

Математик

а



**Решение
неравенств.
Подготовка к ЕГЭ.**



*«Метод решения хорош,
Если с самого начала
мы можем предвидеть –
И впоследствии подтвердить,
Что, следуя этому методу,
Мы достигнем цели.»*

Лейбниц



Решить неравенство: $x \cdot \log_5 (3 + x - x^2) \geq 0$.

Решение:

1) Определим ОДЗ:

$$3 + x - x^2 > 0,$$

$$x^2 - x - 3 < 0,$$

$$f(x) = x^2 - x - 3,$$

$$x^2 - x - 3 = 0,$$

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{13}}{2},$$

$$x_2 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}.$$

$$\frac{1 - \sqrt{13}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$$

$$3 < \sqrt{13} < 4$$

$$4 < 1 + \sqrt{13} < 5$$

$$2 < \frac{1 + \sqrt{13}}{2} < 2,5$$

$$-4 < -\sqrt{13} < -3$$

$$-3 < 1 - \sqrt{13} < -2$$

$$-1,5 < \frac{1 - \sqrt{13}}{2} < -1$$

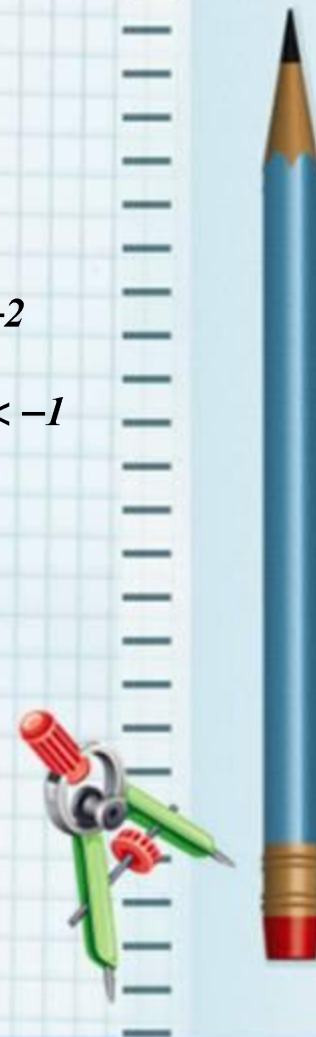
2) Упрощаем неравенство, используя метод рационализации, в котором $\log_n f \rightarrow (n-1)(f-1)$

$$x(5-1)(3+x-x^2-1) \geq 0,$$

$$4x(-x^2+x+2) \geq 0 \quad | \cdot (-0,25)$$

$$x(x^2-x-2) \leq 0$$

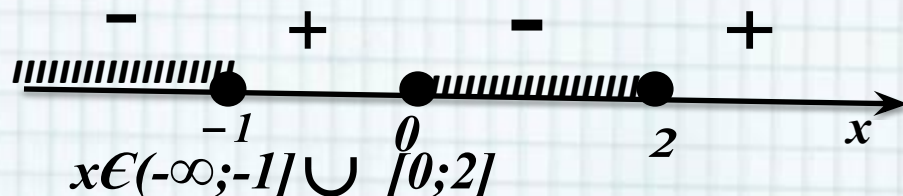
$$x(x-2)(x+1) \leq 0,$$



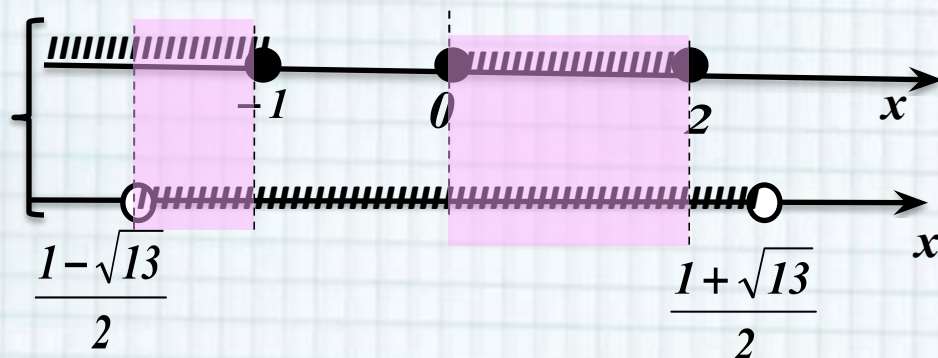
$$f(x) = x(x-2)(x+1),$$

$$x(x-2)(x+1) = 0,$$

$$x=0 \text{ или } x=2 \text{ или } x=-1$$



Пересечение с ОДЗ дает решение



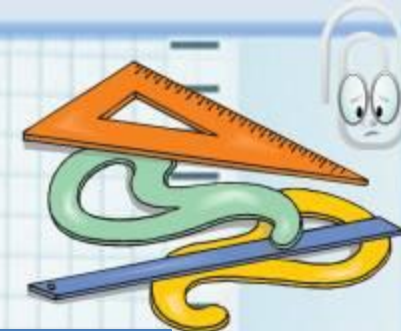
$$x \in \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}; -1\right] \cup [0; 2]$$

Ответ : $\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}; -1\right] \cup [0; 2]$



**Самостоятельно
Решить неравенство:**

Решение: $(5x - 13) \log_{2x-5} (x^2 - 6x + 10) \geq 0$



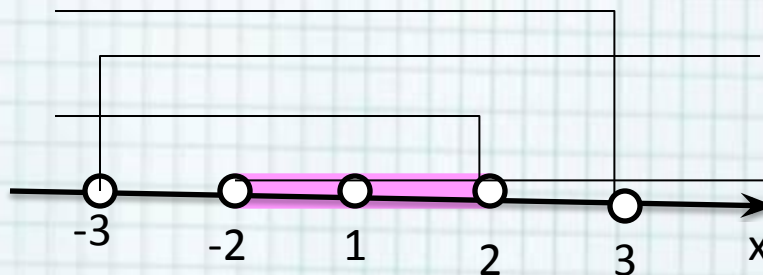


Решите неравенство $\log_{2-x}(x+2) \cdot \log_{x+3}(3-x) \leq 0$

Решение.

ОДЗ:

$$\begin{cases} 2-x > 0, \\ 2-x \neq 1, \\ x+2 > 0, \\ x+3 > 0, \\ x+3 \neq 1, \\ 3-x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2, \\ x \neq 1, \\ x > -2, \\ x > -3, \\ x \neq -2, \\ x < 3 \end{cases}$$



$$x \in (-2; 1) \cup (1; 2)$$

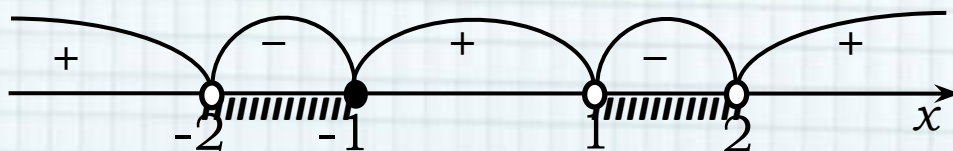
$$\log_{2-x}(x+2) \cdot \log_{x+3}(3-x) \leq 0$$

$$(2-x-1)(x+2-1)(x+3-1)(3-x-1) \leq 0,$$

$$(1-x)(x+1)(x+2)(2-x) \leq 0,$$

$$(x-1)(x+1)(x+2)(x-2) \leq 0,$$

Получаем следующие точки на числовой оси:

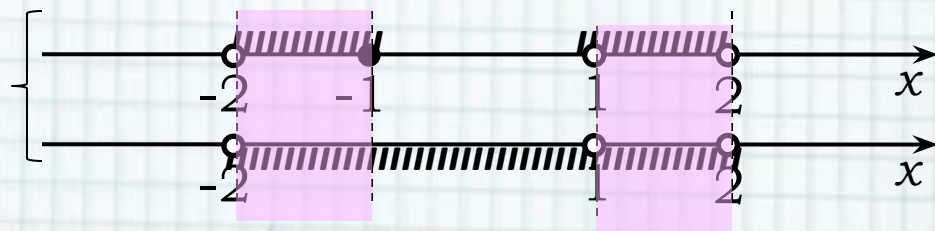


$$x \in (-2; -1] \cup (1; 2)$$

$$\begin{cases} x \neq -2, \\ x = -1, \\ x \neq 1, \\ x \neq 2 \end{cases}$$



С учетом ОДЗ, имеем



$$x \in (-2; -1] \cup (1; 2)$$

Ответ : $(-2; -1] \cup (1; 2)$.



Решить неравенство: $\frac{\log_3(9x) \cdot \log_4(64x)}{5x^2 - |x|} \leq 0.$



Решение.

Найдем ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ 5x^2 - |x| \neq 0; \end{cases} \begin{cases} x > 0, \\ 5x^2 - x \neq 0; \end{cases} \begin{cases} x > 0, \\ x(5x - 1) \neq 0; \end{cases} \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{5}. \end{cases}$

$$x \in (0; 0,2) \cup (0,2; +\infty)$$

Воспользуемся методом рационализации, в котором

$$\log_a f \vee 0 \underset{f > 0}{\overset{a > 0, a \neq 0}{\Leftrightarrow}} (a - 1)(f - 1) \vee 0 \text{ при } x > 0 \quad |x| = x,$$

$$\frac{\log_3(9x) \cdot \log_4(64x)}{5x^2 - x} \leq 0; \quad \frac{\log_3(9x) \cdot \log_4(64x)}{x(5x - 1)} \leq 0;$$

$$\frac{(3 - 1)(9x - 1)(4 - 1)(64x - 1)}{x(5x - 1)} \leq 0;$$

$$\frac{6 \cdot (9x - 1)(64x - 1)}{x(5x - 1)} \leq 0 \Big| \cdot \frac{1}{6}; \quad \text{имеем: } \frac{(9x - 1)(64x - 1)}{x(5x - 1)} \leq 0;$$

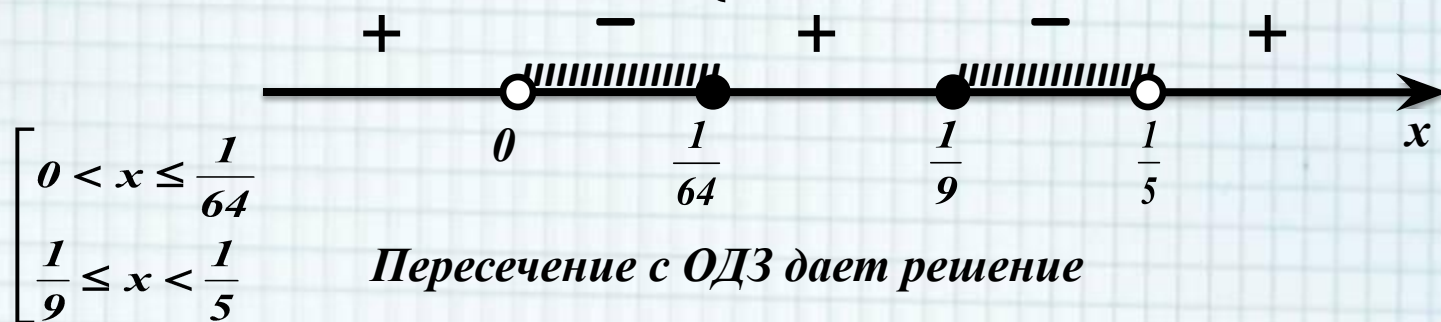


$$\frac{9 \cdot \left(x - \frac{1}{9}\right) \left(x - \frac{1}{64}\right) \cdot 64}{5x \left(x - \frac{1}{5}\right)} \leq 0 \quad \Bigg| \cdot \frac{5}{9 \cdot 64} \quad \text{Получим:} \quad \frac{\left(x - \frac{1}{9}\right) \left(x - \frac{1}{64}\right)}{x \left(x - \frac{1}{5}\right)} \leq 0;$$



Получаем следующие точки на числовой оси:

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ x = \frac{1}{64} \\ x = \frac{1}{9} \\ x \neq \frac{1}{5} \end{cases}$$



Пересечение с ОДЗ дает решение

$$x \in \left(0; \frac{1}{64}\right] \cup \left[\frac{1}{9}; 0,2\right).$$

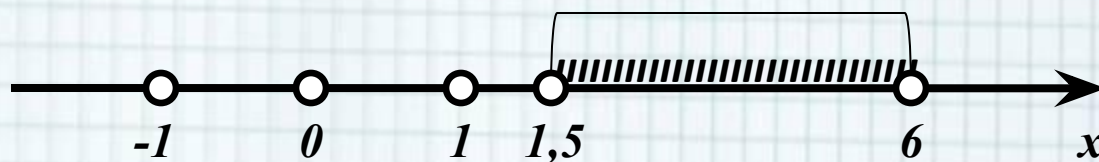
Ответ : $\left(0; \frac{1}{64}\right] \cup \left[\frac{1}{9}; 0,2\right).$



Решить неравенство: $\log_{|x|}(15x - 18 - 2x^2) \leq 2$.

Решение:

1) Задаем ОДЗ:
$$\begin{cases} 15x - 18 - 2x^2 > 0 \\ x \neq 0 \\ |x| \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 - 15x + 18 < 0 \\ x \neq 0 \\ x \neq \pm 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1,5 < x < 6 \\ x \neq 0 \\ x \neq \pm 1 \end{cases}$$



$$x \in (1,5;6)$$

$$\log_{|x|}(15x - 18 - 2x^2) - \log_{|x|}|x|^2 \leq 0;$$

Так как $x \in (1,5;6)$, то $|x| = x$,

$$2) \quad \log_x(15x - 18 - 2x^2) - \log_x x^2 \leq 0;$$

Упрощаем неравенство, используя метод рационализации, при котором

$$\log_a f - \log_a g \leq 0 \begin{matrix} a > 0, a \neq 0 \\ f > 0, g > 0 \end{matrix} \Leftrightarrow (a - 1)(f - g) \leq 0$$

$$(x - 1)(15x - 18 - 2x^2 - x^2) \leq 0$$

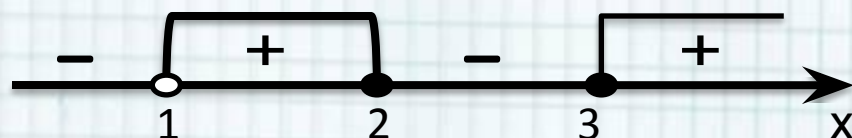


$$(x-1)(15x-18-3x^2) \leq 0 \quad | \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$(x-1)(x^2-5x+6) \geq 0,$$

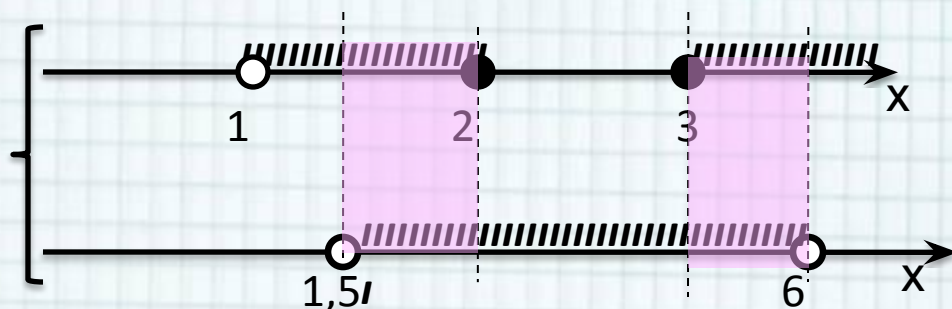
$$(x-1)(x-2)(x-3) \geq 0.$$

Получаем точки, делящие числовую ось:



$$\begin{cases} x \neq 1, \\ x = 2, \\ x = 3 \end{cases}$$

Пересечение с ОДЗ дает решение данного неравенства



$$x \in (1,5;2] \cup [3;6);$$

Ответ: $(1,5;2] \cup [3;6).$



Решить неравенство:

$$\log_5^2(25 - x^2) - 3 \log_5(25 - x^2) + 2 \geq 0.$$



Решение:

1) Найдем ОДЗ: $25 - x^2 > 0$;

$$x^2 - 25 < 0;$$

$$(x - 5)(x + 5) < 0;$$

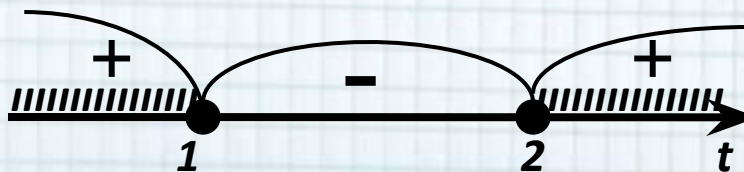


2) Делаем замену $\log_5(25 - x^2) = t$, получим $t^2 - 3t + 2 \geq 0$

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$t_1 = 1; t_2 = 2$$

$$(t - 1)(t - 2) \geq 0$$

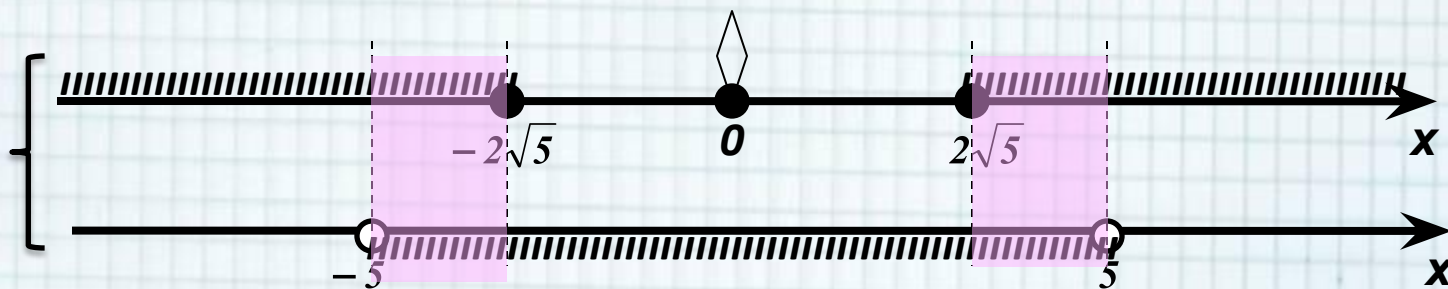


Переходя к x , имеем:

$$\begin{cases} t \leq 1 \\ t \geq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_5(25 - x^2) \leq 1 \\ \log_5(25 - x^2) \geq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_5(25 - x^2) \leq \log_5 5 \\ \log_5(25 - x^2) \geq \log_5 25 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (5 - 1)(25 - x^2 - 5) \leq 0 \\ (5 - 1)(25 - x^2 - 25) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 20 \geq 0 \\ x^2 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x - 2\sqrt{5})(x + 2\sqrt{5}) \geq 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Пересечение с ОДЗ дает решение



$$x \in (-5; -2\sqrt{5}] \cup \{0\} \cup [2\sqrt{5}; 5).$$

Ответ: $(-5; -2\sqrt{5}] \cup \{0\} \cup [2\sqrt{5}; 5).$



Решить неравенство:

$$\frac{(5^x - 125)(\log_{x-1} x - \log_{x-1} 3)}{(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + 10})(|x - 8| - |x|)} \geq 0.$$

Решение:

$$\frac{(5^x - 5^3)(\log_{x-1} x - \log_{x-1} 3)}{(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + 10})(|x - 8| - |x|)} \geq 0.$$

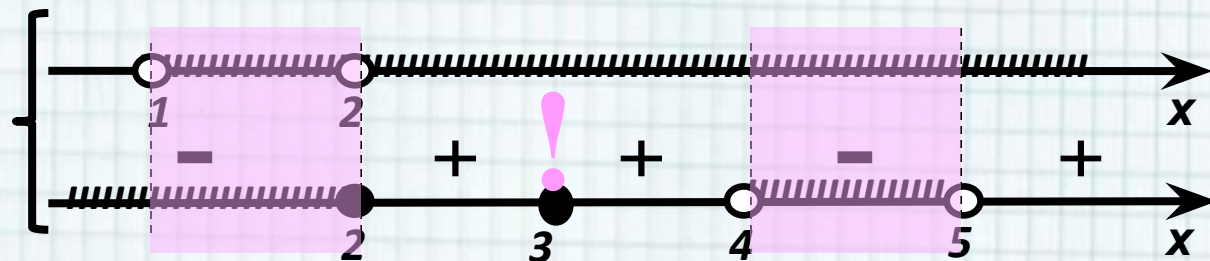
Упрощаем неравенство, используя метод рационализации

$$\begin{cases} x > 0, \\ x - 1 > 0, \\ x - 1 \neq 1, \end{cases} \Rightarrow \frac{(x-3)(x-1-1)(x-3)}{((x^2 + 2x) - (x^2 + 10))((x-8)^2 - x^2)} \geq 0$$

$$\begin{cases} x > 1; \\ x \neq 2; \\ \frac{(x-3)^2(x-2)}{(x^2 + 2x - x^2 - 10)(x-8-x)(x-8+x)} \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1; \\ x \neq 2; \\ \frac{(x-3)^2(x-2)}{2 \cdot (-8)(x-5)(x-4)} \geq 0; \end{cases}$$



$$\begin{cases} x > 1; \\ x \neq 2; \\ \frac{(x-3)^2(x-2)}{(x-5)(x-4)} \leq 0; \end{cases}$$



$$\begin{cases} 1 < x < 2 \\ x = 3 \\ 4 < x < 5 \end{cases}$$

Ответ: $(1; 2) \cup \{3\} \cup (4; 5)$.



Решить неравенство: $\log_{\log_x 2x} (5x - 2) \geq 0$.

Решение:

1) Найдем ОДЗ

$$\begin{cases} 5x - 2 > 0, \\ \log_x 2x > 0, \\ \log_x 2x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{2}{5}, \\ x > 0, \\ x \neq 1, \\ (x-1)(2x-1) > 0, \\ (x-1)(2x-x) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0,4, \\ x \neq 1, \\ \begin{cases} x > 1 \\ x < 0,5 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,4 < x < 0,5 \\ x > 1 \end{cases}$$

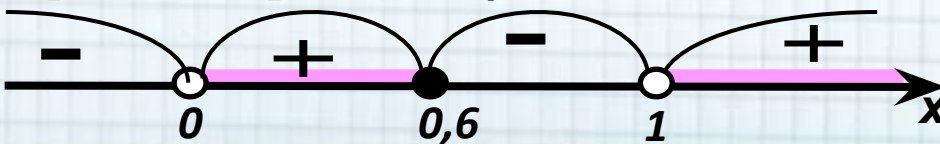
2) $(\log_x 2x - 1)(5x - 2 - 1) \geq 0,$

$$(x - 1)(2x - x)(5x - 3) \geq 0,$$

$$x(x - 1)(5x - 3) \geq 0,$$

$$f(x) = x(x - 1)(5x - 3),$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 0,6$$

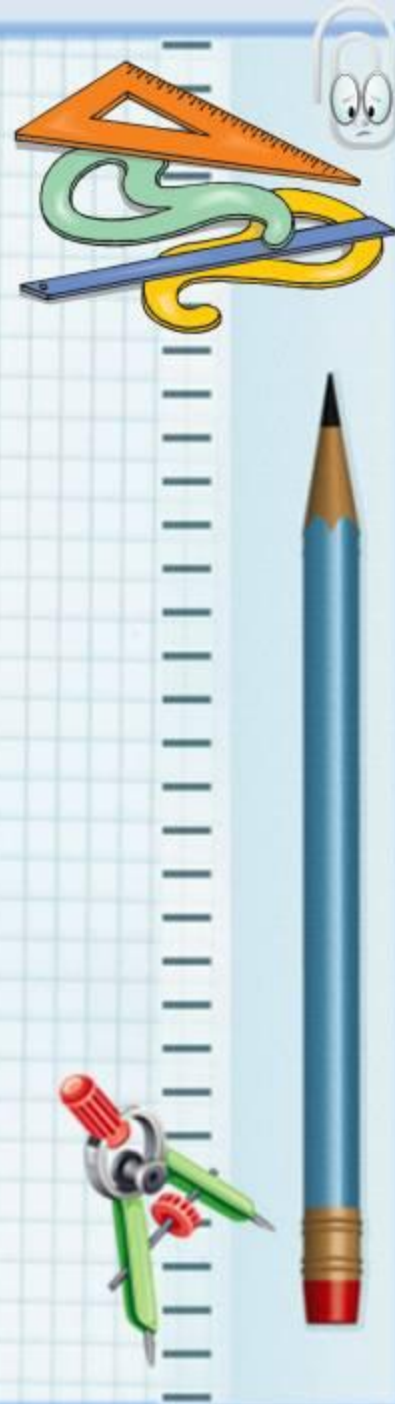


Пересечение с ОДЗ дает решение



$$x \in (0,4;0,5) \cup (1;+\infty)$$

Ответ : $(0,4;0,5) \cup (1;+\infty)$



Решить неравенство:

$$\log_{\frac{3x-1}{x+2}}(2x^2 + x - 1) \geq \log_{\frac{3x-1}{x+2}}(11x - 6 - 3x^2),$$

Решение.

1) Найдем ОДЗ:

$$\begin{cases} 2x^2 + x - 1 > 0, \\ 11x - 6 - 3x^2 > 0, \\ \frac{3x-1}{x+2} > 0, \\ \frac{3x-1}{x+2} \neq 1. \end{cases}$$

Решим по отдельности каждое неравенство

а) $2x^2 + x - 1 > 0,$

$f(x) = 2x^2 + x - 1,$

$2x^2 + x - 1 = 0$

$x_1 = -1, x_2 = 0,5$

$$\begin{cases} x > 0,5 \\ x < -1 \end{cases}$$

б) $11x - 6 - 3x^2 > 0,$

$f(x) = 11x - 6 - 3x^2,$

$11x - 6 - 3x^2 = 0,$

$x_1 = -1, x_2 = -\frac{1}{3}$

$$\begin{cases} x > -\frac{1}{3} \\ x < -1 \end{cases}$$



$$B) \frac{3x-1}{x+2} > 0 \Leftrightarrow (3x-1)(x+2) > 0, \quad 2) \frac{3x-1}{x+2} \neq 1,$$

$$f(x) = (3x-1)(x+2),$$

$$(3x-1)(x+2) = 0,$$

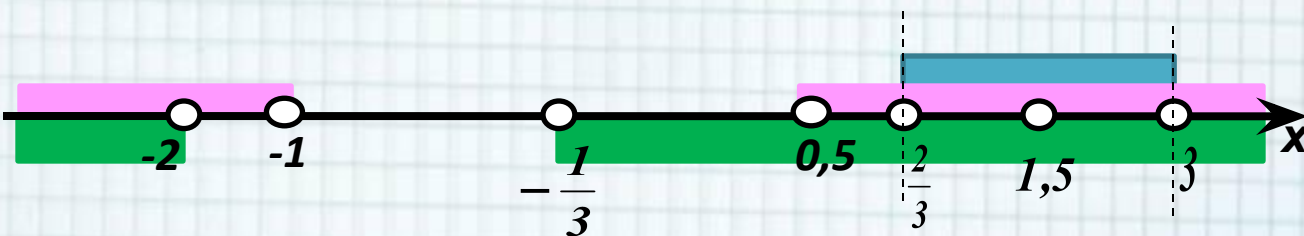
$$x_1 = -\frac{1}{3}; x_2 = -2$$

$$\begin{cases} x > -\frac{1}{3} \\ x < -2 \end{cases}$$

$$3x-1 \neq x+2,$$

$$2x \neq 3,$$

$$x \neq 1,5$$



$$x \in \left(\frac{2}{3}; 1,5\right) \cup (1,5; 3).$$

4) Возвращаемся к исходному неравенству и воспользуемся методом рационализации: $\log_n f - \log_n g \rightarrow (n-1)(f-g)$
На заданном ОДЗ можем записать

$$\left(\frac{3x-1}{x+2} - 1\right)(2x^2 + x - 1 - 11x + 6 + 3x^2) \geq 0,$$



$$\left(\frac{3x-1}{x+2}-1\right)(2x^2+x-1-11x+6+3x^2)\geq 0,$$

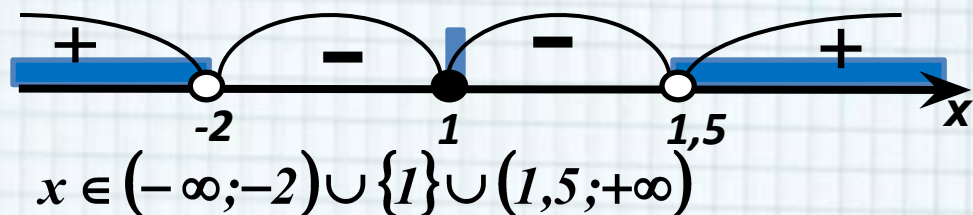
$$\frac{3x-1-x-2}{x+2}(5x^2-10x+5)\geq 0,$$

$$\frac{2x-3}{x+2}(5x^2-10x+5)\geq 0 \quad \cdot \frac{1}{5}$$

$$\frac{2x-3}{x+2}(x^2-2x+1)\geq 0,$$

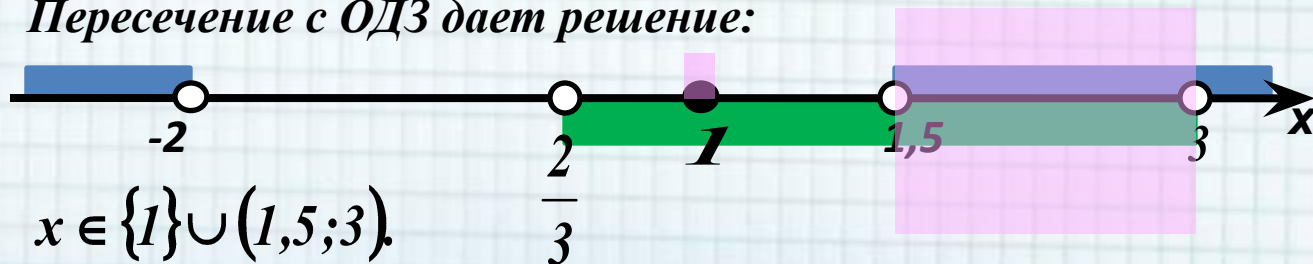
$$\frac{2x-3}{x+2}(x-1)^2\geq 0,$$

Получаем следующие точки на числовой оси:



$$\begin{cases} x \neq -2, \\ x \neq 1,5, \\ x = 1 \end{cases}$$

Пересечение с ОДЗ дает решение:



Ответ : $\{1\} \cup (1,5; 3).$



Используемые материалы

*1. ЕГЭ 2018. Математика. Профильный уровень.
Под ред. И.В. Ященко. – 36 вариантов. Издательство
«Национальное образование»*

*2. <http://mathege.ru/or/ege/Main.html> – Материалы
открытого банка заданий по математике*

источник шаблона:

*Фокина Лидия Петровна
учитель начальных классов
МКОУ «СОШ ст. Евсино»
Искитимского района
Новосибирской области*

СПАСИБО АВТОРАМ ФОНОВ И КАРТИНОК

