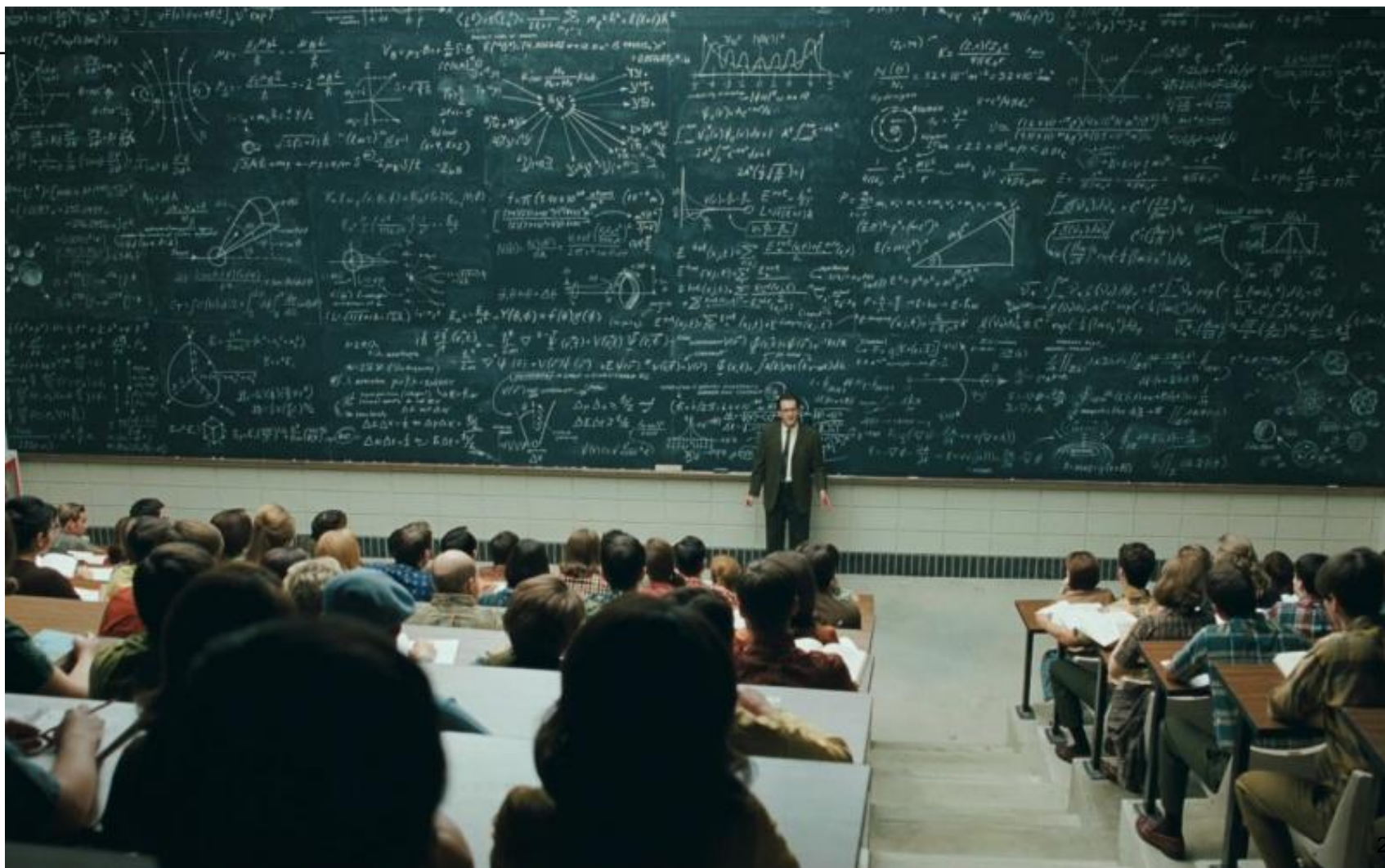


Алгебра и геометрия

for_ver@list.ru

доцент кафедры ПМИиИТ
Шапкина Вера Валерьевна

Математика...



Математика

— **совокупное название многих математических наук.**

Сначала математика возникла как одно из направлений философии в области пространственных отношений (землемеренье) и вычислений. Она была необходима для практических потребностей человека считать, вычислять, измерять, исследовать формы и движение физических тел.

Позже математика развилась в **сложную и многогранную науку об абстрактных, количественных и качественных соотношениях, формах и структурах.**

Но общепринятого определения математики нет..

Термин «математика» происходит от греческого слова μάθημα, что означает «наука, знание, изучение», и греческого μαθηματικός, что означает «любовь к познанию», в целом это приводит к более узкому и техническому (прикладному) значению «математическое исследование», которое использовалось и в античные (классические) времена. Греческое слово μαθηματική τέχνη означает **математическое искусство.**

Деление истории математики

на 4 периода:



1) **период зарождения математики как самостоятельной дисциплины – до 6-5 века до н. э.** [Евклид](#). Деталь «Афинской школы» [Рафаэля](#)

Формировались понятия целого и рационального числа, дроби, понятие расстояния, площади, объема, создавались правила действий с числами и простейшие правила для вычисления площадей фигур и объемов тел.

2) **период элементарной математики – от 6-5 в. до н. э. до середины 17 века.**

Возникла геометрия. Среди деятелей того времени ученые **древней Греции** (Фалес, Пифагор, Гиппократ Хиосский, Демокрит, Евдокс, Евклид, Архимед и проч.), **Китая** (Чжан Цан, Ген Шоу-чан, Цзу Чун-чжи и проч.), **Средней Азии** (Джемшид ибн-Масуд аль-Каши, Мухаммед бен-Муса аль Хорезми и др.), **Индии** и позже **Западной Европы** (Л. Феррари, Н. Тарталья, Дж. Кардано, С. Стевин и др.).

Историю математики

обычно делят на 4 периода

- 3) период исследования переменных величин –
середина 17 в. - Начало 20 в.

Изобретен новый метод изучения движения и изменения - дифференциальное исчисление и интегральное исчисление. Возник ряд новых математических наук - теория функций, теория дифференциальных уравнений, дифференциальная геометрия, вариационное исчисление и др. **Н.И. Лобачевский** изобрел неевклидову геометрию, **М.В. Остроградский** сделал выдающиеся открытия в механике, математическом анализе, математической физике, **П.Л. Чебышев** поспособствовал развитию нового направления в теории функций, сделал значительные открытия в теории чисел, теории вероятностей, механике, приближенном анализе.

В этот период действовали такие выдающиеся ученые, как А. М. Ляпунов, А. А. Марков (старший), Г.Ф. Вороной и многие другие.

Историю математики

обычно делят на 4 периода

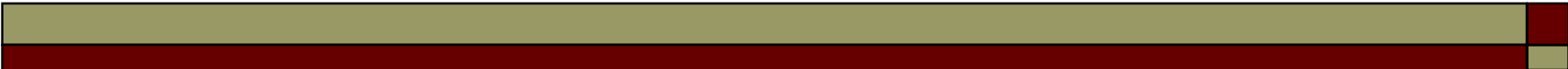
- 4) период современной математики – с начала 20 в.

Характерные особенности: сознательное и систематическое изучение ВСЕХ возможных типов количественных соотношений и пространственных форм.

В геометрии изучается уже не только трехмерное пространство, но и другие подобные ему пространственные формы. Выдающимися направлениями развития математики этого периода является функциональный анализ, теория множеств, современная алгебра, математическая логика, теория вероятностей, топология и т.д.

Владилен Панов | Современная математика и ее творцы

- **2011**
Издательство: МГТУ им. Н. Э.
Баумана
ISBN: 978-5-7038-3536-4
Жанр: математика, научно-
популярные
- <http://www.math.ru/lib/ser/msch>

- 
- Математика изучает воображаемые, идеальные объекты и соотношения между ними, используя формальный язык. В общем случае математические понятия и теоремы не обязательно имеют соответствие чему-либо в физическом мире. Главная задача прикладного раздела математики — создать математическую модель, достаточно адекватную исследуемому реальному объекту.


-
- Содержание математики можно определить как систему математических моделей и инструментов для их создания. Модель объекта учитывает не все его черты, а только самые необходимые для целей изучения (идеализированные).



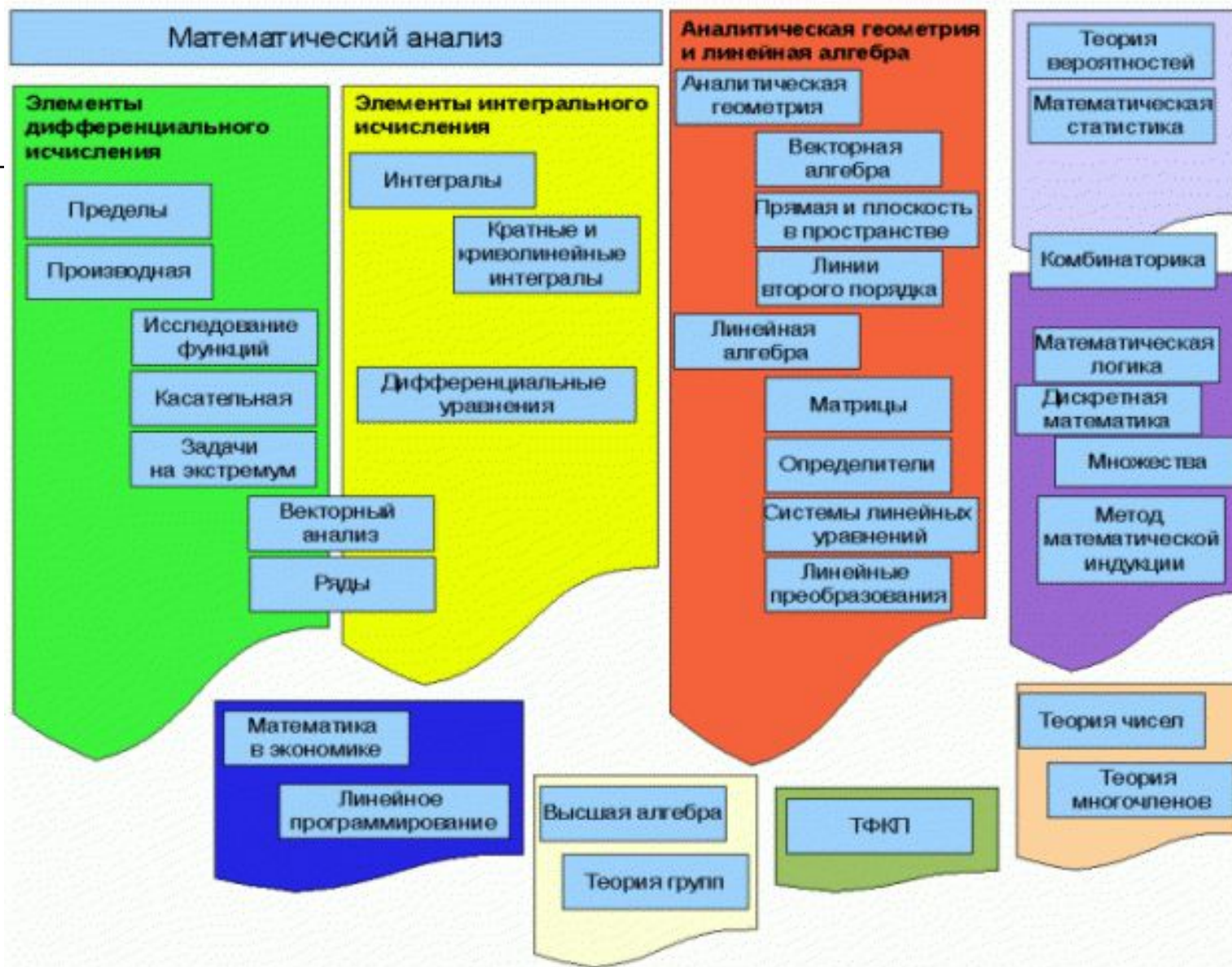
Абстракция и установление связей между объектами в самом общем виде — одно из главных направлений математического творчества.

Другое направление, наряду с абстрагированием — обобщение.

Например, обобщая понятие «пространство» до пространства n -измерений.



Изучение внутриматематических объектов, как правило, происходит при помощи **аксиоматического метода**: сначала для исследуемых объектов формулируются список основных понятий и **аксиом**, а затем из аксиом с помощью **правил вывода** получают содержательные **теоремы**, в совокупности образующие математическую модель.



Алгебра

- Предметом алгебры является изучение уравнений и ряда вопросов, которые развились из теории уравнений.
- В настоящее время, когда математика разделилась ряд специальных областей, к области алгебры относят лишь уравнения определенного типа, так называемые алгебраические уравнения.

Геометрия

- Изучает пространственные свойства предметов, оставляя в стороне все остальные их признаки.
- Например, резиновый мяч диаметром 25 см и чугунное ядро того же диаметра отличаются друг от друга массой, цветом, упругостью и т.д. Однако **форма и размеры** одинаковы. С точки зрения геометрии – каждый из этих предметов - шар диаметром 25 см.

Алгебра

Числовые множества

Натуральные числа \mathbb{N}

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ – множество натуральных чисел
- Для выполнения каких алгебраических операций достаточно этих чисел (натуральных)?
- На этом множестве можно выполнять сложение и умножение.

Пример 1

- На дорогу от дома до университета и обратно у студента уходит 30 минут на метро и 20 мин на автобусе. Сколько минут тратит он на дорогу каждую неделю, состоящую из 6 рабочих дней?

Пример 2

- Комната в студенческом общежитии имеет форму квадрата со стороной $a=3$ м. Какова ее площадь?

Целые числа Z

- $Z = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ – множество целых чисел (содержит все натуральные числа, и числа, им противоположные и нуль), $N \subset Z$;
- Для выполнения каких алгебраических операций достаточно этих чисел (целых)?
- На этом множестве можно выполнять сложение, умножение и вычитание.
- Не будь уравнений, не было бы необходимости в отрицательных числах.

Пример 3

- Из стипендии в 500 руб. студент в первый же день потратил на товарищеский ужин 200 рублей. Сколько денег у него осталось до следующей стипендии?

Пример 4

- Получив стипендию 500 руб. студент в первый же день потратил 600 руб. на цветы для своей подруги, второй же в аналогичной ситуации ограничился духами, стоившими как раз 500 рублей. Сколько денег осталось у каждого из студентов?

Рациональные числа \mathbb{Q}

- $\mathbb{Q} = \{x \mid x = p/q, \text{ где } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ – множество рациональных чисел (состоит из чисел, допускающих представление в виде простой дроби), $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$;
- Для выполнения каких алгебраических операций достаточно этих чисел (рациональных)?
- На этом множестве можно выполнять сложение, умножение, вычитание и деление.

Поскольку любое целое число можно записать в виде обыкновенной дроби, причем не единственным образом, все целые числа являются рациональными.

$$3 = \frac{3}{1}, \quad 3 = \frac{6}{2}, \quad 3 = \frac{-21}{-7} = \dots$$

Каждое рациональное число можно представить в виде бесконечной периодической дроби, пример $7/11 = 0,(63)$

Пример 5

- Пусть студент получает стипендию в размере 500 руб., магистрант – 750 руб., а аспирант – 1000 руб. Во сколько раз студент получает меньше аспиранта и магистранта?

Перепаразирурем пример 1

- На дорогу от дома до университета и обратно у студента уходит 30 минут на метро и 20 мин на автобусе. Сколько часов тратит он на дорогу каждую неделю, состоящую из 6 рабочих дней?

Запишем эти задачи в виде уравнений

Примеры	Конкретный вид	Общий вид
$30 + 20 = x$	$30 + 20 = x$	$a + b = x$
$50 * 6 = x$	$50 * 6 = x$	$a * b = x$
$500 - 200 = x$	$200 + x = 500$	$a + x = b$
$500 - 600 = x$	$600 + x = 500$	
$500 - 500 = x$	$500 + x = 500$	
$1000 / 500 = x$	$500 * x = 1\ 000$	$a * x = b$
$750 / 500 = x$	$500 * x = 750$	

Действительные числа \mathbf{R}

- $\mathbf{R} = (-\infty; +\infty)$ – множество действительных чисел, $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ (кроме всех рациональных чисел, содержит иррациональные числа). Действительные числа изображаются точками координатной прямой (числовой оси).

Например, эти числа являются иррациональными.

$$\sqrt{2} = 1,4142136... \quad \lg 5 = 0.6989700..., \quad \pi = 3,1415926535..., \quad e = 2,78281828459...$$

- Вспомним, что возведение в степень имеет две обратных операции: **извлечение корня и логарифмирование.**

Степени числа a

- Степенью с **натуральным** показателем n ($n > 1$) называется произведение n множителей, каждый из которых равен a ,

$$\text{то есть } a^n = a * a * \dots * a$$

- Степень с **целым** показателем

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = 1/a^n, \text{ где } a \neq 0, n \in \mathbf{N}, a^0 = 1$$

- Степень с **рациональным** показателем

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \text{ где } m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}, n \geq 0$$

Логарифм

- Степенью с **натуральным** показателем **n ($n > 1$)** называется произведение n множителей, каждый из которых равен **a** ,

$$\text{то есть } a^n = a * a * \dots * a$$

- Степень с **целым** показателем

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = 1/a^n, \text{ где } a \neq 0, n \in \mathbf{N}, a^0 = 1$$

- Степень с **рациональным** показателем

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \text{ где } m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}, n > 0$$

Пример 6

Соотношение $3^2 = 9$ позволяет написать три

уравнения: $3^2 = x$; $x^2 = 9$; $3^x = 9$

1. Неизвестна **степень** – решается уравнение умножением $x = 3^2 = 3 * 3 = 9$
2. Неизвестно **основание** степени – извлечением квадратного корня $x = \sqrt{9} = 3$
3. **Показатель** степени – логарифмированием числа 9 по основанию 3: $x = \log_3 9 = 2$

Пример 6

Но аналогичные уравнения: $x^2 = 2$; $2^x = 3$

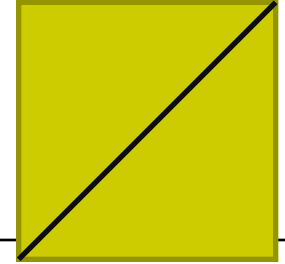
Формальная запись результатов

1. Неизвестно **основание** степени – извлечением квадратного корня $x = \sqrt{2}$
2. Неизвестен **показатель** степени – логарифмированием числа 3 по основанию 2: $x = \log_2 3$
Смысла не имеет на множестве рациональных чисел \mathbb{Q} .



Посмотрим на геометрические задачи

Пример 7



- Диагональ квадрата со стороной a удовлетворяет по теореме Пифагора, уравнению $x^2 = 2 * a^2$ (Почему?)
- Поэтому при $a=1$ приходим к уравнению $x^2 = 2$

Пример 8

Площадь S квадрата со стороной a находится по формуле $S = a^2$. Какова сторона x квадрата, площадь S которого равна 2?

Имеем $x^2 = 2$


-
- Из геометрических соображений заключаем, что «в природе» должно быть число, удовлетворяющее уравнению $x^2 = 2$

Это число называется **иррациональным**.

- Также **иррациональны** корни уравнений $x^2 = 3$; $x^3 = 5$ и т.п. Эти иррациональные числа называются **алгебраическими**.

-
- Корень уравнения $2^x = 3$, обозначаемый $x = \log_2 3$, также является иррациональным числом. Это число и аналогичные ему иррациональные корни уравнений $2^x = 5$; $3^x = 4$ и т.д. называются **трансцендентными** числами. Число π тоже является **трансцендентным**. $\pi \notin \mathbb{R}$

-
- Существует бесконечное множество трансцендентных чисел, их появление связано с операцией предельного перехода, которая в курсе **Элементарной математики** фактически не изучается.



Эти термины происходят от греческих корней:
«рациональное» - разумно обоснованное,
«иррациональное» - то есть нерациональное,
недоступно пониманию,
«трансцендентное» - выходящее за пределы
сознания.

Основные числовые множества:

- $\mathbf{N}=\{1,2,3,4,\dots\}$ – множество натуральных чисел;
- $\mathbf{Z}=\{\dots,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,\dots\}$ – множество целых чисел (содержит все натуральные числа и числа, им противоположные), $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$;
- $\mathbf{Q}=\{x \mid x = p/q, \text{ где } p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}\}$ – множество рациональных чисел (состоит из чисел, допускающих представление в виде дроби), $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$;
- $\mathbf{R}=(-\infty;+\infty)$ – множество действительных чисел, $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ (кроме всех рациональных чисел, содержит иррациональные числа). Действительные числа изображаются точками координатной прямой (числовой оси).

–Поскольку любое целое число можно записать в виде обыкновенной дроби, причем не единственным образом, все целые числа являются рациональными.

$$3 = \frac{3}{1}, \quad 3 = \frac{6}{2}, \quad 3 = \frac{-21}{-7} = \dots$$

-А, например, эти числа являются иррациональными.

$$\sqrt{2} = 1,4142136\dots \quad \lg 5 = 0,6989700\dots, \quad \pi = 3,1415926535\dots, \quad e = 2,78281828459\dots$$

Логарифм 5 по основанию 10 это $10^{0,6989700\dots} = 5$

Уравнения

- Уравнением называется равенство, содержащее, по крайней мере, одно неизвестное (обычно обозначаемое x).
- Известные в задаче величины обычно обозначают начальными буквами латинского алфавита a, b, c, \dots
- Уравнение называется линейным, если оно содержит неизвестное только в первой степени.

$$ax=b \text{ или } ax-b=0, \text{ где } a, b \in \mathbb{R}$$

- Решить уравнение – найти все его решения (корни) или показать, что данное уравнение корней не имеет.

Линейные уравнения с одним неизвестным

$ax=b$, где $a, b \in \mathbb{R}$

1. Если $a \neq 0$, то $x=b/a$ будет единственным решением уравнения.
2. Если $a=0$, то имеем уравнение $0 \cdot x=b$.

Сделаем предположения относительно b .

А) Если $b=0$, то решением уравнения $0 \cdot x=b$ будет любое действительное число. Это уравнение имеет **бесконечное множество решений**.

Б) Если $b \neq 0$, то $0 \cdot x=b$ не имеет решений, так как ему не удовлетворяет ни одно действительное число.

Например, уравнение $0 \cdot x=5$ решений не имеет.

$$0 \neq 5$$

Алгебраическое линейное уравнение (АЛУ) с одним неизвестным $ax=b$ может **усложняться** по двум направлениям.

1) Сохраняя одно неизвестное X , переходят к **нелинейным** уравнениям второй, третьей или более высокой (натуральной) степени относительно X .

Квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$, где $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

2) Увеличивают число неизвестных и число уравнений, сохраняя при этом линейность относительно каждого неизвестного, т.е. переходят к **системам линейных уравнений (СЛУ)** с двумя и более неизвестными.