Лекция 12

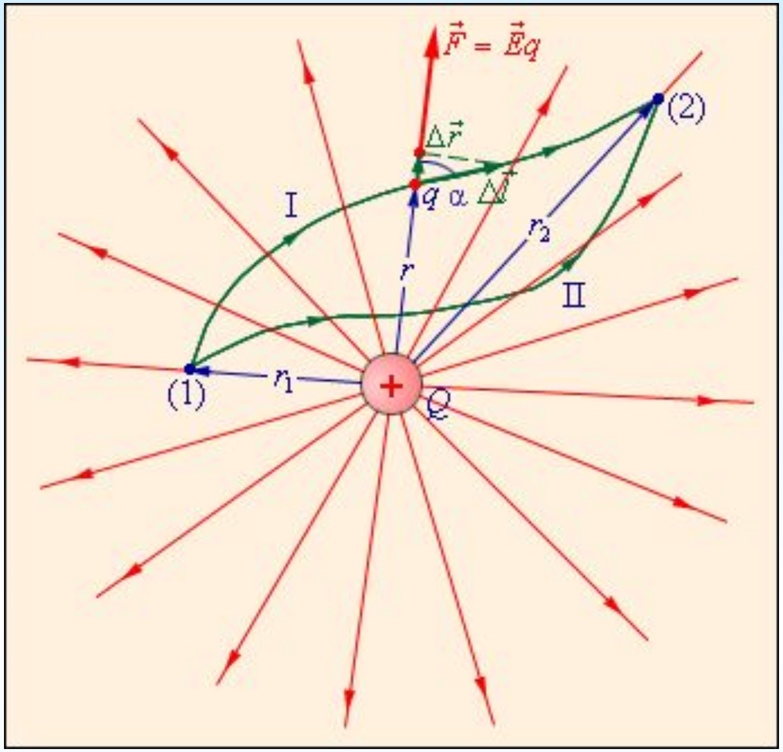
3. Электричество

3.1. Электростатика

Работа электростатического поля при перемещении заряда. Потенциальное поле. Циркуляция вектора напряженности. Разность потенциалов. Потенциал. Потенциал поля точечного заряда, системы зарядов. Связь напряженности и разности потенциалов. Градиент потенциала. Эквипотенциальные поверхности. Потенциал заряженных сферической поверхности, цилиндра, плоскости, двух плоскостей.

Работа электрического поля при перемещении заряда

Определим работу по перемещению пробного заряда q в поле, созданным зарядом Q, из точки 1 в точку 2.



$$dA = F\,dl\cos\alpha = qE\,dl\cos\alpha$$

$$A = \int_1^2 qE\,dl\cos\alpha = \int_1^2 \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}dr$$

$$\boxed{A = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\int_1^2 \frac{dr}{r^2} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}$$

Потенциальное поле

В электростатическом поле работа перемещения заряда между двумя точками не зависит от формы пути, соединяющего эти точки. Такое поле называется потенциальным, а силы, действующие в нем, консервативными.

При перемещении заряда по замкнутому контуру работа равна нулю!

Теорема о циркуляция вектора напряженности

Циркуляция вектора напряженности электростатического поля по любому замкнутому контуру равна нулю.

$$A = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\oint_l \vec{E}\, d\vec{l} = \oint_l E\, dl \cos\alpha = \frac{A}{q} = 0}$$

Разность потенциалов

<u>Разностью потенциалов</u> (или <u>электрическим напряжением</u>) между двумя точками в данном электрическом поле называется работа, совершаемая силами поля при перемещении единичного положительного заряда из точки 1 в точку 2.

$$\boxed{(\varphi_1 - \varphi_2) = U = \frac{A}{q} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}$$

Поскольку эта величина не зависит ни от заряда, ни от формы пути, т.е. зависит только от поля, она может являться его характеристикой, более удобной, чем напряженность поля:

1) Величина скалярная, а не векторная;
2) Легко измеряется разнообразными методами и приборами;
3) Зная потенциал точки, можно найти и вектор напряженности.

Физический смысл имеет только разность потенциалов, или напряжение, между 2 точками поля, т.к. работа определена только тогда, когда заданы 2 точки – начало и конец пути.

Когда говорят о напряжении в конкретной точке, на самом деле также имеют в виду разность потенциалов между 2 точками, но подразумевают, что вторая точка заранее выбрана "на бесконечности" — на таком расстоянии, где электрическое поле уже не чувствуется.

Поскольку внутри Земли, как и других проводящих тел, поля не бывает, второй точкой почти всегда служит поверхность Земли.

Единица разности потенциалов

Разностью потенциалов в 1 вольт (В) называется такая разность потенциалов между 2 точками, когда при перемещении заряда в 1 Кл из одной точки в другую совершается работа в 1 Дж.

$$(\varphi_1 - \varphi_2) = U = \frac{A}{q} = \frac{1\ \text{Джоуль}}{1\ \text{Кулон}} = 1\ \text{Вольт}$$

Связь разности потенциалов и потенциальной энергии

Работа потенциальных сил может быть представлена как убыль потенциальной энергии:

$$A = -\Delta W = -(W_2 - W_1) = W_1 - W_2 = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = q(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Потенциал

Потенциалом называется скалярная физическая величина, характеризующая потенциальную энергию, которой обладает заряд в данной точке поля, и числено равная энергии единичного положительного заряда в этой точке.

На бесконечно большом расстоянии заряды не взаимодействуют, поэтому потенциальная энергия при $r \to \infty$ обращается в нуль.

Потенциал данной точки численно равен работе, которую нужно совершить, чтобы переместить единичный положительный заряд из бесконечности в данную точку поля.

$$\boxed{\varphi = \frac{W}{q}} \qquad W = q\varphi$$

Потенциал поля точечного заряда

$$\boxed{\varphi = \frac{W}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{Q}{r}}$$

Потенциал положительного заряда (q > 0) положителен, отрицательного – отрицателен.

Потенциал поля системы зарядов

Потенциал результирующего поля системы зарядов равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых отдельными точечными зарядами.

$$W = \sum_{i=1}^{n} W_i = q\sum_{i=1}^{n}\varphi_i \quad \rightarrow \quad \boxed{\varphi = \sum_{i=1}^{n}\varphi_i = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots\ \varphi_n}$$

Связь между потенциалом и напряженностью

$$dA = q\vec{E}\,d\vec{l} = qE_l\,dl \qquad dA = -q\,d\varphi = -q\left(\frac{d\varphi}{dl}\right)dl \quad \rightarrow \quad \boxed{E_l = -\frac{d\varphi}{dl}}$$

Градиент потенциала

Напряженность электрического поля в данной точке равна по величине и противоположна по направлению градиенту потенциала.

$$\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y + \vec{E}_z = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = -grad\varphi = -\nabla\varphi$$

Однородное поле

Напряженность электрического поля численно равна изменению потенциала (напряжению) на единице длины силовой линии.

$$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{l} = \frac{U}{l} \qquad \left[\frac{\text{В}}{\text{м}}\right] = \left[\frac{\text{Дж}}{\text{Кл}}\cdot\frac{1}{\text{м}}\right] = \left[\frac{\text{н}\cdot\text{м}}{\text{Кл}}\cdot\frac{1}{\text{м}}\right] = \left[\frac{\text{н}}{\text{Кл}}\right]$$

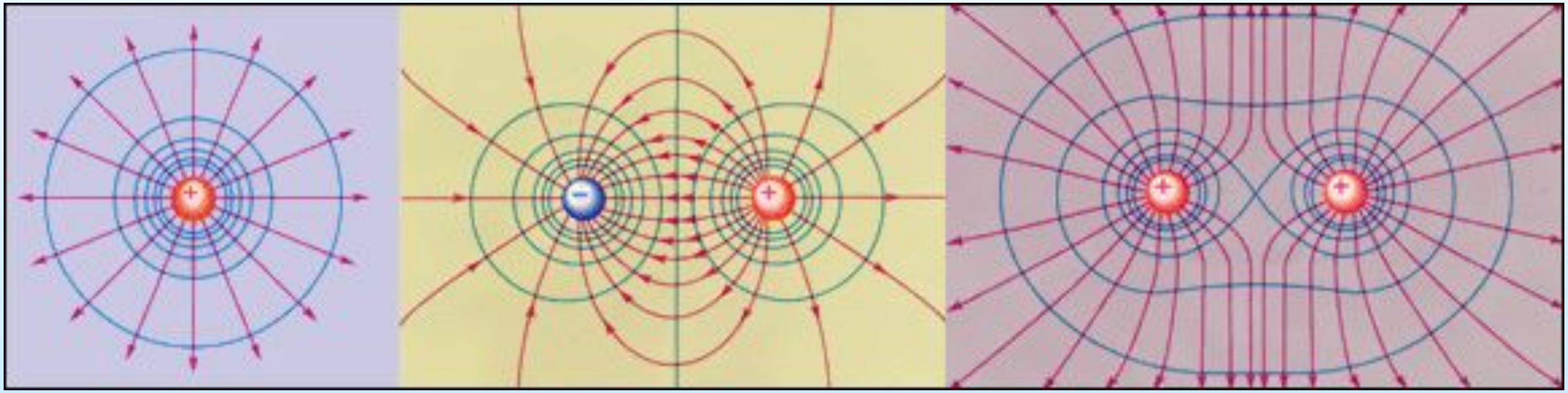
Т.к. $E > 0$ если $\phi_1 > \phi_2$, то напряженность электрического поля всегда направлена в сторону быстрейшего убывания потенциала. Чем меньше меняется потенциал на расстоянии l, тем меньше напряженность (если не меняется совсем, то $E = 0$).

Эквипотенциальные поверхности

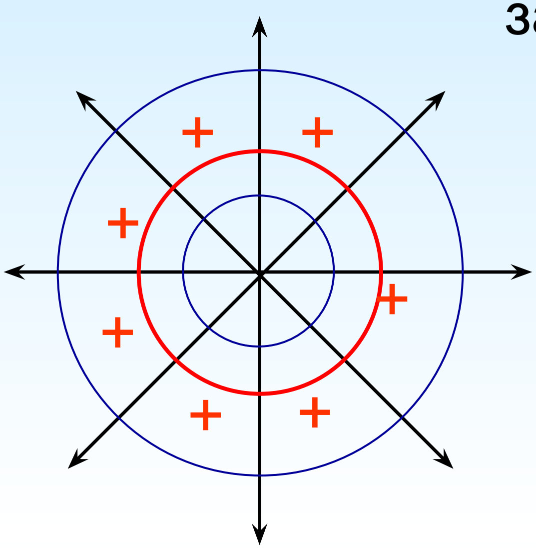
При перемещении заряда под углом 90° к силовым линиям поле работы не совершает, так как сила перпендикулярна перемещению. Поэтому:

Все точки воображаемой поверхности, проведенной перпендикулярно к силовым линиям, имеют один и тот же потенциал. Поверхности равного потенциала называют эквипотенциальными.

Для однородного поля эквипотенциальные поверхности – плоскости, для точечного заряда – концентрические сферы.



1. Потенциал заряженной сферической поверхности



Найдем разность потенциалов между равномерно заряженной сферической поверхностью радиусом *R* и любой точкой электрического поля вне этой поверхности:

$$\boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{q}{r^2}} \Rightarrow d\varphi = -E\,dr = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{dr}{r^2}$$

$$\int_{\varphi_R}^{\varphi_2} d\varphi = -\int_R^r E\,dr = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\int_R^r \frac{dr}{r^2}$$

$$\varphi_R - \varphi_r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right)$$

При $r \to \infty$ $\Rightarrow$ $\boxed{\varphi_R = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\varepsilon R}}$

Так как поле внутри сферы отсутствует, получается, что весь ее объем эквипотенциален:

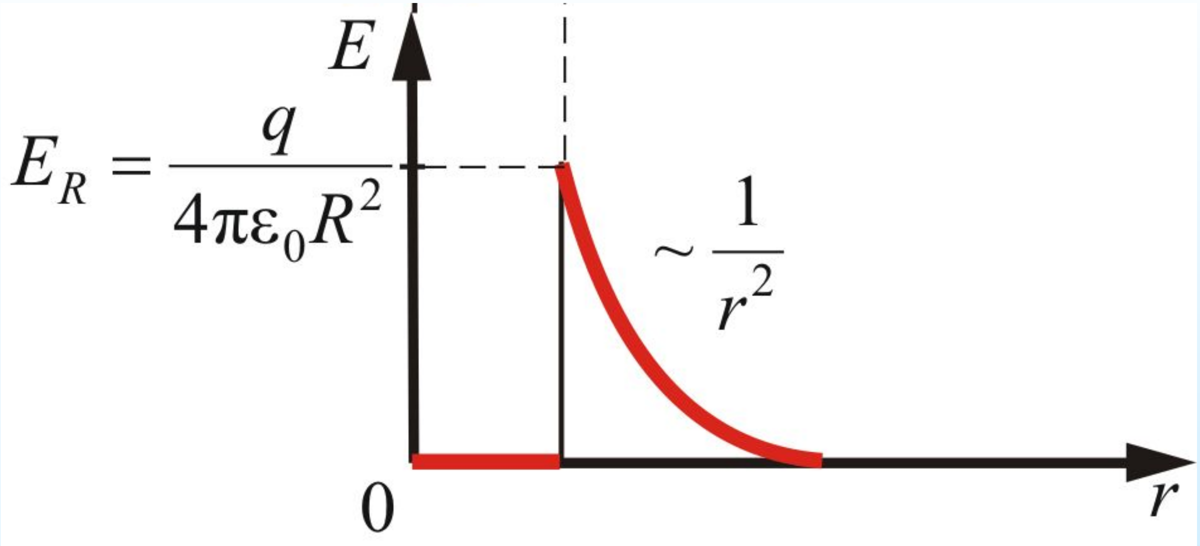
$$E = -\frac{d\varphi}{dr} = 0 \Rightarrow \varphi = const = \varphi_R$$

Т.е. потенциал поля внутри равномерно заряженной сферы равен потенциалу на ее поверхности.

$$E = \begin{cases} 0, & \text{если } r \le R \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\dfrac{q}{r^2}, & \text{если } r > R \end{cases}$$

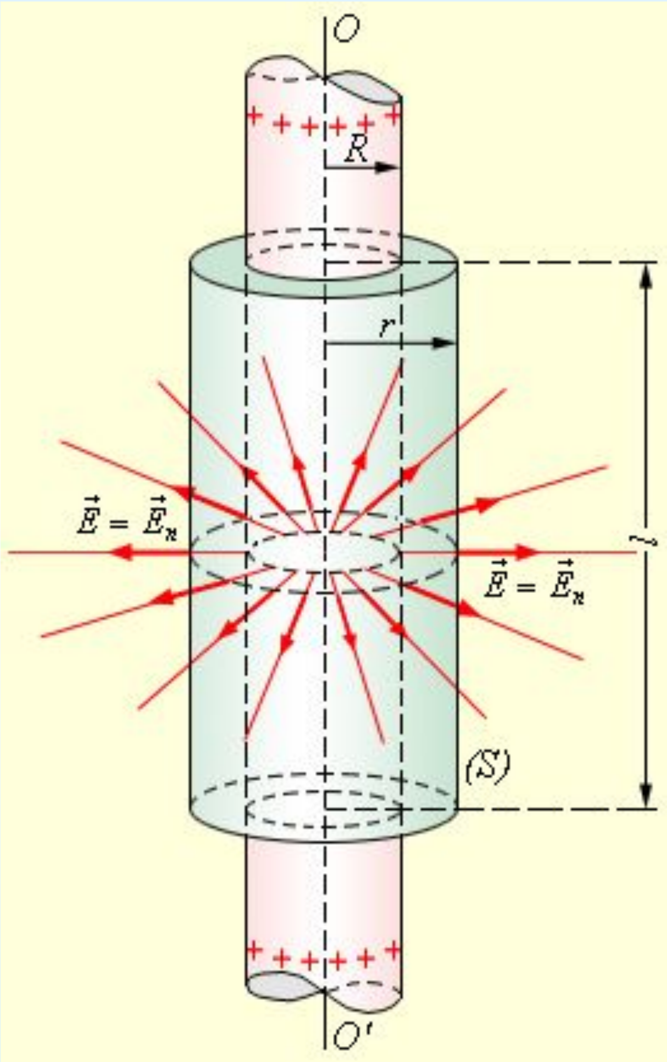
$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\dfrac{q}{R}, & \text{если } r \le R \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\dfrac{q}{r}, & \text{если } r > R \end{cases}$$

Зависимость потенциала от расстояния вне сферы такая же, как у точечного заряда. Внутри сферы потенциал такой же, как на ее поверхности.



2. Потенциал поля бесконечно протяженного цилиндра

Найдем разность потенциалов между двумя точками поля, отстоящими на расстояния r_1 и r_2, причем $r_2 > r_1 > R$:



$$\boxed{E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{\tau}{r}}$$

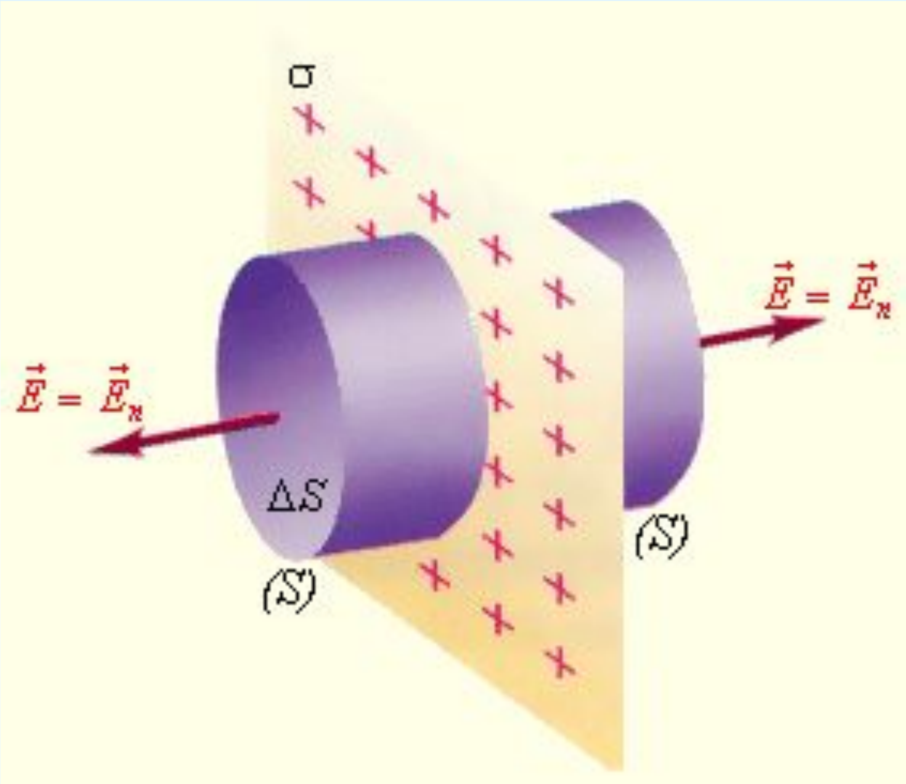
$$d\varphi = -E\,dr = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{dr}{r}$$

$$\int_{\varphi_R}^{\varphi_2} d\varphi = -\int_{r_1}^{r_2} E\,dr = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r}$$

$$\boxed{\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon}\ln\frac{r_2}{r_1}}$$

3. Потенциал поля бесконечно протяженной плоскости

Найдем разность потенциалов между двумя точками поля, отстоящими на расстояния r_1 и r_2 от плоскости $(r_2 > r_1)$:



$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon}}$$

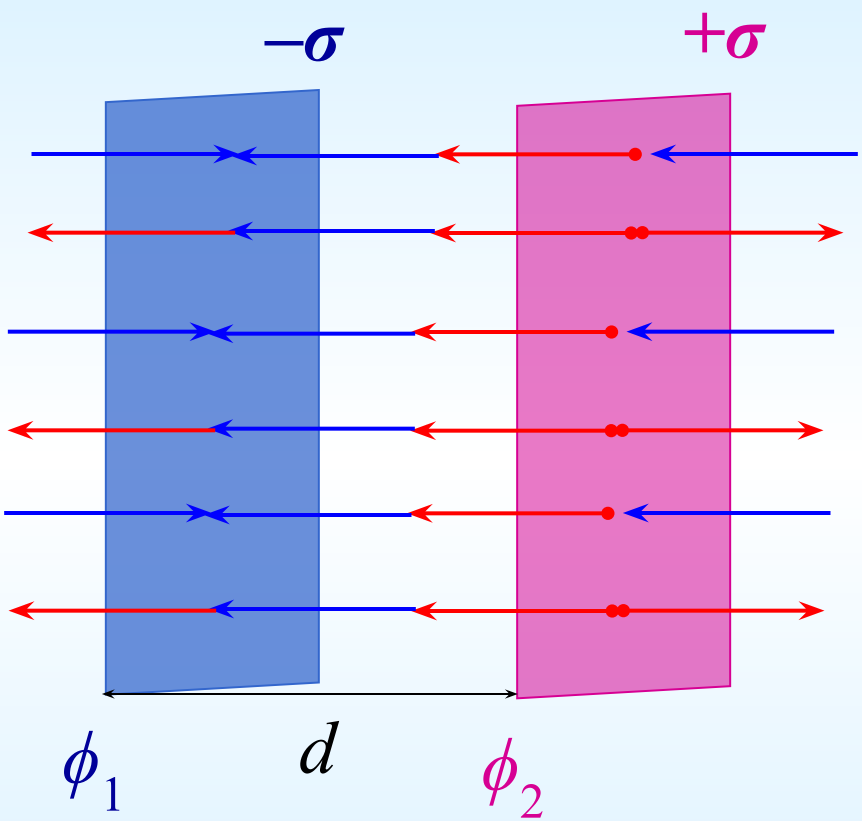
$$d\varphi = -E\,dr = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon}\,dr$$

$$\int_{\varphi_R}^{\varphi_2} d\varphi = -\int_{r_1}^{r_2} E\,dr = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon}\int_{r_1}^{r_2} dr$$

$$\boxed{\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon}(r_2 - r_1)}$$

4. Потенциал между двумя протяженными плоскостями

Найдем разность потенциалов между двумя плоскостями, отстоящими друг от друга на расстоянии $d = r_2 - r_1$:



$$\boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon}}$$

$$d\varphi = -E\,dr = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} dr$$

$$\int_{\varphi_R}^{\varphi_2} d\varphi = -\int_{r_1}^{r_2} E\,dr = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} \int_{r_1}^{r_2} dr$$

$$\boxed{\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon}(r_2 - r_1) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} d}$$