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)} dy = C \quad (7)$$

Приклад.

Розв'язати рівняння $y' = x \cdot y$.

Розв'язання. Робимо заміну $y' = \frac{dy}{dx}$.

Одержимо: $\frac{dy}{dx} = x \cdot y$.

Розділимо змінні: $\frac{dy}{y} = x \cdot dx$.

Проінтегруємо: $\int \frac{dy}{y} = \int x \cdot dx$.

Знайдемо інтеграли у лівій та правій частині рівняння:

$$\int \frac{dy}{y} = \ln|y| + C_1, \quad \int x dx = \frac{x^2}{2} + C_2.$$

Прирівнявши значення інтегралів, одержуємо: $\ln|y| = \frac{x^2}{2} + C$.

Звідки $y = e^{\frac{x^2}{2} + C}$ - загальний розв'язок диференціального рівняння

Приклад.

$$(y^2 - 4)dx = x \cdot y \cdot dy, \quad y(1) = 2.$$

Розв'язання. Розділимо змінні:

$$\frac{dx}{x} = -\frac{y}{y^2 - 4} dy.$$

Проінтегруємо: $\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{y}{y^2 - 4} dy.$

Знайдемо інтеграли у лівій та правій частині рівняння: $\int \frac{y}{y^2 - 4} dy = -\int \frac{dx}{x}.$

$$\int \frac{y}{y^2 - 4} dy = \left. \begin{array}{l} \text{робимо заміну:} \\ y^2 - 4 = t; \\ d(y^2 - 4) = dt; \\ 2y dy = dt \\ y dy = \frac{1}{2} dt \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \ln|y^2 - 4| + C_1.$$

$$\frac{1}{2} \ln|y^2 - 4| = -\ln|x| + \ln C; \quad \frac{1}{2} \ln|y^2 - 4| = \ln \left| \frac{C}{x} \right|; \quad \ln|y^2 - 4| = 2 \ln \left| \frac{C}{x} \right|;$$

$$\ln|y^2 - 4| = \ln \left| \frac{C}{x} \right|^2; \quad \ln|y^2 - 4| = \ln \left| \frac{C^2}{x^2} \right|; \quad y^2 - 4 = \frac{C^2}{x^2};$$

$$y^2 = \frac{C^2}{x^2} + 4 \text{ - загальний розв'язок рівняння, або: } y = \pm \sqrt{\frac{C^2}{x^2} + 4}.$$

Знайдемо частинний розв'язок диференціального рівняння із заданою

початковою умовою $y(1) = 2$: $2^2 = \frac{C^2}{1^2} + 4$; $4 = C^2 + 4$; $C = 0$.

Отже: $y = \pm \sqrt{\frac{0}{x^2} + 4}$; $y = \pm \sqrt{4}$; $y = \pm 2$ - **частинний розв'язок**

диференціального рівняння із заданою початковою умовою $y(1) = 2$.

Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

Однорідним диференціальним рівнянням першого порядку називають рівняння, виду:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right), \text{ або } y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \quad (8)$$

Для розв'язування такого рівняння вводять підстановку:

$$u = \frac{y}{x}, \text{ де } u = u(x) - \text{функція}. \quad (9)$$

Приклад.

Знайти розв'язок диференціального рівняння: $xy' = y - x$.

Розв'язання. Розділимо почленно ліву і праву частини рівняння на x в найвищому степені. У нашому випадку, це перша степінь. Одержимо рівняння:

$$y' = \frac{y}{x} - 1.$$

Введемо підстановку: $u = \frac{y}{x}$ і $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{xdu}{dx} + u$.

Одержимо:

$$\frac{xdu}{dx} + u = u - 1.$$

Розділимо змінні :

$$\frac{xdu}{dx} = u - 1 - u; \quad \frac{xdu}{dx} = -1; \quad \frac{x}{dx} = -\frac{1}{du}; \quad \frac{dx}{x} = -du;$$

Проінтегруємо обидві частини рівняння: $\int \frac{dx}{x} = -\int du$.

Знайдемо інтеграли у лівій та правій частині рівняння:

$$\ln|x| + \ln C = -u; \quad \ln Cx = -u; \quad u = -\ln Cx, \text{ або } u = \ln \frac{1}{Cx}.$$

Виконаємо зворотню заміну $\frac{y}{x} = \ln \frac{1}{Cx}$, та одержимо загальний розв'язок

рівняння - $y = x \ln \frac{1}{Cx}$.

Диференціальні рівняння другого порядку

Диференціальне рівняння другого порядку у загальному виді :

$$F(x, y, y', y'') = 0. \quad (10)$$

Загальним розв'язок даного рівняння буде розв'язок виду:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2). \quad (11)$$

Рішення окремих випадків диференціальних рівнянь другого порядку.

1. У рівнянні відсутня функція та її похідна.

Рівняння має вид: $y'' = f(x)$. (12)

Вводимо нову функцію $u(x) = u = y'$. Тоді $y'' = u'(x)$, або $\frac{du}{dx} = f(x)$.

Звідси: $du = f(x)dx$.

Проінтегруємо та розв'яжемо останнє диференціальне рівняння:

$$\int du = \int f(x)dx.$$

Тоді $u = \int f(x)dx + C_1$ - розв'язок диференціального рівняння в інтегральному виді.

Виконаємо зворотню заміну і підставимо в останній розв'язок:

$$\frac{dy}{dx} = \int f(x)dx + C_1.$$

Одержали звичайне диференціальне рівняння з відокремленими змінними. Розв'яжемо його:

$$\begin{aligned} dy &= \left(\int f(x)dx + C_1 \right) dx; \\ \int dy &= \int \left(\int f(x)dx + C_1 \right) dx; \\ y &= \int \left(\int f(x)dx \right) dx + C_1 x + C_2 \end{aligned} \tag{13}$$

- загальний розв'язок рівняння.

Приклад.

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' = x^2$.

Розв'язання. Робимо заміну: $u(x) = u = y'$, тоді: $y'' = u'(x)$.

Підставимо заміну в рівняння: $u' = x^2$ і запишемо похідну через диференціали:

$$\frac{du}{dx} = x^2.$$

Розв'яжемо одержане рівняння:

$$du = x^2 dx; \quad \int du = \int x^2 dx, \text{ звідки: } u = \frac{x^3}{3} + C_1.$$

Після зворотної заміни $u = y' = \frac{dy}{dx}$, одержимо рівняння: $\frac{dy}{dx} = \frac{x^3}{3} + C_1$.

Розв'яжемо рівняння:

$$dy = \left(\frac{x^3}{3} + C_1 \right) dx; \quad \int dy = \int \left(\frac{x^3}{3} + C_1 \right) dx;$$

$$y = \frac{x^4}{12} + C_1 x + C_2 - \text{загальний розв'язок рівняння.}$$

Рішення окремих випадків диференціальних рівнянь другого порядку.

2. У рівнянні відсутня функція.

Рівняння має вид:

$$y'' = f(x, y'). \quad (14)$$

Виконаємо заміну: $u(x) = u = y'$. Тоді $y'' = u'(x)$. Або $\frac{du}{dx} = f(x, u)$.

Якщо розв'язок цього рівняння – функція $u = \varphi(x, C_1)$, то зробимо зворотню заміну й одержимо рівняння першого порядку $\frac{dy}{dx} = \varphi(x, C_1)$. Розв'яжемо його:

$$dy = \varphi(x, C_1) dx;$$

$$\int dy = \int \varphi(x, C_1) dx.$$

Загальний розв'язок рівняння: $y = \int \varphi(x, C_1) dx + C_2 \quad (15)$

Приклад.

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння: $y'' \cdot x - y' = 1$.

Розв'язання. Це рівняння, що не містить явно шуканої функції.

Робимо заміну: $y' = u(x)$, $y'' = u'(x)$.

Одержимо: $u'x - u = 1$, або $\frac{du}{dx}x = 1 + u$.

Розв'яжемо рівняння: $\frac{du}{1+u} = \frac{dx}{x}$;

$$\int \frac{du}{1+u} = \int \frac{dx}{x}; \quad \ln|1+u| = \ln|x| + \ln C_1; \quad \ln|1+u| = \ln|C_1 \cdot x|;$$

$$1+u = C_1 \cdot x; \quad u = C_1x - 1.$$

Так як $u = y' = \frac{dy}{dx}$, тоді $\frac{dy}{dx} = C_1x - 1$.

Розв'яжемо останнє рівняння: $\int dy = \int (C_1x - 1)dx$.

$y = -C_1x - x + C_2$ - загальній розв'язок рівняння.

Рішення окремих випадків диференціальних рівнянь другого порядку.

3. У рівнянні відсутній аргумент.

Дано рівняння: $y'' = f(y, y')$. (16)

Виконаємо заміну: $u(x) = u = y' = \frac{dy}{dx}$. Тоді: $y'' = u'(x) = \frac{du}{dx}$.

Так, як $dx = \frac{dy}{u}$, тоді: $y'' = \frac{du}{\cancel{dy}/u} = u \frac{du}{dy}$.

Підставимо $y' = u$ і $y'' = u \frac{du}{dy}$ у рівняння (16), та одержимо рівняння:

$$u \frac{du}{dy} = f(y, C_1).$$

Якщо його розв'язком є функція $u = \varphi(y, C_1)$, то, виконавши зворотню заміну $u = y' = \frac{dy}{dx}$, одержимо рівняння першого порядку: $\frac{dy}{dx} = \varphi(y, C_1)$.

Знайдемо його розв'язок:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} &= dx; & \int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} &= \int dx; \\ & & \int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} &= x + C_2 \end{aligned} \quad (17)$$

- загальний розв'язок диференціального рівняння другого порядку.

Приклад.

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' = y'$.

Розв'язання. Виконаємо заміну: $u = y' = \frac{dy}{dx}$ і $y'' = u \frac{du}{dy}$.

Одержимо звичайне диференціальне рівняння з відокремленими змінними:

$$u \frac{du}{dy} = u.$$

Розділимо ліву і праву частини на u і розв'яжемо його:

$$\frac{du}{dy} = 1; \quad du = dy; \quad \int du = \int dy;$$
$$u = y + C_1.$$

Виконаємо зворотню заміну і розв'яжемо наступне рівняння:

$$\frac{dy}{dx} = y + C_1; \quad \frac{dy}{y + C_1} = dx;$$

$$\int \frac{dy}{y + C_1} = \int dx; \quad \ln|y + C_1| = x + C_2; \quad e^{x+C_2} = y + C_1;$$

$y = e^{x+C_2} - C_1$ - загальний розв'язок диференціального рівняння.

ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!