# Лекція 3

## Класична лінійна багатофакторна модель.

**Кафедра інформаційних технологій**
**доцент Бесклінська О.П.**

# Зміст:

**1. Методи побудови багатофакторної регресійної моделі**
**2. Етапи дослідження загальної лінійної моделі множинної регресії**
**3. Приклад параметризації та дослідження багатофакторної регресійної моделі**

# 1. Методи побудови багатофакторної регресійної моделі

1. Метод усіх можливих регресій
2. Метод виключень
3. Покроковий регресійний метод

# 2. Етапи дослідження загальної лінійної моделі множинної регресії

**Розглядається багатофакторна лінійна регресійна модель**

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_m x_m$$

# Для дослідження моделі слід виконати такі кроки.

1 За даними спостережень оцінити параметри $a_1, a_2, ..., a_m$

2 2. Для перевірки адекватності отриманої моделі обчислити:

а) залишки моделі — розбіжності між спостереженими та розрахунковими значеннями залежної змінної $u_i = y_i - \hat{y}_i, \quad i = 1, 2, ..., n$

б) відносну похибку залишків та її середнє значення

**в) залишкову дисперсію**

**г) коефіцієнт детермінації**

**д) вибірковий коефіцієнт множинної кореляції**

# 3 Перевірити статистичну значущість отриманих результатів:

**а) перевірити адекватність моделі загалом:**
**за допомогою *F*-критерію Фішера перевірити гіпотезу**

$$H_0: a_1 = a_2 = \ldots = a_m = 0$$

**проти альтернативної**

$H_A$**: існує хоча б один коефіцієнт** $a_j \neq 0$

**б) перевірити значущість коефіцієнта множинної кореляції, тобто розглянути гіпотезу**

$$H_0 : R = 0$$

**в) перевірити істотність коефіцієнтів регресії: за допомогою t-критерію Стьюдента перевірити гіпотезу**

$\mathbf{H_0}$ : $a_j = 0$ **для всіх** $j = 1, 2, \dots, m$

**проти відповідних альтернативних гіпотез**

$\mathbf{H_A}$ : $a_j \neq 0$ **для всіх** $j = 1, 2, \dots, m$;

**4 Обчислити та інтерпретувати коефіцієнти еластичності**

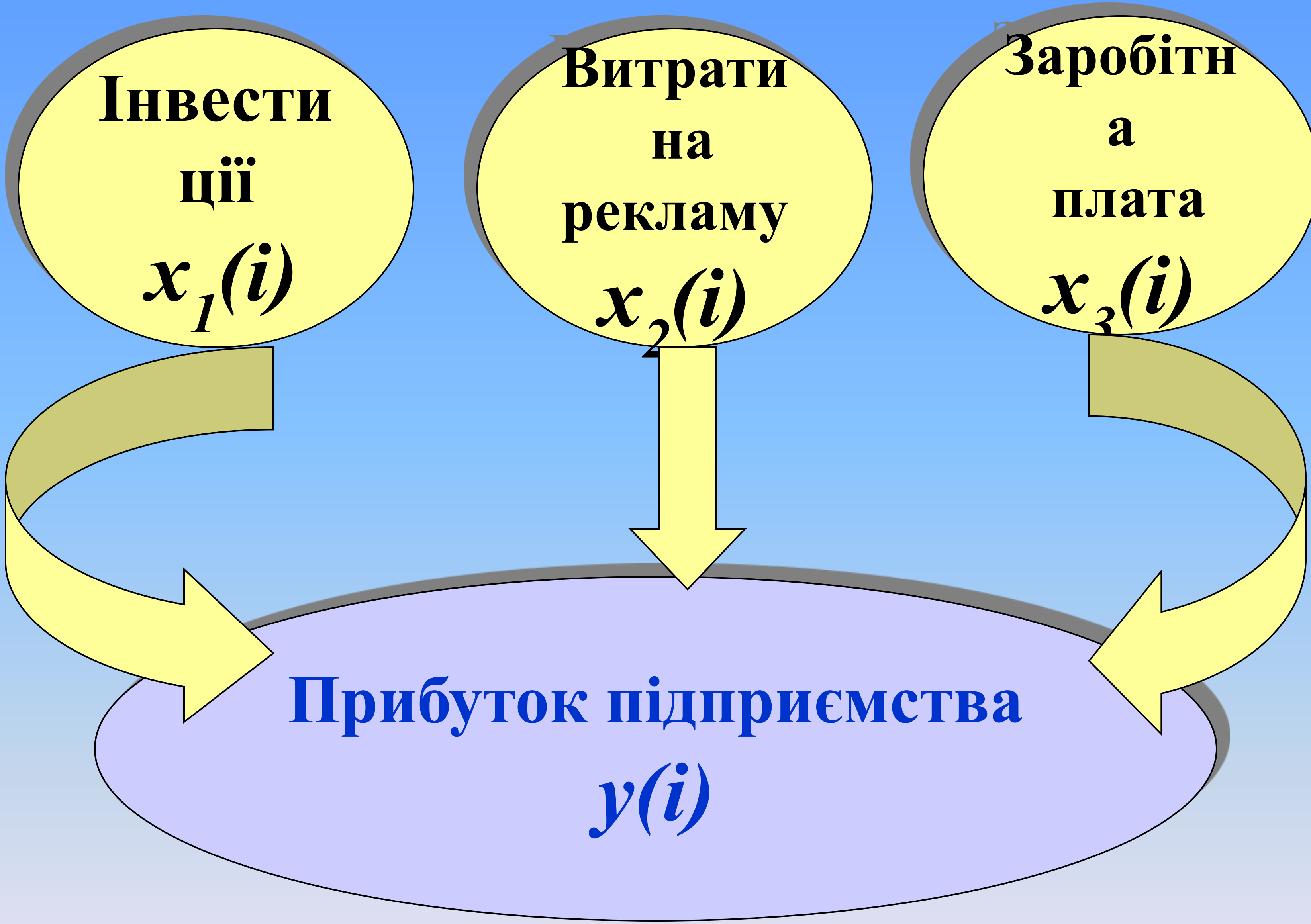
**5. Визначити довірчі інтервали регресії при рівні значущості α.**

**6. Побудувати довірчі інтервали для параметрів регресії.**

**7. Обчислити прогнозні значення $y_p$**

**за значеннями $x_{1p}, x_{2p}, \ldots, x_{mp}$ ,**
**що перебувають за межами**
**базового періоду,**
**і знайти межі довірчих інтервалів**
**індивідуальних прогнозованих значень**
**і межі довірчих інтервалів**
**середнього прогнозу.**

# 3. Приклад параметризації та дослідження багатофакторної регресійної моделі


Інвести
ції
$x_1(i)$
Витрати
на
рекламу
$x_2(i)$
Заробітн
а
плата
$x_3(i)$
Прибуток підприємства
$y(i)$

**Припустимо, що між економічним показником $y$ і факторами $x_1, x_2, x_3$ існує лінійний зв'язок.**

$$\hat{y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_1 + \hat{a}_2 x_2 + \hat{a}_3 x_3$$

$$\hat{a}_0, \hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3$$

**параметри моделі, які потрібно оцінити**

# Вихідні дані в умовних одиницях

| Номер спост. | $x_1(i)$ | $x_2(i)$ | $x_3(i)$ | $y(i)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 17,37 | 5,28 | 1,42 | 15,7 |
| 2 | 18,24 | 6,47 | 1,58 | 17,34 |
| 3 | 22,47 | 6,98 | 1,98 | 21,57 |
| 4 | 18,47 | 7,05 | 2,04 | 33,5 |
| 5 | 16,82 | 7,94 | 2,38 | 32,30 |
| ...... | ...... | ...... | ...... | ...... |
| 14 | 35,67 | 18,47 | 8,58 | 62,22 |
| 15 | 47,87 | 19,64 | 9,47 | 77,58 |

1

# Знайдемо МНК-оцінки параметрів моделі.

$$Y := \begin{pmatrix} 15.7 \\ 17.34 \\ 21.57 \\ 33.5 \\ 32.3 \\ 37.9 \\ 40.78 \\ 48.02 \\ 43.3 \\ 49.57 \\ 52.14 \\ 55.17 \\ 59.18 \\ 62.22 \\ 77.58 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} & x_1(i) & x_2(i) & x_3(i) \end{array} \\ X := & \begin{pmatrix} 1 & 17.37 & 5.28 & 1.42 \\ 1 & 18.24 & 6.47 & 1.58 \\ 1 & 22.47 & 6.98 & 1.98 \\ 1 & 18.47 & 7.05 & 2.04 \\ 1 & 16.82 & 7.94 & 2.38 \\ 1 & 17.6 & 8.12 & 3.48 \\ 1 & 17.12 & 8.69 & 3.07 \\ 1 & 19.81 & 9.31 & 3.84 \\ 1 & 18.67 & 10.45 & 4.28 \\ 1 & 20.83 & 10.47 & 4.67 \\ 1 & 22.84 & 13.48 & 5.98 \\ 1 & 28.85 & 15.78 & 6.51 \\ 1 & 29.61 & 17.65 & 7.82 \\ 1 & 35.67 & 18.47 & 8.58 \\ 1 & 47.87 & 19.64 & 9.47 \end{pmatrix} \end{array}$$

# Обчислимо оцінки регресійних коефіцієнтів за формулою

$$\hat{a} = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

де $X^T$ — транспонована матриця $X$

# Виконавши обчислення, одержимо параметри моделі:

Regression Summary for Dependent Variable: y (Данные)
R= ,95622179 R?= ,91[illegible]36011 Adjusted R?= ,89100378
F(3,11)=39,148 p<,00[illegible]00 Std.Error of estimate: 5,7357

| N=15 | Beta | Std.Err. of Beta | B | Std.Err. of B | t(11) | p-level |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Intercept | | | 26,10789 | 8,[illegible]07584 | 3,10528 | 0,010009 |
| x1 | -0,126364 | 0,188376 | -0,25180 | 0,[illegible]75368 | -0,67081 | 0,516179 |
| x2 | -0,744814 | 0,679027 | -2,72767 | 2,[illegible]86744 | -1,09688 | 0,296124 |
| x3 | 1,797200 | 0,66644[illegible] | 11,85602 | 4,[illegible]96525 | 2,69668 | 0,020780 |

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 26.108 \\ -0.252 \\ -2.728 \\ 11.856 \end{pmatrix}$$

$a_0$

$a_1$

$a_2$

$a_3$

**Функція регресії з урахуванням знайдених оцінок параметрів моделі набуває вигляду**

$$y = 26{,}108 - 0{,}252x_1 - 2{,}728x_2 + 11{,}856x_3$$

**2**

## Для перевірки адекватності отриманої моделі обчислимо:

а) Залишки $u_i = y_i - \hat{y}_i$

б) Відносну похибку розрахункових значень регресії:

$$\delta_i = \frac{u_i}{y_i} \cdot 100\%$$

середнє значення відносної похибки

$$\bar{\delta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \delta_i}{n}$$

У нас

$$\bar{\delta} = -0{,}52783$$

## в) Обчислимо середньоквадратичну помилку дисперсії збурень

$$\hat{S}_u = \hat{\sigma}_u = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}{n-m-1}}$$

У нас

$$\hat{S}_u = 5{,}7357$$

| N=15 | Regression Summary for Dependent Variable: y (Данные)<br>R= ,95622179 R?= ,91436011 Adjusted R?= ,89100378<br>F(3,11)=39,148 p<,00000 Std.Error of estimate: 5,7357 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | **Beta** | Std.Err. of Beta | B | Std.Err. of B | t(11) | p-level |
| **Intercept** | | | 26,10789 | 8,407584 | 3,10528 | 0,010009 |
| x1 | -0,126364 | 0,188376 | -0,25180 | 0,375368 | -0,67081 | 0,516179 |
| x2 | -0,744814 | 0,679027 | -2,72767 | 2,486744 | -1,09688 | 0,296124 |
| x3 | 1,797200 | 0,666449 | 11,85602 | 4,396525 | 2,69668 | 0,020780 |

г) Перевіримо тісноту загального зв'язку (впливу) незалежних змінних на залежну змінну. Для цього треба обчислити коефіцієнт детермінації за формулою

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2}$$

Regression Summary for Dependent Variable: y (Данные)
R= ,95622179 R?= ,91436011 Adjusted R?= ,89100378
F(3,11)=39,140 p<,00000 Std.Error of estimate: 5,7357

| N=15 | Beta | Std.Err. of Beta | B | Std.Err. of B | t(11) | p-level |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Intercept | | | 26,10789 | 8,407584 | 3,10528 | 0,010009 |
| x1 | -0,126364 | 0,188376 | -0,25180 | 0,375368 | -0,67081 | 0,516179 |
| x2 | -0,744814 | 0,679027 | -2,72767 | 2,486744 | -1,09688 | 0,296124 |
| x3 | 1,797200 | 0,666449 | 11,85602 | 4,396525 | 2,69668 | 0,020780 |

У нас

$$R^2 = 0{,}91436$$

**Висновок**: **чим ближчий він до одиниці, тим більше варіація залежної змінної $y$ визначається варіацією незалежної змінної $x$**
**(є тісний зв'язок між залежною та незалежними змінними).**

д) Перевіримо на значущість вибірковий коефіцієнт кореляції.

Для цього обчислимо $R = \sqrt{R^2}$- коефіцієнт кореляції (характеризує тісноту лінійного зв'язку всіх незалежних факторів $x_i$ із залежною змінною $y$).

У нас

$$R = \sqrt{R^2} = \sqrt{0{,}91436} = 0{,}956222$$

3

# Перевіримо статистичну значущість отриманих результатів.

**а) Обчислимо *F*-статистику за формулою**

$$F_{експ} = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{n-m-1}{m}$$

**Знайти табличне значення:** $F(m, n-m-1, \alpha)$

**і порівняти його з обчисленою *F* – статистикою: якщо**

$$F_{експ} > F(m, n-m-1, \alpha)$$

**то гіпотеза відхиляється, інакше приймається.**

У нас

**Маємо $F_{експ}$=39,14827,**
**табличне значення:** $F(3;11;0,05) = 3,59$

**Порівняємо його з обчисленою *F*-статистикою. Оскільки** $F_{експ} > F(3;11;0,05)$

***нульова гіпотеза відхиляється, тобто коефіцієнти регресії є значущими.***

Regression Summary for Dependent Variable: y (Данные)
R= ,95622179 R?= ,91436011 Adjusted R?= ,89100378
F(3,11)=39,148 p<,00000 Std.Error of estimate: 5,7357

| N=15 | Beta | Std.Err. of Beta | B | Std.Err. of B | t(11) | p-level |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Intercept | | | 26,10789 | 8,407584 | 3,10528 | 0,010009 |
| x1 | -0,126364 | 0,188376 | -0,25180 | 0,375368 | -0,67081 | 0,516179 |
| x2 | -0,744814 | 0,679027 | -2,72767 | 2,486744 | -1,09688 | 0,296124 |
| x3 | 1,797200 | 0,666449 | 11,85602 | 4,396525 | 2,69668 | 0,020780 |

## б) Обчислимо *t*-статистику за формулою

$$t = \frac{R\sqrt{n-m-1}}{\sqrt{1-R^2}}$$

**Якщо** $|t| > t_{табл}(\alpha/2, n-m-1)$

**де** $t_{табл}(\alpha/2, n-m-1)$

**відповідне табличне значення *t*-розподілу з (*n-m-1*) ступенями свободи, то можна зробити висновок про значущість коефіцієнта кореляції між залежною і незалежними змінними моделі.**

У нас

**Маємо *t* = 37,03215.**
**Відповідне табличне значення**

$$t_{табл}(0{,}025;11) = 2{,}593097$$

**Оскільки** $\left|t\right| > t_{табл}(0{,}025;11)$

**можна зробити висновок про достовірність коефіцієнта кореляції, який характеризує тісноту зв'язку між залежною та незалежними змінними моделі.**

**Для вибраного рівня значущості $\alpha$ і відповідного ступеня вільності $k=n-m-1$ записати межі надійності для множинного коефіцієнта кореляції $R$:**

**($R-\Delta R$; $R+\Delta R$),** де

$$\Delta R = t_{\alpha/2,k} \cdot \frac{1-R}{\sqrt{n}}$$

У нас

**Маємо**

$$\Delta R = 2{,}593 \cdot \frac{1 - 0{,}956222}{\sqrt{15}} = 0{,}029311$$

**отже**

$$(R - \Delta R\,;\, R + \Delta R) = (0{,}926911\,;\, 0{,}985533)$$

**в) Перевіримо значущість окремих коефіцієнтів регресії.**

**Визначимо *t*-статистику за формулою**

$$t_j = \frac{a_j}{\sqrt{\sigma_u^2 c_{jj}}} = \frac{a_j}{S_{a_j}}$$

де $c_{jj}$ - діагональний елемент матриці $(X^T X)^{-1}$ ,

$S_{a_j}$ - стандартизована помилка оцінки параметра моделі.

**Значення $t_j$-критерію порівнюється з табличними при $k = n\text{-}m\text{-}1$ ступенях свободи і рівні значущості $\alpha$:**

**якщо $|t_j| > t_{\alpha/2,k}$, то відповідна оцінка параметра регресійної моделі є значуща; інакше приймаємо гіпотезу про рівність $a_j$ нулю**

| N=15 | Regression Summary for Dependent Variable: y (Данные) R= ,95622179 R?= ,91436011 Adjusted R?= ,89100378 F(3,11)=39,148 p<,00000 Std.Error of estimate: 5,7357 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Beta | Std.Err. of Beta | B | Std.Err. of B | t(11) | p-level |
| Intercept | | | 26,10789 | 8,407584 | 3,10528 | 0,010009 |
| x1 | -0,126364 | 0,188376 | -0,25180 | 0,375368 | -0,67081 | 0,516179 |
| x2 | -0,744814 | 0,679027 | -2,72767 | 2,486744 | -1,09688 | 0,296124 |
| x3 | 1,797200 | 0,666449 | 11,85602 | 4,396525 | 2,69668 | 0,020780 |

У нас

$$t_0 = 3{,}105278; \quad t_1 = -0{,}67081;$$

$$t_2 = -1{,}09688; \quad t_3 = 2{,}696681$$

**табличне значення** $t_{табл}(0{,}025{,}11) = 2{,}593097$

**Оскільки** $|t_0| > t_{\alpha/2,k}; \quad |t_1| < t_{\alpha/2,k}; \quad |t_2| < t_{\alpha/2,k}; \quad |t_3| > t_{\alpha/2,k}$

**відповідно оцінки** $\hat{a}_0, \hat{a}_3$ **є значущими**

**а оцінки** $\hat{a}_1, \hat{a}_2$ **не є значущими**

**4** **Обчислимо коефіцієнти еластичності за формулою**

$$\alpha_i = \frac{\partial \hat{y}}{\partial x_i} \cdot \frac{\bar{x}_i}{\bar{y}}.$$

**коефіцієнт еластичності є показником впливу зміни питомої ваги $x_i$ на $y$ у припущенні, що вплив інших факторів відсутній: показує, що регресанд $y$ зміниться на $\alpha$%, якщо фактор $x$ зміниться на 1%**

$$y = 26{,}108 - 0{,}252x_1 - 2{,}728x_2 + 11{,}856x_3$$

$$\frac{\partial \hat{y}}{\partial x_1} = -0{,}252$$

$$\bar{x}_1 = 23{,}416$$

$$\bar{y} = 43{,}08$$

$$\alpha_1 = \frac{\partial \hat{y}}{\partial x_1} \cdot \frac{\bar{x}_1}{\bar{y}} = -0{,}252 \cdot \frac{23{,}416}{43{,}08} \approx -0{,}137$$

У нас

$$\alpha_1 = -0,137;\ \alpha_2 = -0,699;\ \alpha_3 = 1,24$$

**У нашому випадку він показує, що *прибуток підприємства зменшиться на 0,14 %, якщо інвестиції зростуть на 1%, прибуток підприємства зменшиться на 0,7 %, якщо витрати на рекламу зростуть на 1 %, прибуток підприємства збільшиться на 1,24 %, якщо заробітна плата зросте на 1 %.***

**Загальна еластичність *Y* від усіх факторів $x_i$ дорівнює:**

$$\alpha = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i$$

**Цей показник свідчить, що на *α %* *зміниться у* , якщо одночасно збільшити на 1% всі фактори $x_i$)**

У нас

***α=0,394033.***

## 5 Обчислимо довірчі інтервали для математичного сподівання $\hat{y}$ і для кожного спостереження

$$X_i^T = (1, x_{1(i)}, x_{2(i)}, x_{3(i)})$$

$$(\hat{y}_i - \Delta\hat{y}_i ; \hat{y}_i + \Delta\hat{y}_i),$$

де

$$\Delta\hat{y}_i = t_{\alpha/2,k} \cdot \hat{S}_u \cdot \sqrt{X_i^T (X^T X)^{-1} X_i}$$

**де $\hat{S}_u$ — незміщена оцінка дисперсії залишків:**

У нас → $\hat{S}_u = 5{,}7357$

**Виконавши необхідні розрахунки, отримаємо довірчі зони регресії:**

**(23,430; 24,904)**
**(22,594; 22,604)**
**(24,730; 25,041)**
**........................**
**(62,887; 63,558)**
**(68,229; 68,712)**
**(71,961;73,556)**

6

# Побудуємо довірчі інтервали для параметрів регресії.

$$\left(a_j - t_{\alpha/2,k}\sqrt{\sigma_u^2 c_{jj}}\;;\; a_j + t_{\alpha/2,k}\sqrt{\sigma_u^2 c_{jj}}\right)$$

**Довірчий інтервал при рівні надійності (1-*α*) є інтервал з випадково залежними межами і накриває істинне значення коефіцієнта регресії $a_j$ *з рівнем довіри (1-α)*.**

$c_{jj}$ діагональний елемент матриці $(X^T X)^{-1}$

## У нас

| N=15 | Regression Summary for Dependent Variable: y (Данные)<br>R= ,95622179 R?= ,91436011 Adjusted R?= ,89100378<br>F(3,11)=39,148 p<,00000 Std.Error of estimate: 5,7357 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Beta | Std.Err. of Beta | B | Std.Err. of B | t(11) | p-level |
| Intercept | | | 26,10789 | 8,407584 | 3,10528 | 0,010009 |
| x1 | -0,126364 | 0,188376 | -0,25180 | 0,375368 | -0,67081 | 0,516179 |
| x2 | -0,744814 | 0,679027 | -2,72767 | 2,486744 | -1,09688 | 0,296124 |
| x3 | 1,797200 | 0,666449 | 11,85602 | 4,396525 | 2,69668 | 0,020780 |

**Стандартні похибки**

$$\sqrt{\sigma_u^2 c_{jj}}$$

$$t_{табл}(0{,}025;11) = 2{,}20$$

$a_0 \in (7{,}85;\ 44{,}47)$ $a_1 \in (-1{,}095;\ 0{,}539)$

$a_2 \in (-8{,}126;\ 2{,}801)$ $a_3 \in (2{,}195;\ 21{,}44)$

За допомогою пакету Excel.
Виконати команду **Сервис/Анализ данных**

**ВЫВОД ИТОГОВ**

| *Регрессионная статистика* | |
|---|---|
| Множественный R | 0,956221789 |
| R-квадрат | 0,914360109 |
| Нормированный R-кв | 0,891003776 |
| Стандартная ошибка | 5,735708227 |
| Наблюдения | 15 |

Дисперсионный анализ

| | *df* | *SS* | *MS* | *F* | *Значимость F* |
|---|---|---|---|---|---|
| Регрессия | 3 | 3863,740536 | 1287,913512 | 39,14827207 | 3,6639E-06 |
| Остаток | 11 | 361,8818375 | 32,89834886 | | |
| Итого | 14 | 4225,622373 | | | |

| *Коэффициенты* | | *Стандарт ошибка* | *t-статистика* | *P-Значение* | *Нижние 95%* | *Верхние 95%* | *Нижние 95,0%* | *Верхние 95,0%* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Y-пересечение | 26,10788542 | 8,407584346 | 3,105277847 | 0,010009436 | 7,602907684 | 44,61286316 | 7,602907684 | 44,61286316 |
| Переменная X 1 | -0,251800474 | 0,375367538 | -0,670810467 | 0,516178968 | -1,077979273 | 0,574378325 | -1,077979273 | 0,574378325 |
| Переменная X 2 | -2,727670903 | 2,486743611 | -1,096884653 | 0,296123749 | -8,200959455 | 2,745617649 | -8,200959455 | 2,745617649 |
| Переменная X 3 | 11,85602384 | 4,396524578 | 2,696680897 | 0,020779618 | 2,179333598 | 21,53271409 | 2,179333598 | 21,53271409 |

**7**

**Обчислимо прогнозні значення і знайдемо межі довірчих інтервалів індивідуальних прогнозних значень і межі довірчих інтервалів для математичного сподівання (точковий та інтервальний прогнози).**

**а) для обчислення прогнозних значень** $y_{pi} = Y_{np}$

**у рівняння**

$$\hat{y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_1 + \hat{a}_2 x_2 + \hat{a}_3 x_3$$

**тобто**

$$\hat{y} = 26{,}108 - 0{,}252 x_1 - 2{,}728 x_2 + 11{,}856 x_3$$

**підставимо задані значення** $x_{pi}$

У нас

**Підставимо**

$$x_{1пр} = 48{,}82, \quad x_{2пр} = 20{,}04, \quad x_{3пр} = 10{,}25$$

**одержимо**

$$y_{пр} = 80{,}68$$

**б) знайдемо межі довірчих інтервалів індивідуальних прогнозованих значень за формулою:**

$$\hat{Y}_{np} - \Delta\hat{Y}_{np} \le Y_{np} \le \hat{Y}_{np} + \Delta\hat{Y}_{np},$$

де

$$\Delta\hat{Y}_{np} = t_{\alpha/2}\hat{\sigma}_u\sqrt{1 + X_{np}^T(X^T X)^{-1}X_{np}}$$

У нас

$$\hat{Y}_{пр} = 80{,}68 \qquad \sigma_{u} = 5{,}7357$$

$$X_{пр} = \left(48{,}82;\, 20{,}04;\, 10{,}25\right)$$

**тоді**

$$Y_{пр} \in (58{,}72;\, 102{,}64)$$

***інтервальний прогноз*** **індивідуального значення**

**в) знайдемо межі довірчих інтервалів для математичного сподівання значення $y_{pi}$ за формулою:**

$$\hat{Y}_{np} - \Delta_1 \le M(Y_{np}) \le \hat{Y}_{np} + \Delta_1,$$

де

$$\Delta_1 = t_{\alpha/2}\hat{\sigma}_u \sqrt{X_{np}^T (X^T X)^{-1} X_{np}}$$

У нас

$$\hat{Y}_{np} = 80{,}68 \qquad \sigma_u = 5{,}7357$$

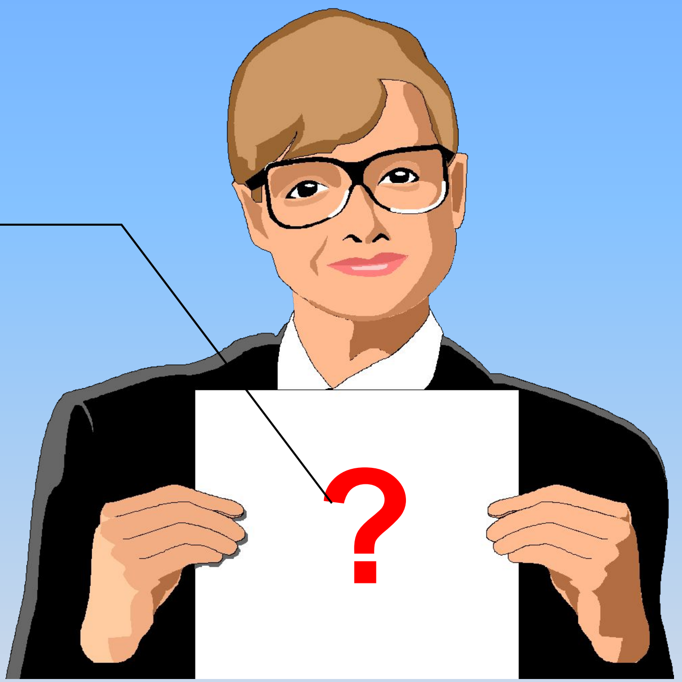
**тоді**

$$M(Y_{np}) \in (64{,}52;\ 96{,}83)$$

**довірчий інтервал для *математичного сподівання*.**

# Завдання для самостійної роботи

**Лугінін О.Є.** Економетрія. Стор.123-132.
**Приклад 6.3** розібрати розв ‘язок.



# Експрес контроль

Знайти значення **критерію Фішера** для **парної** регресії, якщо $\boldsymbol{n=10+k}$, $\boldsymbol{R^2=0,9t}$,

де ***k***- номер по списку,

***t***- номер групи (1,2,3,4,5,6,7)