Основы комбинаторики. Размещения, перестановки, сочетания.

Изучить данные ресурсы и разобранные примеры записать в тетрадь

https://youtu.be/M61vt2E9lGk?list=PLCZ6Ox1-6l5IsY5sjZx2JJKCdeCJvGJR8 (урок 21)

https://youtu.be/Ez8TxwrWeiw?list=PLCZ6Ox1-6l5IsY5sjZx2JJKCdeCJvGJR8 (урок 22)

П.8 стр.81 № 8.2, 8.5,8.4

Решаем самостоятельно

1 вариант

- 1 $\dfrac{100!}{99!}$
- 2 $\dfrac{11!}{8!\cdot 5!}$
- 3 $\dfrac{4!+6!+7!}{6!-5!}$;

2 вариант

- 1 $\dfrac{2015!}{2014!}$
- 2 $\dfrac{16!}{14!\cdot 3!}$
- 3 $\dfrac{9!+10!+11!}{12!-11!}$;

Проверяем: «5» - верных ответов 4
«4» – верных ответов 3
«3» – верных ответов 2

1 вариант

1) 100
2) 8,25
3) 9,64

2 вариант

- 1) 2015
- 2) 40
- 3) 0,1

ТИПЫ СОЕДИНЕНИЙ

Множества элементов называются ***соединениями***.

Различают три типа соединений:

•перестановки из *n* элементов;

•размещения из *n* элементов по *m*;

•сочетания из *n* элементов по *m* ($m < n$).

Проказница-Мартышка, Осел, Козел да косолапый Мишка
Затеяли сыграть Квартет.
Достали нот, баса, альта, две скрипки
И сели на лужок под липки -
Пленять своим искусством свет.
Ударили в смычки, дерут, а толку нет.
"Стой, братцы, стой! - кричит Мартышка. - Погодите!
Как музыке идти? Ведь вы не так сидите.
И так, и этак пересаживались – опять музыка на лад не идет.
Вот пуще прежнего пошли у них разборы
И споры,
Кому и как сидеть…

ПЕРЕСТАНОВКИ

<u>**Определение**</u>**: Перестановкой из *n* элементов называется любое упорядоченное множество из *n* элементов.**

Иными словами, это такое множество, для которого указано, какой элемент находится на первом месте, какой – на втором, какой- на третьем, …, какой – на n-м месте.

Перестановки – это такие соединения по *n* элементам из данных элементов, которые отличаются одно от другого порядком элементов.

Число перестановок из n элементов обозначают P_n.

$$P_n = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Сколькими способами можно расставить 8 участниц финального забега на восьми беговых дорожках?

Решение. $n = 8$

$P_8 = 8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320$

Сколькими способами можно рассадить 4 человек за одним столом?

Решение

Каждый вариант рассадки отличается только порядком участников, то есть является перестановкой из 4 элементов:

$$P_4 = 4! = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

РАЗМЕЩЕНИЯ

<u>Определение.</u> Размещением из *n элементов по m* **называется любое упорядоченное множество из *m*** **элементов, состоящее из элементов *n элементного множества.***

Число размещений из *m* элементов по *n* обозначают:

$$A_m^n$$

вычисляют по формуле: $$A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Пример

Учащиеся 11-го класса изучают 9 учебных предметов. В расписании учебных занятий на один день можно поставить 4 различных предмета. Сколько существует различных способов составления расписания на один день?

Решение.

Имеем 9-элементное множество, элементы которого учебные предметы. При составлении расписания мы будем выбирать 4 урока и устанавливать в нем порядок. Число таких способов равно числу размещений из девяти по четыре (***m=9, n=4)*** то есть $A_9{}^4$:

$$A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$$

$$A_9^4 = \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9!}{5!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} = 6\cdot7\cdot8\cdot9 = 3024$$

Из коллектива работников в 25 человек нужно выбрать председателя, заместителя, бухгалтера и казначея. Каким количеством способов это можно сделать?

Множество из 25 элементов

Выбираем 4 элементов

$$\frac{25!}{(25-4)!} = \frac{21!*22*23*24*25}{21!} = 22*23*24*25 = 303600$$

В группе обучается 24 студента. Сколькими способами можно составить график дежурства по колледжу, если группа дежурных состоит из трех студентов?

$$A_{24}^{3} = \frac{24!}{(24-3)!} = \frac{24!}{21!} = \frac{21!*22*23*24}{21!} = 22*23*24 = 12144$$

СОЧЕТАНИЯ

Сочетаниями **называют различные комбинации из объектов, которые выбраны из множества различных объектов, и которые отличаются друг от друга хотя бы одним объектом. Иными словами, отдельно взятое сочетание – это уникальная выборка из элементов, в которой <u>не важен их порядок</u> (расположение). Общее же количество таких уникальных сочетаний рассчитывается по формуле**

Число сочетаний из m элементов по n обозначают C_m^n

и вычисляют по формуле: $$C_m^n = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}$$

Сколькими способами из класса, где учатся 24 ученика, можно выбрать два дежурных ?

Решение.

$$C_m^n = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}$$

n =2, ***m***=24

$$C_{24}^2 = \frac{24!}{2!\cdot(24-2)!} = \frac{24!}{2!\cdot 22!} = \frac{24\cdot 23\cdot 22!}{2\cdot 1\cdot 22!} = 12\cdot 23 = 276$$

Студентам дали список из 10 учебников, которые рекомендуется использовать для подготовки к экзамену . Сколькими способами студент может выбрать из них 3 книги?

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!*(10-3)!} = \frac{7!*8*9*10}{3!*7!} = \frac{8*9*1}{3!} = \frac{8*9*10}{1*2*3} = \frac{720}{6} = 120$$

Учитывается ли порядок следования элементов в соединении?

Д А

НЕТ

Все ли элементы входят в соединение?

Д А

НЕТ

ПЕРЕСТАНОВКИ

$$P_n = n!$$

РАЗМЕЩЕНИЯ

$$A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$$

СОЧЕТАНИЯ

$$C_m^n = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}$$

Перестановки	Размещения	Сочетания
n элементов n мест	n элементов k мест	n элементов k мест
Порядок имеет значение	Порядок имеет значение	Порядок не имеет значения
$\boxed{P_n = n!}$	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$

Определить к какому типу относится соединений относится задача.

1. Сколькими способами можно составить расписание одного учебного дня из 5 различных уроков?

Учитывается ли порядок следования элементов в соединении? (да)

Все ли элементы входят в соединение? (да)

Вывод: перестановка

2. В 9«Б» классе 12 учащихся. Сколькими способами можно сформировать команду из 4 человек для участия в математической олимпиаде?

Учитывается ли порядок следования элементов в соединении? (нет)

Все ли элементы входят в соединение? (на этот вопрос ответ не нужен)

Вывод: сочетания

3.Сколько существует различных двузначных чисел, в записи которых можно использовать цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, если цифры в числе должны быть различными?

Учитывается ли порядок следования элементов в соединении? (да)

Все ли элементы входят в соединение? (нет)

Вывод: размещение