# ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

- 1. Похідна функції
- 2 Правила диференціювання
- 3. Диференціал функції
- 4.Похідні та диференціали вищих порядків
- 5. Застосування похідної
-

## 1. Похідна функції

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на деякому проміжку $X$ і точка $x_0 \in X$. Надамо аргументу функції приросту $\Delta x$ ($\Delta x > 0$ або $\Delta x < 0$) такого, щоб точка $x_0 + \Delta x \in X$. Функція дістане при цьому приріст

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Складемо відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

**Означення** Відношення приросту функції до приросту аргументу називається ***середньою швидкістю зміни функції*** (rate of change of function).

Це відношення показує, скільки одиниць приросту функції припадає на одиницю приросту аргументу.

**Означення** Границя відношення приросту функції до приросту аргументу за умови, що приріст аргументу прямує до нуля, називається швидкістю зміни функції в даній точці або її ***похідною*** (derivative) і позначається одним із символів:

$$f'(x_0),\quad y'(x_0),\quad \frac{df(x_0)}{dx}.$$

Отже, за означенням

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Якщо похідна функції $y=f(x)$ в точці $x_0$ існує, то функція називається ***диференційовною*** (differentiable function) *в точці* $x_0$.

Якщо функція диференційовна в кожній точці деякого проміжку $X$, то вона називається ***диференційовною*** *на проміжку* $X$.

Операція відшукання похідної називається ***диференціюванням***.

***Геометричний зміст похідної*** (geometric sense of derivative)

Похідна функції $y = f(x)$ в точці $x_0$ дорівнює кутовому коефіцієнту *дотичної* (tangent line) до графіка даної функції у точці $M_0(x_0, f(x_0))$, тобто

$$f'(x_0) = tg\,\alpha, \qquad (2)$$

де $\alpha$ -кут, якій утворює дотична $\tau$ з додатним напрямком осі $Ox$ (рис. 1).

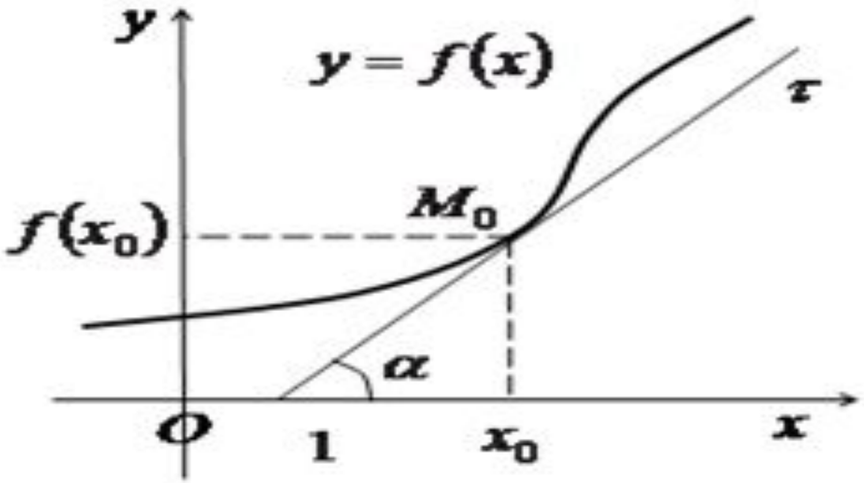


Рис. 1

***Зв'язок між диференційовністю функції та її неперервністю***

**Теорема** Якщо функція $y = f(x)$ диференційовна в точці $x = x_0$, то вона неперервна в цій точці.

На основі геометрічного змісту похідної ***рівняння дотичної до графіка функції*** $y = f(x)$ записується таким чином:

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Якщо неперервна функція в точці $x_0$ має нескінченну похідну, тоді дотичною до графіка функції в точці $M_0(x_0; y_0)$ буде пряма $x = x_0$.

Для ***нормалі***, тобто прямої, що проходить через точку дотику $M_0(x_0; y_0)$, перпендикулярно до дотичної (пряма $M_0N$), рівняння має вигляд

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), \; f'(x_0) \neq 0.$$

У випадку $f'(x_0) = 0$ нормаллю буде пряма $x = x_0$; якщо функція в точці $x_0$ має нескінченну похідну, тоді нормаллю до кривої буде пряма $y = f(x_0)$.

***Фізичний зміст похідної***

Під фізичним змістом похідної розуміють швидкість зміни функції в даній точці. Наприклад:

1) при русі тіла швидкість $v$ в даний момент часу $t$ є похідною від шляху $s(t)$: $v = \frac{ds}{dt}$;

2) при обертовому русі твердого тіла навколо осі $0x$ кутова швидкість $\omega$ в даний момент часу $t$ є похідною від кута повороту $\phi(t)$: $\omega = \frac{d\phi}{dt}$;

3) при охолодженні тіла швидкість охолодження в момент часу $t$ є похідною від температури $\frac{dT}{dt}$;

4) теплоємність $C$ для даної температури $t$ є похідною від кількості тепла $Q$: $C = \frac{dQ}{dt}$;

5) при нагріванні стержня коефіцієнт лінійного розширення $\alpha$ при даному значенні температури $t$ є похідною від довжини $l$: $\alpha = \frac{dl}{dt}$.

## 2. Правила диференціювання (Table of Derivative Rule)

**Теорема** Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ мають похідні в точці $x$, то справедливі формули для похідних суми, добутку та частки цих функцій:

1) $(u(x)+v(x))' = u'(x)+v'(x)$ - (Sum Rule);

2) $(u(x)\cdot v(x))' = u'(x)\cdot v(x)+v'(x)\cdot u(x)$ - (Product Rule);

3) $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dfrac{u'(x)\cdot v(x)-v'(x)\cdot u(x)}{(v(x))^2}$, при $v(x)\neq 0$ - (Quotient Rule).

***Зауваження.*** Сталий множник при диференціюванні виноситься за знак похідної (ConstantMultiple Rule), тобто:

$(c\cdot u(x))' = c\cdot u'(x)$, де $c = const$.

***Похідна складної функції*** (Chain Rule)

Нехай функція $y = f(u)$ визначена в деякому околі точки $u$ і функція $u = \varphi(x)$ визначена в деякому околі точки $x$, таким чином визначена складна функція $y = f[\varphi(x)]$.

**Теорема** Якщо функція $y = f(u)$ має похідну в точці $u$ і функція $u = \varphi(x)$ має похідну в точці $x$, то складна функція $y = f[\varphi(x)]$ також має похідну в точці $x$, причому

$$y'_x = (f[\varphi(x)])' = f'(u) \cdot \varphi'(x), \qquad (3)$$

або скорочено

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x \qquad (3^*)$$

***Приклад.*** Знайти похідну функції $y = \cos^5 3x$.

***Розв'язання.*** Приймаючи $y = u^5, \quad u = \cos 3x$, маємо:

$$y' = \left(u^5\right)' (\cos 3x)' = 5u^4 ((-\sin 3x) \cdot 3) = 5\cos^4 3x \cdot (-3\sin 3x) = -15\cos^4 3x \cdot \sin 3x.$$

Тут враховано, що $u = \cos 3x$ також складена функція і тому за формулою (3) вона має похідну $u' = -3\sin 3x$.

***Похідна оберненої функції*** (derivative of inverse function)

**Теорема** Якщо функція $y = f(x)$, $x \in X$, $y \in Y$ має обернену $x = f^{-1}(y)$ і для всіх $x \in X$ існує похідна $f'(x) \neq 0$, то для всіх $y \in Y$ існує похідна $\left(f^{-1}(y)\right)'$, причому справедлива рівність:

$$\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{або} \quad x'_y = \frac{1}{y'_x}, \ (y'_x \neq 0). \qquad (4)$$

***Приклад*.** Знайти похідну функції, оберненої до функції $y = \sin x$.

***Розв'язання.*** Функція $y = \sin x$ неперервна і монотонна на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Отже, на цьому проміжку існує обернена функція, яку позначають $x = \arcsin y$, $y \in [-1, 1]$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Нагадаємо, що графіки обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$ (рис. 3).

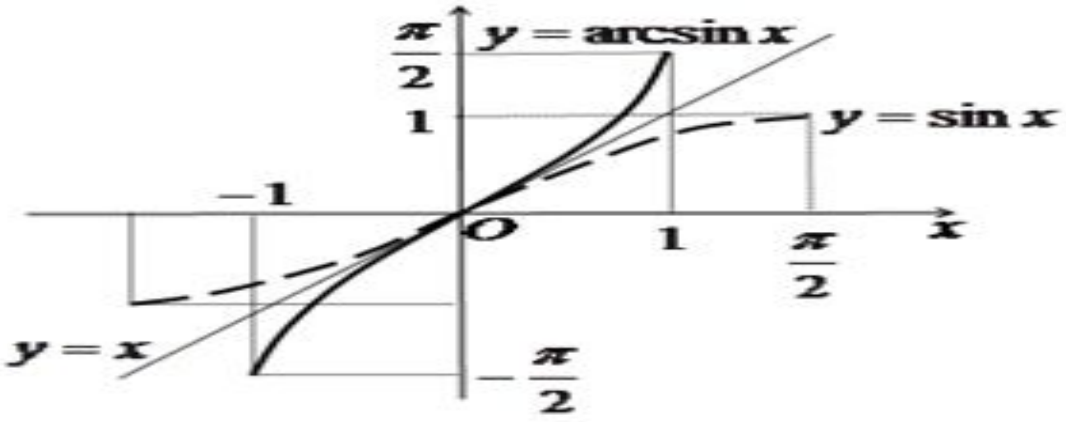


Рис. 3

Знаходимо похідну $x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{\cos x}$. Оскільки аргументом оберненої функції є $y$, то виконаємо такі перетворення:

$$\cos x = +\sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-y^2},$$

знак «+» взято, оскільки при $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ $\cos x \ge 0$. Отже $x'_y = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ або

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Якщо аргументом є змінна $x$, то маємо формулу

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (|x|<1). \qquad (5)$$

Продовжуючи знаходити похідні базисних елементарних функцій з урахуванням означення похідної, її властивостей та правил диференціювання можна скласти наведену нижче таблицю.

## *Таблиця похідних основних елементарних функцій*

(Table of Derivative Formulas)

| | | |
|---|---|---|
| 1) | $(const)' = 0$; | |
| 2) | $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, | ($\forall n \in N$, або $\forall n \in R$ при $x > 0$); |
| 3) | $(a^x)' = a^x \ln a$, | ($\forall a > 0, a \neq 1$); |
| 4) | $(e^x)' = e^x$; | |
| 5) | $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$, | ($(\forall a > 0, a \neq 1) \cap \forall x > 0$); |
| 6) | $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, | ($\forall x > 0$); |
| 7) | $(\sin x)' = \cos x$; | |
| 8) | $(\cos x)' = -\sin x$; | |
| 9) | $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, | ($x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z$); |

10) $(\mathrm{ctg}x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$, $(x \neq \pi k, \quad k \in Z)$;

11) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(|x| < 1)$;

12) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(|x| < 1)$;

13) $(\mathrm{arctg}x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;

14) $(\mathrm{arcctg}x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$;

15) $(\mathrm{sh}\,x)' = \mathrm{ch}\,x$;

16) $(\mathrm{ch}\,x)' = \mathrm{sh}\,x$;

17) $(\mathrm{th}\,x)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$;

18) $(\mathrm{cth}x)' = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$, $(x \neq 0)$.

***Логарифмічне диференціювання.*** Іноді відшукання похідної спрощується, якщо її попередньо прологарифмувати. В зв'язку з цим такий метод називається ***логарифмічним диференціюванням***.

***Приклад*** Знайти похідну складної функції виду $y = u(x)^{v(x)}$.

***Розв'язання.*** Логарифмуючи рівність дістанемо $\ln y = v(x) \cdot \ln u(x)$.
Диференціюючи обидві частини останньої рівності, матимемо:

$$(\ln y)' = v'(x) \cdot \ln u(x) + v(x) \cdot (\ln u(x))'$$ ,або $$\frac{1}{y} y' = v'(x) \cdot \ln u(x) + v(x) \cdot \frac{1}{u(x)} u'(x).$$

Виразивши з останньої рівності $y'$ та підставивши $y = u(x)^{v(x)}$, отримаємо

$$y' = u(x)^{v(x)} \left[ v'(x) \cdot \ln u(x) + v(x) \cdot \frac{1}{u(x)} u'(x) \right],$$

цю рівність можна переписати так

$$\left(u(x)^{v(x)}\right)' = u(x)^{v(x)} \cdot \ln u(x) \cdot v'(x) + v(x) \cdot u(x)^{v(x)-1} \cdot u'(x), \qquad (6)$$

де $u(x)^{v(x)} \cdot \ln u(x) \cdot v'(x)$ - похідна від показникової функції,
$v(x) \cdot u(x)^{v(x)-1} \cdot u'$ - похідна від степеневої функції.

***Приклад.*** Знайти похідну $y = x^{\sin x}$.

***Розв'язання.*** Логарифмуючи рівність дістанемо:

$$\ln y = \sin x \cdot \ln x.$$

Диференціюючи обидві частини отриманої рівності за змінною $x$, матимемо

$$(\ln y)' = (\sin x \cdot \ln x)' \quad \text{або} \quad \frac{1}{y} y' = \cos x \cdot \ln x + \frac{1}{x} \sin x,$$

звідки

$$y' = y\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{1}{x} \sin x\right) = x^{\sin x}\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{1}{x} \sin x\right).$$

Крім диференціювання степенево-показникових функцій метод логарифмічного диференціювання доцільно застосовувати також у випадку, коли функція подана у вигляді добутку (частки) досить великої кількості функцій.

***Приклад.*** Знайти похідну функції $y = e^{x^3} \cdot \mathrm{ctg}^5 x \cdot \arcsin x$.

***Розв'язання.*** Логарифмуючи обидві частини рівності дістанемо

$$\ln y = x^3 \ln e + 5 \ln(\mathrm{ctg}\, x) + \ln(\arcsin x).$$

Диференціюючи обидві частини отриманої рівності, матимемо:

$$(\ln y)' = (x^3)' + 5(\ln(\mathrm{ctg}\, x))' + (\ln(\arcsin x))',$$

або

$$\frac{1}{y} y' = 3x^2 + 5 \frac{1}{\mathrm{ctg}\, x} \cdot \left( \frac{-1}{\sin^2 x} \right) + \frac{1}{\arcsin x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Звідки

$$y' = e^{x^3} \cdot \mathrm{ctg}^5 x \cdot \arcsin x \left( 3x^2 + \frac{5}{\sin x \cdot \cos x} \cdot + \frac{1}{\cdot \sqrt{1 - x^2} \arcsin x} \right).$$

***Приклад.*** Знайти похідну функції

$$y=\frac{\sqrt{x^2+3}}{(2x-1)^6(3x+5)^2}.$$

***Розв'язання.*** Логарифмуючи обидві частини рівності дістанемо

$$\ln y=\ln\sqrt{x^2+3}-\ln(2x-1)^6-\ln(3x+5)^2;$$

$$\ln y=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+3\right)-6\ln(2x-1)-2\ln(3x+5).$$

Диференціюючи обидві частини отриманої рівності, матимемо:

$$(\ln y)'=\frac{1}{2}\left(\ln\left(x^2+3\right)\right)'-6(\ln(2x-1))'-2(\ln(3x+5))',$$

або

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+3}2x-6\frac{1}{2x-1}2-2\frac{1}{3x+5}3=\frac{x}{x^2+3}-\frac{12}{2x-1}-\frac{6}{3x+5},$$

звідки

$$y'=\frac{\sqrt{x^2+3}}{(2x-1)^6(3x+5)^2}\left(\frac{x}{x^2+3}-\frac{12}{2x-1}-\frac{6}{3x+5}\right).$$

**Похідна функції, заданої неявно** (implicit function derivative)

Якщо на деякому проміжку $X$ диференційовна функція $y = y(x)$ задана неявно рівнянням $F(x, y) = 0$, то її похідну $y'(x)$ можна знайти з рівняння

$$[F(x, y)]'_x = 0,$$

де $F(x, y)$ розглядається як складена функція змінної $x$.

***Приклад*.** Знайти похідну функції, заданої неявно

$$3y^2 + 2xy + \cos y = 0.$$

***Розв'язання.*** Знаходимо похідну за змінною $x$, пам'ятаючи, що $y(x)$ є функцією від $x$, тому $(y(x))' = y'$

$$3 \cdot 2y \cdot y' + 2(1 \cdot y + x \cdot y') + (-\sin y) \cdot y' = 0.$$

Розв'яжемо це рівняння відносно $y'$, отримаємо:

$$y'(6y + 2x - \sin y) = -2y,$$

звідки

$$y' = \frac{2y}{\sin y - 6y - 2x}.$$

Похідна функції

$$\begin{cases} x = f(t), \\ y = g(t), \end{cases}$$

яка задана параметрично, обчіслюється за формулою:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} \quad \text{або} \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

за умови, що $f(t),\ g(t)$ диференційовні в точці $t$ функції, прічому $\frac{df}{dt} \neq 0$.

**Приклад** . Знайти в точці $t = \dfrac{\pi}{6}$ похідну $y'_x$ функції, яка задана параметрично:

$$\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t, \\ y = 2\sin t - \sin 2t. \end{cases}$$

**Розв'язання.** Застосовуючи формулу обчислення похідної функції, яка задана параметрично, маємо:

$$x'_t = -2\sin t + 2\sin 2t = 4\cos\frac{3t}{2}\sin\frac{t}{2};$$

$$y'_t = 2\cos t - 2\cos 2t = 4\sin\frac{3t}{2}\sin\frac{t}{2}.$$

Таким чином,

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{4\sin\frac{3t}{2}\sin\frac{t}{2}}{4\cos\frac{3t}{2}\sin\frac{t}{2}}; \quad y'_x = \operatorname{tg}\frac{3t}{2}; \quad y'_x\Big|_{t=\frac{\pi}{6}} = \operatorname{tg}\frac{3}{2}\frac{\pi}{6} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1.$$

## 3. Диференціал функції

**Диференціалом функції** $y = f(x)$ в точці $x$ називається головна (лінійна відносно $\Delta x$) частина приросту $\Delta y$ диференційовної в точці $x$ функції.

Диференціал дорівнює добутку похідної функції в точці х на приріст незалежної змінної, тобто

$$dy = f'(x)\Delta x.$$

Зокрема, диференціалом незалежної змінної є її приріст:

$$dx = 1 \cdot \Delta x, \quad dx = \Delta x,$$

Тоді формула диференціала має вигляд

$$dy = f'(x)dx,$$

відкіля

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

## Основні властивості диференціала

Для довільних диференційованих функцій $u(x)$ та $v(x)$ мають місце такі рівності:

1. $d\alpha = 0, \ (\alpha = const)$;
2. $d(\alpha_1 u + \alpha_2 v) = \alpha_1 du + \alpha_2 dv, \ (\alpha_1, \alpha_2$ — довільні сталі$)$;
3. $d(uv) = udv + vdu$;
4. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}, \ v \neq 0$;
5. $df(u) = f'(u)du, \ u = u(x)$.

**Приклад** Знайти диференціал функції $y = \sin x$.

**Розв'язання.** За формулою

$$dy = d(\sin x) = (\sin x)' dx = \cos x\, dx, \quad dy = \cos x\, dx.$$

**Приклад.** Знайти диференціал функції $y = x^2 + 4x + 8$.

**Розв'язання.** За формулою

$$dy = (x^2 + 4x + 8)' dx = (2x + 4) dx = 2(x + 2) dx.$$

## Застосування диференціала до наближених обчислень

При малих $\Delta x$ справедлива формула $\Delta y \approx dy$, тобто

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

**Приклад.** Обчисліти наближено за допомогою диференціала значення функції $y = \sqrt{x^2 + 5}$ в точці $x = 1{,}97$.

**Розв'язання.** Найближча до 1,97 точка, в якій легко обчислити значення $f(x_0)$ и $f'(x_0)$, — це точка $x_0 = 2$.

$$\Delta x = x - x_0 = 1{,}97 - 2 = -0{,}03;$$

$$f(x_0) = f(2) = \sqrt{2^2 + 5} = 3;$$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5}}, \quad f'(x_0) = y'(2) = \frac{2}{3}.$$

За наведеною формулою маємо

$$f(1{,}97) \approx 3 + \frac{2}{3}(-0{,}03) = 2{,}98.$$

# 4.Похідні та диференціали вищих порядків

**Похідною другого порядку** (другою похідною функції) $y = f(x)$ у точці $x$ називається похідна від її першої похідної $y' = f'(x)$ при умові, що $f'(x)$ диференційовна в точці $x$. Вона позначається такими символами:

$$f''(x),\ f^{(2)}(x),\ \frac{d^2 f(x)}{dx^2},\ f''_{xx},\ f''_{x^2}.$$

Аналогічно визначається **похідна $n$-го порядку** функції $y = f(x)$, яка має $(n\text{-}1)$ похідну в точці $x$:

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = (f^{(n-1)}(x))',\ n \in N.$$

Похідну, для якої існує $n$-а похідна в точці $x$, називають $n$ разів диференційовною в цій точці.

## Основні формули обчислення похідних вищих порядків

$$(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a \quad (a > 0, a \neq 1);$$

$$(e^x)^{(n)} = e^x;$$

$$(\sin \alpha x)^{(n)} = \alpha^n \sin\left(\alpha x + \frac{n\pi}{2}\right);$$

$$(\cos \alpha x)^{(n)} = \alpha^n \cos\left(\alpha x + \frac{n\pi}{2}\right);$$

$$((ax+b)^{\alpha})^{(n)} = a^n \alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)(ax+b)^{\alpha-n};$$

зокрема,

$$\left(\frac{1}{x \pm a}\right)^{(n)} = (-1)^{(n)} \frac{n!}{(x \pm a)^{n+1}};$$

$$(\log_a |x|)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n \ln a};$$

$$(\ln |x|)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

## Основні правила обчислення похідних

Якщо функції $u(x)$ та $v(x)$ п разів диференційовні, тоді мають місце такі рівності:

1) $(a_1u+a_2v)^{(n)}=a_1u^{(n)}+a_2v^{(n)}$ $(a_1, a_2 -\text{сталі})$;

2) $(uv)^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$, **(формула Лейбніца)**

де $C_n^k=\dfrac{n!}{(n-k)!k!}$, $0!=1$.

**Обчислення похідних вищих порядків функцій, заданих параметрично**

Якщо функція задана параметрично рівняннями $x = (t)$, $y = y(t)$, тоді похідні $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \dots$ обчислюються за формулами:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t};\ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)'_t}{x'_t};\ \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)'_t}{x'_t}$$ і т.д.

Для похідної другого порядку має місце формула:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t))^2} = \frac{\begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) \\ x''(t) & y''(t) \end{vmatrix}}{(x'(t))^2}.$$

## Диференціали вищих порядків

**Диференціалом другого порядку** двічі диференційовної функції $y = f(x)$ називають диференціал від диференціала першого порядку функції $f(x)$, тобто $d^2 y = d(dy)$. У випадку, коли $x$ – незалежна змінна, диференціали обчислюються за формулами:

$d^2 y = y''(dx)^2$,

$d^3 y = y'''(dx)^3$,

$d^n y = y^{(n)}(dx)^n$.

Якщо ж $x$ — деяка функція від $t$, $x = x(t)$, тоді

$d^2 y = y''(dx)^2 + y'_x d^2 x$,

$d^3 y = y'''(dx)^3 + 3y''_{xx} dx d^2 x + y' d^3 x$ і т.д.

Якщо для функцій $u(x)$ та $v(x)$, $x$ — незалежна змінна, існують диференціали $d^n u$ та $d^n v$, тоді

$d^n(a_1 u + a_2 v) = a_1 d^n u + a_2 d^n v$ ($a_1$, $a_2$ — сталі),

$$d^n(uv) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k d^{n-k} u d^k v.$$

**Приклад.** Знайти диференціал другого порядку функції $y = x\sqrt{x-3}$ в точці $x_0 = 12$.

**Розв'язання.** Згідно з формулою для обчислення диференціалу другого порядку $d^2y = y''(dx)^2$ обчислюється $y''$:

$$y' = x'\sqrt{x-3} + x(\sqrt{x-3})' = \sqrt{x-3} + \frac{x}{2\sqrt{x-3}} = \frac{3(x-2)}{2\sqrt{x-3}};$$

$$y'' = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x-3}} - \frac{x-2}{2\sqrt{(x-3)^3}}\right) = \frac{3(2(x-3)-x+2)}{4\sqrt{(x-3)^3}} = \frac{3(x-4)}{4\sqrt{(x-3)^3}}.$$

Тоді $y''(x_0) = y''(12) = \dfrac{3\cdot 8}{4\cdot 27} = \dfrac{2}{9}.$

Отже, $d^2y(x_0) = \dfrac{2}{9}(dx)^2.$

**Приклад.** Знайти $\frac{d^2y}{dx^2}$ функції, яка задана параметрічно рівняннями: $x = \ln t$, $y = \operatorname{arctg} t$.

**Розв'язання.** За правилами диференціювання функції, заданої параметрично, маємо:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{1}{t}} = \frac{t}{1+t^2};$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)'_t}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{1+t^2-2t^2}{(1+t^2)^2}}{\frac{1}{t}} = \frac{t(1-t^2)}{(1+t^2)^2}.$$

# 5. Застосування похідної

**Правила Лопіталя розкриття невизначеностей** (L'Hospital rule)

**Теорема** (I правило Лопіталя). Якщо:

1) функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ диференційовні на інтервалі $(a;b)$, $\varphi'(x)\neq 0$ для всіх $x\in(a;b)$;

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$;

3) існує скінченна або нескінченна границя $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$,

то існує границя $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$, причому має місце рівність:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

***Приклад.*** Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{\ln(x-1)}$.

***Розв'язання.*** Ми маємо невизначеність типу $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Функції $f(x)=x^3-8$ і $\varphi(x)=\ln(x-1)$ задовольняють умови теореми в деякому околі точки $a=2$. Застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{\ln(x-1)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{\left(x^3-8\right)'}{\left(\ln(x-1)\right)'}=\lim_{x\to 2}\frac{3x^2}{1/(x-1)}=12$$

***Наслідок 1.*** Теорема Лопіталя справедлива також при $a=-\infty$, при $a=+\infty$ і при $a=\infty$.

***Приклад.*** Обчислити границю $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pi-2\operatorname{arctgx}}{e^{\frac{1}{x}}-1}$.

***Розв'язання.*** Маємо невизначеність типу $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi-2\operatorname{arctgx}}{e^{1/x}-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2\cdot\dfrac{1}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}\cdot e^{1/x}}=2\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{1/x}}=2\cdot1\cdot1=2$$

.

***Наслідок 2.*** Якщо похідні $f'(x)$ і $\varphi'(x)$ задовольняють ті самі вимоги, що і функції $f(x)$ і $\varphi(x)$, то правило Лопіталя можна застосувати повторно. При цьому отримаємо

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f''(x)}{\varphi''(x)}.$$

І взагалі, правило Лопіталя при виконанні умов теореми можна застосовувати багаторазово.

***Приклад.*** Обчислити границю $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3}$.

***Розв'язання.*** Дана границя дозволяє використовувати правило Лопіталя багаторазово, дійсно:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{(3.21)}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{6x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{(3.21)}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}.$$

***Наслідок 3.*** Якщо в теоремі замінити умову 2) на наведену нижче

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \infty$ , або $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ , то правило Лопіталя також має місце.

В цьому випадку правило Лопіталя застосовується для розкриття невизначеності типу $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ ( II правило Лопіталя).

***Приклад.*** Якщо $\alpha > 0$, то $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}} = 0,$$

тобто довільний додатний степінь $x$ зростає швидше, ніж $\ln x$ при $x \to +\infty$.

***Розв'язування.*** Дійсно, застосувавши II правило Лопіталя, отримаємо

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{\alpha \cdot x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\alpha \cdot x^{\alpha}} = 0.$$

***Приклад.*** Якщо $n \in N$, $a > 1$ то

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0,$$

тобто, при $x \to +\infty$ степенева функція $x^n$ зростає повільніше, ніж показникова функція $a^x$, $a > 1$.

***Розв'язування.*** Дійсно, застосувавши правило Лопіталя розкриття невизначеності $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ $n$ раз, отримаємо:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{a^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{n\,x^{n-1}}{a^x \ln a} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{a^x \ln^2 a} = \ldots = \lim_{x \to +\infty} \frac{n!}{a^x \cdot \ln^n a} = 0.$$

# ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ДО ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ТА ПОБУДОВИ ГРАФІКІВ

- Дослідити функцію, задану аналітичним виразом $y=f(x)$, означає визначити такі її характеристики: область визначення; парність чи непарність; періодичність; монотонність; екстремуми; найбільше і найменше значення в заданому відрізку. Якщо є точки розриву функції, то необхідно дослідити її поведінку поблизу цих точок.
- Для графічного зображення функції необхідно додатково визначити: точки перетину графіка з осями координат; опуклість його; точки перегину; асимптоти.

**Означення 1**. Якщо кожному значенню $x$ з деякої числової множини $X$ за певним правилом поставлене у відповідність єдине число $y$, то кажуть, що $y$ є ***функція*** від $x$ і записують $y = f(x)$.

**Означення 2**. Сукупність значень $x$, при яких функція $y$ існує, називається ***областю визначення функції***.

**Означення 3**. Нехай функція $y = f(x)$ визначена в області, симетричній відносно початку координат. Тоді, якщо

$$f(x) = -f(x),$$

то функція називається ***непарною***, а при

$$f(x) = f(-x)$$

– ***парною***.

**Означення 4**. Функція називається ***періодичною***, якщо існує таке дійсне число $l \neq 0$, що, при будь-яких значеннях аргументу $x$ із області визначення

$$f(x) = f(x + kl),$$

де $k$ – ціле число, $l$ – період.

**Означення 5**. Якщо для двох будь-яких різних значень аргументу $x_1$ і $x_2$ з області визначення із нерівності $x_1 < x_2$ виконуються нерівності:

$f(x_1) < f(x_2)$, то функція називається ***зростаючою***,

$f(x_1) \le f(x_2)$, то – ***не спадною***,

$f(x_1) > f(x_2)$, то – ***спадною***,

$f(x_1) \ge f(x_2)$, то – ***не зростаючою***.

Зростаючі, спадні, не зростаючі, не спадні функції називаються ***монотонними***.

**Означення 6.** Функція $y = f(x)$ має ***локальний внутрішній максимум*** (мінімум) в точці $x = x_0$, якщо

1) $f(x)$ визначена в точці $x_0$ і її достатньо малому «$\delta$-околі», тобто $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$;

2) всі значення функції з «$\delta$-околу» менші (більші) ніж її значення в точці $x_0$, тобто $f(x) < f(x_0)$ $\left[f(x) > f(x_0)\right]$.

Геометричний зміст цього зрозумілий із рис.

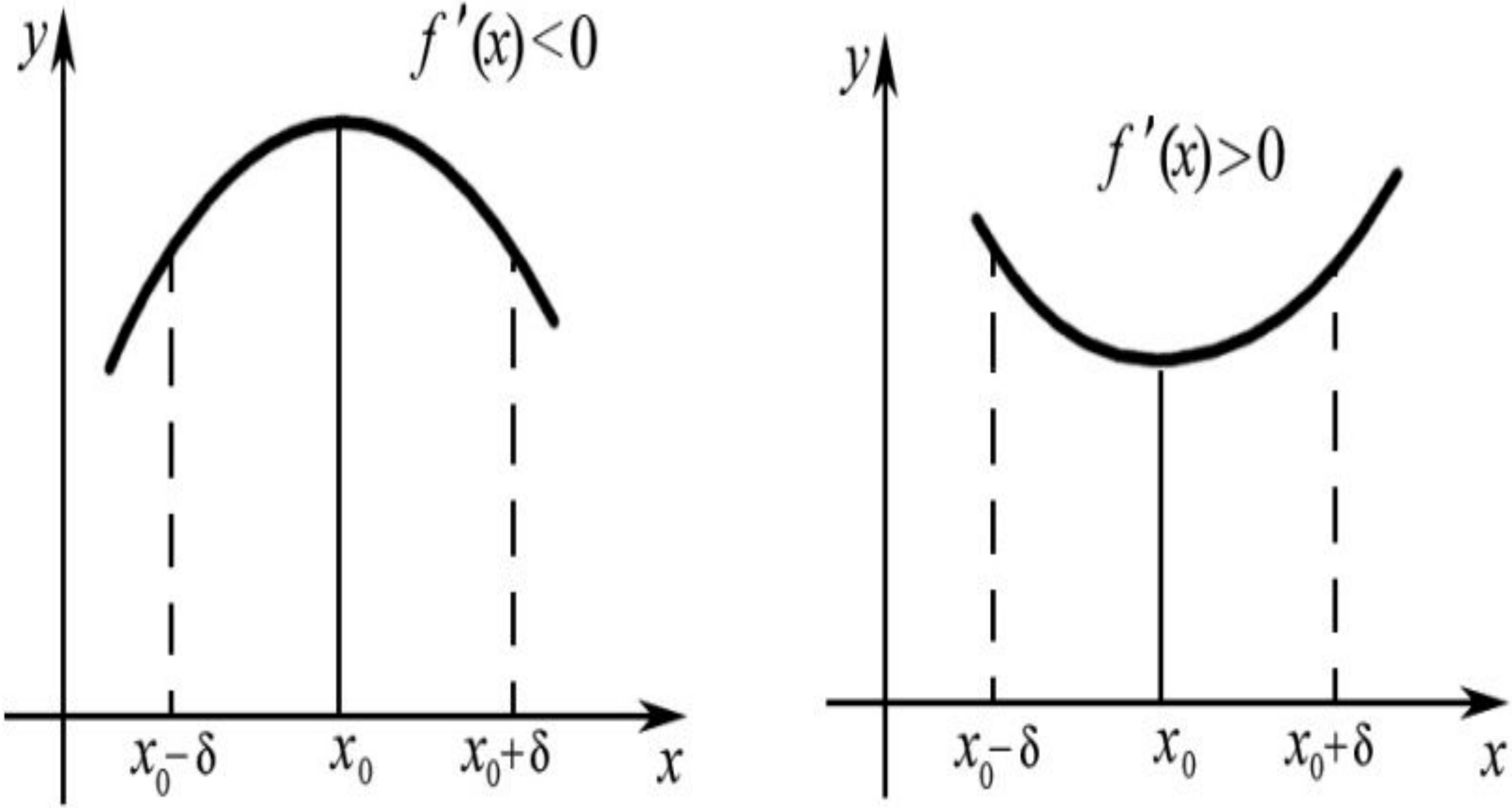


Рис.

**Означення 7.** Найбільший з максимумів і найменший з мінімумів називають ***найбільшим і найменшим значенням функції на відрізку***.

Застосуємо диференціювання до визначення монотонності функцій.

**Теорема (необхідні умови)**. Якщо диференційована на інтервалі $(a;b)$ функція $f(x)$ ***зростає*** (спадає), то $f'(x) \geq 0$ $\left[f'(x) \leq 0\right]$ для $\forall x \in (a;b)$.

**Теорема (достатні умови)**. Якщо функція диференційована на інтервалі $(a;b)$ і $f'(x) > 0$ $\left[f'(x) < 0\right]$ для $\forall x \in (a;b)$, то ця функція ***зростає*** (спадає) на інтервалі $(a;b)$.

Отже, щоб знайти інтервали монотонності функції $f(x)$, необхідно:

– знайти похідну даної функції;

– знайти критичні точки з рівняння $f'(x) = 0$ і з умови $f'(x) = \infty$;

– розбити критичними точками область існування функції на інтервали;

– визначити знак похідної на кожному інтервалі; якщо похідна додатна – функція зростає, якщо від'ємна – функція спадає в цьому інтервалі.

**Теорема (необхідна умова екстремуму).** Якщо диференційована функція $y = f(x)$ має екстремум в точці $x_0$, то її похідна в цій точці дорівнює нулю, тобто $f'(x_0) = 0$.

**Теорема (достатня умова екстремуму)**. Якщо неперервна функція $y = f(x)$ диференційована в деякому «$\delta$-околі» критичної точки $x_0$ і при переході через неї (зліва направо) похідна $f'(x)$ міняє знак з «+» на «-», то $x_0$ є точкою максимуму; якщо знак похідної змінюється з «–» на «+», то $x_0$ – точка мінімуму (див. рис. [illegible]).

Отже, щоб дослідити функцію на екстремум, необхідно:

– знайти критичні точки функції із рівняння $f'(x) = 0$;

– вибрати серед них внутрішні точки області визначення;

– дослідити знак похідної $f'(x)$ зліва і справа від кожної критичної точки;

– виписати ті точки, де є екстремум;

– знайти значення функції в точках екстремуму.

Для дослідження на екстремум можна скористатись поняттям другої похідної $f''(x)$.

**Теорема**. Якщо в точці $x_0$ $f'(x_0)=0$, а $f''(x_0)\neq 0$, то при $f''(x_0)<0$ функція має в цій точці максимум, а при $f''(x_0)>0$ – мінімум.

Щоб знайти найбільше і найменше значення функції на відрізку, треба:

– знайти критичні точки функції на відрізку $[a;b]$;

– обчислити значення функції в цих точках;

– обчислити значення функції $f(a)$ і $f(b)$;

– серед обчислених значень вказати найбільше $f_{\max}(x)$ і найменше $f_{\min}(x)$.

**Приклад**. Дослідити функцію $f(x) = x^3 - 3x - 4$ на монотонність.

**Розв'язок.**

Функція визначена при $(-\infty < x < +\infty)$.

Похідна функції $f'(x) = (x^3 - 3x - 4)' = 3x^2 - 3$.

Критичні точки: $f'(x) = 0$, $3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1$.

Розіб'ємо область існування на інтервали монотонності: $(-\infty < x < -1) \cup (-1 < x < 1) \cup (1 < x < +\infty)$.

Визначаємо знак похідної і поведінку функції:

1) $-\infty < x < -1$: $f'(x) > 0$ – функція зростає;

2) $-1 < x < 1$: $f'(x) < 0$ – функція спадає;

3) $1 < x < +\infty$: $f'(x) > 0$ – функція спадає.

Графічно:

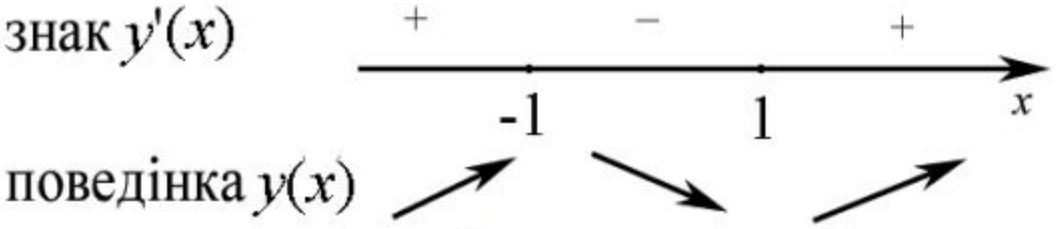


Рис.

**Приклад**. Знайти екстремуми функції $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3}{2}x^2 + 2x - 3$.

**Розв'язок.**

Область визначення $-\infty < x < +\infty$.

Критичні точки: $f'(x) = 0$, $f'(x) = \left( \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3}{2}x^2 + 2x - 3 \right)' = x^2 - 3x + 2$,

$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 1; 2$.

Точок, де похідна не існує, немає.

За першою похідною:

знак $y'(x)$

поведінка $y(x)$

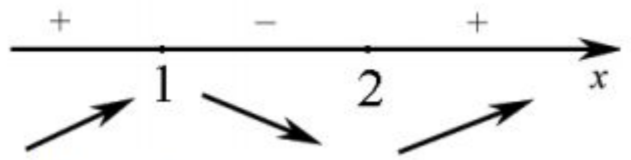


Рис. .

Отже, точка $x = 1$ є точкою максимуму, а точка $x = 2$ є точкою мінімуму. Значення функції в цих точках: $f_{\max} = f(1) = -\dfrac{13}{6}$, $f_{\min}(x) = f(2) = -\dfrac{7}{3}$. За другою похідною: $f''(x) = 2x - 3$; $f''(1) = -1 < 0$; $f''(2) = 1 > 0$. Отже, в точці $x = 1$ функція дістає максимуму, а в точці $x = 2$ – мінімуму.

**Задача**. Визначити розміри циліндричного бака об'єму $V$, при яких на його виготовлення піде найменше матеріалу.

**Розв'язок.** Нехай радіус основи бака $r$, а висота його $h$. Тоді повна поверхня бака $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$. Це функція двох змінних $r$ і $h$. Виразимо $h = \dfrac{V}{\pi r^2}$, оскільки об'єм $V$ заданий. Отже, $S = S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \dfrac{V}{\pi r^2}$ або $S(r) = 2\pi r^2 + \dfrac{2V}{r}$.

Знайдемо критичні точки:

$$S'(r) = 0,\ S'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2},\ 2\left(2\pi r - \frac{V}{r^2}\right) = 0,\ 2\pi r - \frac{V}{r^2} = 0 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Знайдемо знак другої похідної $S''(r) = 2\left(2\pi + \dfrac{2V}{r^3}\right) > 0$ на проміжку $(0;+\infty)$.

Отже в точці $r = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$ функція $S(r)$ має мінімум.

Тоді висота $h = \dfrac{V}{\pi\sqrt[3]{\left(\dfrac{V}{2\pi}\right)^2}} = 2\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}} = 2r$.

**Відповідь**: Висота бака повинна бути вдвічі більшою радіуса основи, щоб на виготовлення бака об'єму $V$ пішло найменше матеріалу.

**Приклад**. Знайти найбільше і найменше значення функції $f(x)=3x^4+4x^3+1$ на відрізку $[-2;1]$.

**Розв'язок.** Знайдемо критичні точки із рівняння $f'(x)=0$, $f'(x)=(3x^4+4x^3+1)'=12x^3+12x^2$, $12x^3+12x^2=0 \Rightarrow x_1=x_2=0$, $x_3=-1$.

Точки $x=-1$ і $x=0$ належать проміжку $[-2;1]$, тому знаходимо значення функції в цих точках $f(-1)=3-4+1=0$, а $f(0)=1$. Знайдемо значення функції на кінцях відрізку $f(-2)=48-32+1=17$, $f(1)=8$. Отже, серед цих значень найбільше $f_{\text{найб}}=f(-2)=17$, а найменше $f_{\text{найм}}=f(-1)=0$.

## Опуклість кривих. Точки перегину

**Означення 1**. Крива $y = f(x)$ називається ***опуклою на інтервалі***, якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать нижче її дотичної на цьому інтервалі.

**Означення 2**. Крива $y = f(x)$ називається ***увігнутою на інтервалі***, якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать вище її дотичної на цьому інтервалі.

**Означення 3**. ***Точкою перегину*** називається точка кривої, яка відділяє опуклість від увігнутості.

Інтервали опуклості і увігнутості знаходять за допомогою теореми.

**Теорема**. Нехай функція $y = f(x)$ є двічі диференційованою на $(a;b)$. Тоді:

– якщо $f''(x) < 0$, то крива опукла;

– якщо $f''(x) > 0$, то крива увігнута.

В точці перегину $f''(x) = 0$ або не існує $f''(x) = \infty$.

**Теорема**. Нехай $x_0$ – критична точка другого роду. Якщо при переході через неї $f''(x)$ змінює знак, то точка $M_0\left(x_0; f(x_0)\right)$ є точкою перегину кривої.

Отже, щоб знайти точки перегину, необхідно знайти критичні точки другого роду із рівняння $f''(x) = 0$ (або $\infty$) і дослідити зміну знака другої похідної при переході через ці точки.

**Приклад**. Знайти інтервали опуклості, увігнутості та точки перегину кривої

$$f(x)=x^5-x+2.$$

**Розв'язок.** Область визначення $-\infty<x<+\infty$. Так як $f''(x)=20x^3$, то критична точка другого роду одна - $x=0$. Розбиваємо область визначення на два інтервали $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ і досліджуємо знак другої похідної при переході через цю точку.

Інтервал $(-\infty;0)$ – $f''(x)<0$, крива опукла; $(0;+\infty)$ – $f''(x)>0$, крива увігнута, отже $M(0;2)$ є точкою перегину функції.

## Асимптоти кривої

**Означення**. Пряма $l$ називається ***асимптотою*** кривої, якщо відстань $\delta$ від змінної точки кривої до цієї прямої прямує до нуля, коли точка $M$, рухаючись по прямій, віддаляється в нескінченність.

Розрізняють асимптоти вертикальні і невертикальні (горизонтальні і похилі).

Рівняння вертикальної асимптоти $x = x_0$, якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, тобто в точках розриву функції завжди є вертикальна асимптота.

Рівняння похилої асимптоти має вигляд

$$y = kx + b,$$

де
$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}; \; b = \lim_{x \to \infty} \left( f(x) - kx \right).$$

Рівняння горизонтальної асимптоти $y = b$.

# План дослідження функції та побудова її графіка

1. Визначаємо область допустимих значень (ОДЗ).
2. Виявляємо, чи є функція парною або непарною, періодичною тощо.
3. Знаходимо точки екстремуму та інтервали монотонності.
4. Знаходимо точки перегину та інтервали опуклості.
5. Знаходимо рівняння асимптот графіка функції (якщо вони є).

**Приклад**. Дослідити функцію $y=\dfrac{x}{1-x^2}$ та побудувати її графік.

**Розв'язок.** 1. Функція не визначена в точках $x=-1$, $x=1$. Область її визначення складається з трьох інтервалів $(-\infty;-1)\cup(-1;+1)\cup(+1;+\infty)$, а графік – з трьох гілок.

2. Функція непарна, тому що $y(-x)=\dfrac{-x}{1-(-x)^2}=-\dfrac{x}{1-x^2}=-y(x)$. Отже, графік її симетричний відносно початку координат і для побудови достатньо побудувати його в частині $x\geq 0$.

3. Функція неперіодична.

4. Точки перетину графіка з осями координат: при $x=0$ $y=0$ графік перетинає осі координат в точці $O(0;0)$.

5. Прямі $x=1$ і $x=-1$ є вертикальними асимптотами. Знайдемо похилі асимптоти:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x}{1-x^2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-x^2}=0,\ k=0 \text{ і при } x\to+\infty \text{ і при } x\to-\infty;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}[y-kx]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{1-x^2}-0\cdot x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-x^2}=0.$$

Отже, $y=0$ (вісь $Ox$) є горизонтальною асимптотою і при $x\to+\infty$, і при $x\to-\infty$.

6. Дослідимо поведінку функції в точках розриву $x=-1$ і $x=1$ та при $x \to +\infty$ і $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to -1} \frac{x}{1-x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{-1-\varepsilon}{1-(-1-\varepsilon)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{-1-\varepsilon}{1-(1+2\varepsilon+\varepsilon^2)} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{-1-\varepsilon}{-2\varepsilon-\varepsilon^2} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{-1-\varepsilon}{-\varepsilon(2+\varepsilon)} = +\infty;$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{x}{1-x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{-1+\varepsilon}{1-(-1+\varepsilon)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{-1+\varepsilon}{1-(1-2\varepsilon+\varepsilon^2)} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{-1+\varepsilon}{2\varepsilon-\varepsilon^2} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{-1+\varepsilon}{\varepsilon(2-\varepsilon)} = -\infty;$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x}{1-x^2} = +\infty; \quad \lim_{x\to 1} \frac{x}{1-x^2} = -\infty;$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x}{1-x^2} = 0; \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{1-x^2} = 0.$$

7. Знайдемо інтервали монотонності функції:

$$y' = \left(\frac{x}{1-x^2}\right)' = \frac{1(1-x^2)-x(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{x^2+1}{(1-x^2)^2}.$$

Критичні точки $x_1 = -1$, $x_2 = +1$ ($y' = \infty$).

Тоді в інтервалі:

| | | |
|---|---|---|
| $(-\infty;-1)$ | $y' > 0$ | і функція зростає; |
| $(-1;0)$ | $y' > 0$ | – функція зростає; |
| $(0;+1)$ | $y' > 0$ | – функція зростає; |
| $(+1;+\infty)$ | $y' > 0$ | – функція зростає. |

8. Дослідимо функцію на екстремум. Для цього $y' \neq 0$, тоді $y' = \infty$ і $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ – критичні точки, але вони не належать області визначення функції. Отже, функція не має екстремумів.

9. Дослідимо функцію на опуклість. Знайдемо спочатку другу похідну

$$y'' = \left[\frac{x^2+1}{(1-x^2)^2}\right]' = \frac{2x(1-x^2)^2 - (x^2+1)2(1-x^2)(-2x)}{(1-x^2)^4} = \frac{2x(x^2+3)}{(1-x^2)^3}.$$

Точки перегину графіка знайдемо серед тих, де $y''$ дорівнює нулю або не існує. Це точки $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$. Оскільки точки $x = \pm 1$ не належать області існування функції, то при $x = 0$ $y = 0$, тобто точка $O(0;0)$ є точкою перегину графіка.

За даними дослідження складаємо таблицю і побудуємо графік:

| інтервали | $-\infty$ | $(-\infty;-1)$ | $-1$ | $(-1;0)$ | $0$ | $(0;1)$ | $1$ | $(1;+\infty)$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | + | не існує | + | 0 | + | не існує | + | |
| $y''$ | | + | | - | 0 | + | | - | |
| поведін-ка функції | $\lim y = 0$ | $\nearrow$ $\cup$ | | $\nearrow$ $\cap$ | точка перетину $y=0$ | $\nearrow$ $\cup$ | | $\nearrow$ $\cap$ | $\lim y = 0$ |

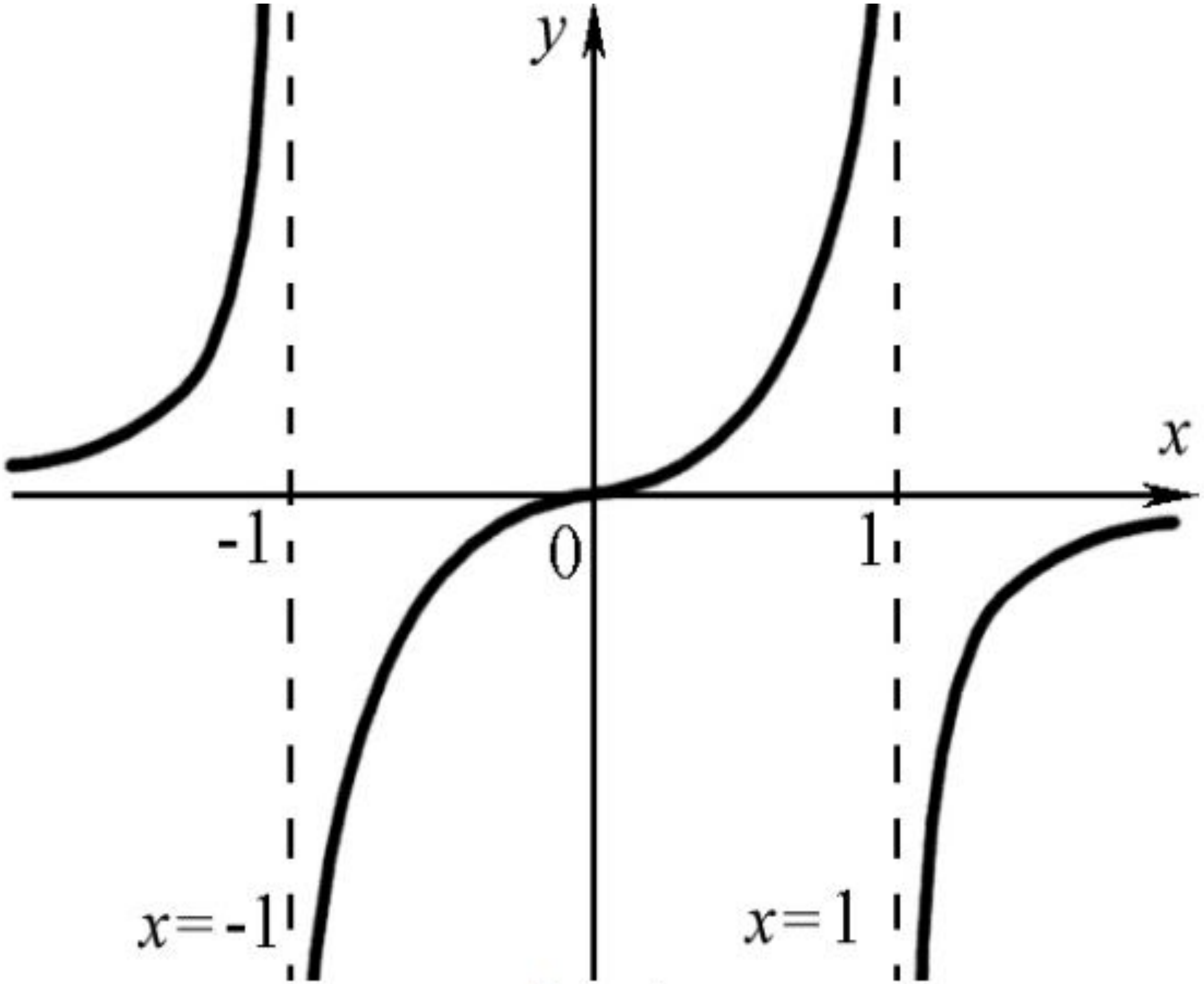


Рис.