

# Задачи по гидростатике

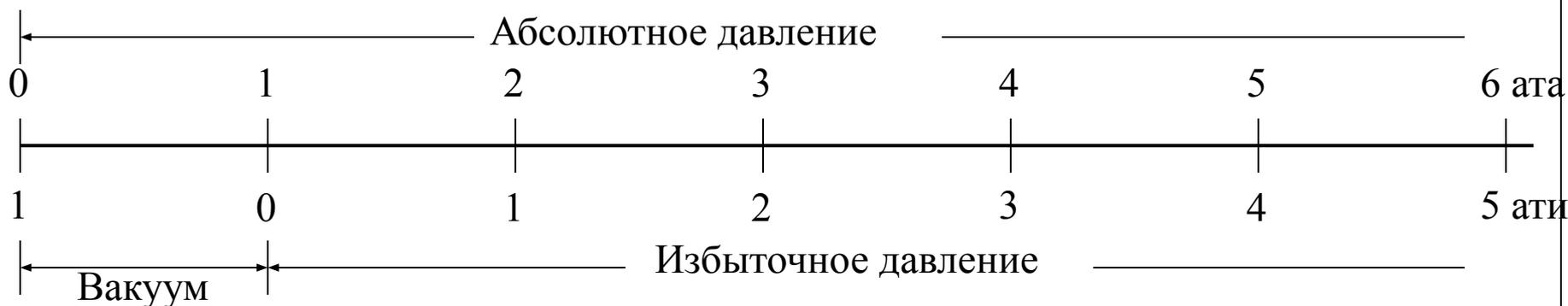
# Давление в точке

Для несжимаемой жидкости давление в точке равно:  $p = p_0 + \rho gh$

Где  $p_0$  - давление на поверхности жидкости;  $\rho gh$  – давление столба жидкости высотой  $h$ .

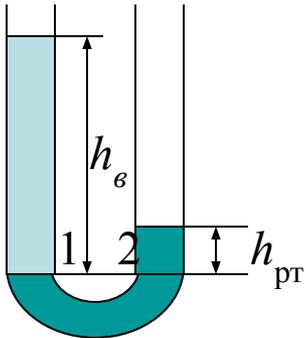
Различают абсолютное и избыточное давления. Абсолютное давление изменяется от нуля и может быть сколь угодно большим. Избыточное или манометрическое давление показывает превышение давления над атмосферным давлением

Поскольку давление может быть и меньше атмосферного, то недостаток давления до атмосферного называют вакуумом или вакуумметрическим давлением.



# Задача 1

В U-образный сосуд налиты ртуть и вода. Линия раздела жидкостей расположена ниже свободной поверхности ртути на  $h_{рт} = 8$  см. Определить разность уровней  $h$  в обеих частях сосуда.



Дано

$$h_{рт} = 8 \text{ см}$$

$$\rho_{в} = 1000 \text{ кг/м}^3$$

$$\rho_{рт} = 13600 \text{ кг/м}^3$$

$h = ?$

$$p_1 = p_2 \quad p_1 = p_0 + \rho_{в} g h_{в}$$

$$p_2 = p_0 + \rho_{рт} g h_{рт}$$

$$p_0 + \rho_{в} g h_{в} = p_0 + \rho_{рт} g h_{рт}$$

Сократив на  $p_0$  и решая относительно  $h_{в}$ , получим:

$$h_{в} = h_{рт} \frac{\rho_{рт}}{\rho_{в}}$$

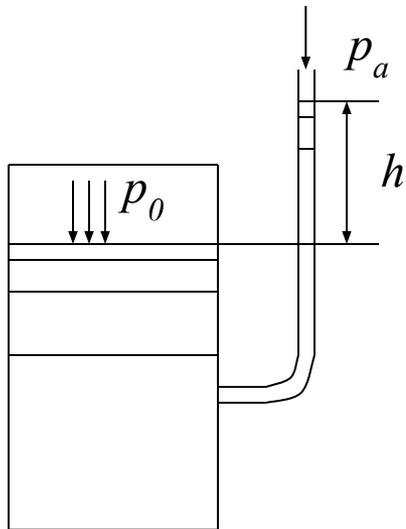
Искомая разность уровней равна

$$h = h_{в} - h_{рт}$$

$$h = h_{рт} \frac{\rho_{рт}}{\rho_{в}} - h_{рт} = 8 \text{ м} \frac{13600}{1000} - 8 = 100,8$$

# Задача 2

Найти абсолютное и избыточное давление на свободной поверхности жидкости в закрытом сосуде с бензином, если уровень жидкости в открытом пьезометре выше уровня жидкости в резервуаре на  $h=2$  м, а атмосферное давление  $p_a=100$  кПа.



Дано

$$h=2 \text{ м}$$

$$\rho=750 \text{ кг/м}^3$$

$$p_a=100 \text{ кПа}$$

$$p_0=?$$

В точках, лежащих на одной горизонтальной плоскости, давление одинаково, откуда:

Абсолютное давление

$$p_0 = p_a + \rho gh = 100000 + 750 \cdot 9,81 \cdot 2 =$$

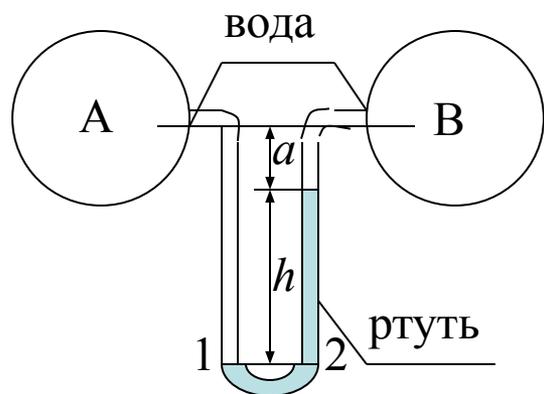
$$\mathbf{174700 \text{ Па}}$$

Избыточное давление

$$p_0 = \rho gh = 750 \cdot 9,81 \cdot 2 = 14700$$

# Задача 3

Определить разность давлений в резервуарах А и В, заполненных водой, если показание дифференциального водортутного манометра  $h$  равно 100 мм



Дано

$$h_{рт} = 100 \text{ мм} = 0,1 \text{ м}$$

$$\rho_{в} = 1000 \text{ кг/м}^3$$

$$\rho_{рт} = 13600 \text{ кг/м}^3$$

$$p_1 = p_A + \rho_{в} g (a + h)$$

$$p_2 = p_B + \rho_{в} g a + \rho_{рт} g h$$

$$p_1 = p_2$$

$\Delta p = ?$

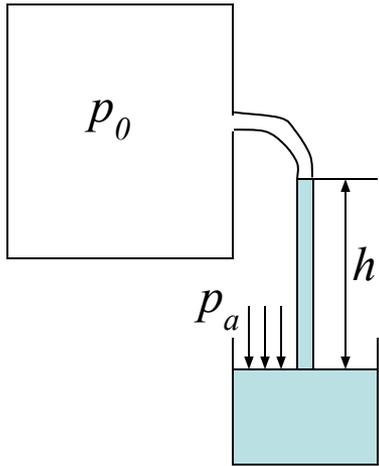
$$p_A + \rho_{в} g (a + h) = p_B + \rho_{в} g a + \rho_{рт} g h$$

$$p_A - p_B = \rho_{рт} g h - \rho_{в} g h = h g (\rho_{рт} - \rho_{в})$$

$$p_A - p_B = h g (\rho_{рт} - \rho_{в}) = 0,1 \cdot 9,81 (13600 - 1000) = 12360$$

# Задача 4

К резервуару, заполненному газом давлением  $p_0$ , присоединена трубка, опущенная в сосуд с ртутью. Определить давление в резервуаре, если ртуть поднялась в трубке на высоту  $h=23$  см.



Дано

$$h=23 \text{ см}$$

$$\rho_{\text{рт}}=13600 \text{ кг/м}^3$$

$$p_a=98,1 \text{ кПа}$$

---

$$p_0=?$$

$$p_a = p_0 + \rho_{\text{рт}} gh$$

$$p_0 = p_a - \rho_{\text{рт}} gh$$

$$p_0 = 98100 - 13600 \cdot 9,8 \cdot 0,23 = 67400$$

# Задачи на дом

Определить абсолютное и избыточное давление на дно сосуда, если глубина воды в нем  $h=4$  м, абсолютное давление на поверхности воды  $p_0=175$  кПа, а атмосферное давление  $p_a=98,1$  кПа.

К резервуару, заполненному газом давлением  $p_0$  (рис.1), присоединена трубка, опущенная в сосуд с ртутью. Определить высоту  $h$  на которую ртуть поднялась в трубке, если давление в резервуаре  $p_0=32$  кПа, а атмосферное давление равно  $p_a=98,1$  кПа.

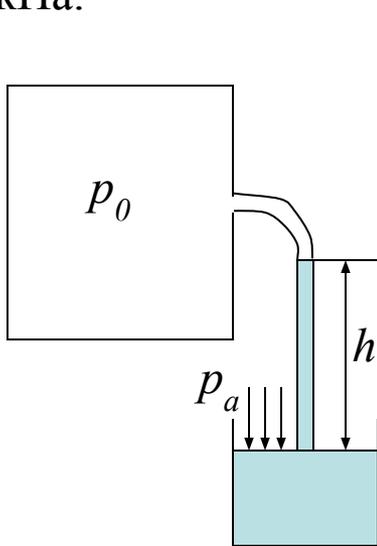


Рис. 1

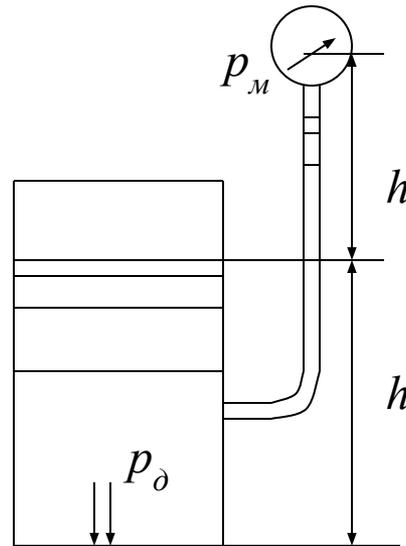


Рис. 2

Пружинный манометр подключен к сосуду глубина воды в котором  $h=1,5$  м (рис. 2). Центр манометра находится выше уровня воды на высоте  $h_1=0,75$  м. Определить избыточное давление на дно сосуда, если манометр показывает  $p_m=160$  кПа.

# Сила давления на плоские поверхности

$F = (p_0 + \rho g h_c) S$   
 $l_d = l_c + \frac{\rho g \sin \alpha I_c}{(p_0 + \rho g l_c \sin \alpha) S}$

Для открытых сосудов,  $p_0 = 0$

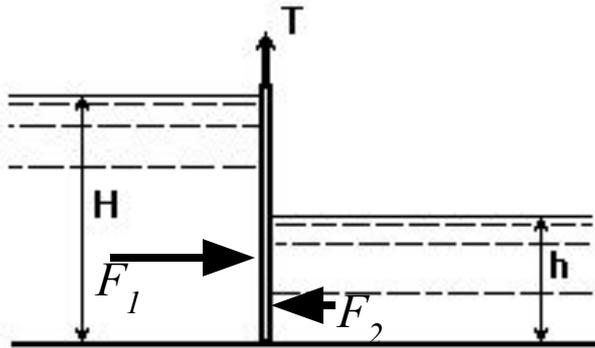
$F = \rho g h_c S$   
 $l_d = l_c + \frac{I_c}{l_c S}$   
 $h_d = h_c + \frac{I_c}{h_c S}$

$h = l \sin \alpha; h_c = l_c \sin \alpha; h_d = l_d \sin \alpha$

Для вертикальной стенки

# Задача 5

Прямоугольный вертикальный щит шириной  $b = 4.0$  м находится в пазах. Вес щита  $G = 4.9$  кН, коэффициент трения щита в пазах  $f = 0.5$ . Определить усилие  $T$ , необходимое для подъема щита, если уровни воды составляют:  $H = 3$  м,  $h = 1$  м.



Дано  $b = 4,0$  м  
 $G = 4,9$  кН  
 $f = 0,5$   
 $H = 3$  м  
 $h = 1$  м

$T = ?$

$$F = \rho g h_c S$$

$$h_{c1} = \frac{H}{2}; S_1 = bH \quad h_{c2} = \frac{h}{2}; S_2 = bh$$

$$F_1 = \rho g h_{c1} S_1 = \rho g \frac{bH^2}{2}$$

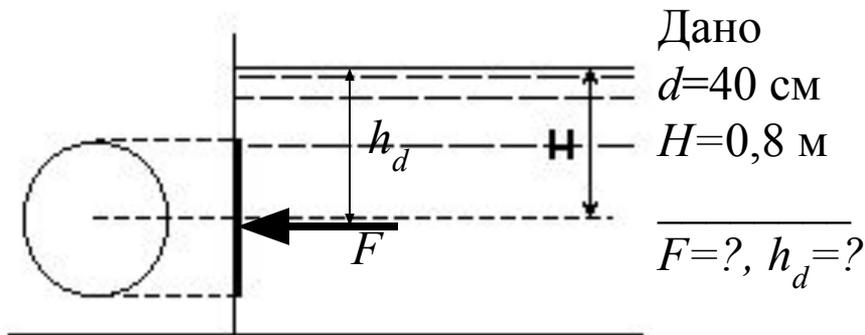
$$F_2 = \rho g h_{c2} S_2 = \rho g \frac{bh^2}{2}$$

$$F = \rho g \frac{b}{2} (H^2 - h^2) \quad T = G + f \cdot F = G + f \rho g \frac{b}{2} (H^2 - h^2)$$

$$T = 4900 + 0,5 \cdot 1000 \cdot 9,81 \cdot \frac{4}{2} \cdot (3^2 - 1^2) = 83380$$

# Задача 6

Круглое отверстие в вертикальной стенке резервуара, диаметром  $d = 40$  см, перекрыто плоским клапаном. Найти величину и точку приложения силы, прижимающей клапан к стенке, если центр отверстия расположен ниже свободной поверхности воды на  $H = 0.8$  м.



$$F = \rho g h_c S$$

$$h_d = h_c + \frac{I_c}{h_c S}$$

$$h_c = H; S = \pi \frac{d^2}{4}$$

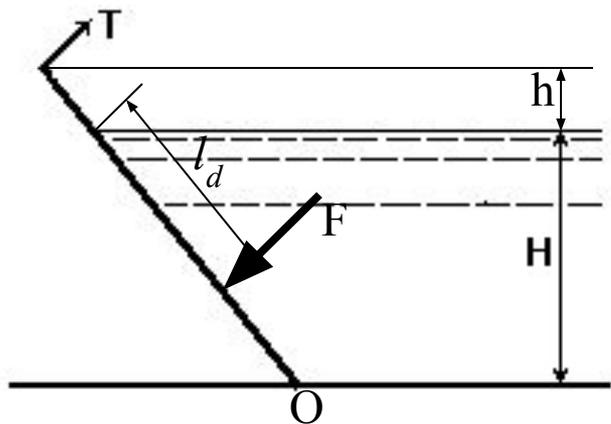
$$I_c = \frac{\pi d^4}{64}$$

$$F = \rho g H \pi \frac{d^2}{4} = 1000 \cdot 9,81 \cdot 0,8 \cdot 3,14 \cdot \frac{0,4^2}{4} = 986 \text{ Н}$$

$$h_d = H + \frac{4\pi d^4}{64 H \pi d^2} = H + \frac{d^2}{16 H} = 0,8 + \frac{0,4^2}{16 \cdot 0,8} = 0.813$$

# Задача 7

Определить натяжение троса  $T$ , удерживающего щит шириной  $b = 2$  м при глубине воды  $H = 1.8$  м, если угол наклона щита  $\alpha = 60^\circ$ . Весом щита пренебречь, точка приложения троса расположена на высоте  $h = 0,7$  м выше поверхности воды



$$F = \rho g h_c S \quad h_c = \frac{H}{2}; \quad S = \frac{bH}{\sin \alpha}$$

$$F = \rho g \frac{bH^2}{2 \sin \alpha} = 1000 \cdot 9,81 \frac{2 \cdot 1,8^2}{2 \cdot 0,866} = 36700$$

$$l_d = l_c + \frac{I_c}{l_c S} \quad l_c = \frac{h_c}{\sin \alpha} = \frac{H}{2 \sin \alpha}; \quad I_c = \frac{bH^3}{12 \sin^3 \alpha}$$

$$l_d = \frac{H}{2 \sin \alpha} + \frac{bH^3 2 \sin^2 \alpha}{12 \sin^3 \alpha bH^2} = \frac{2H}{3 \sin \alpha}$$

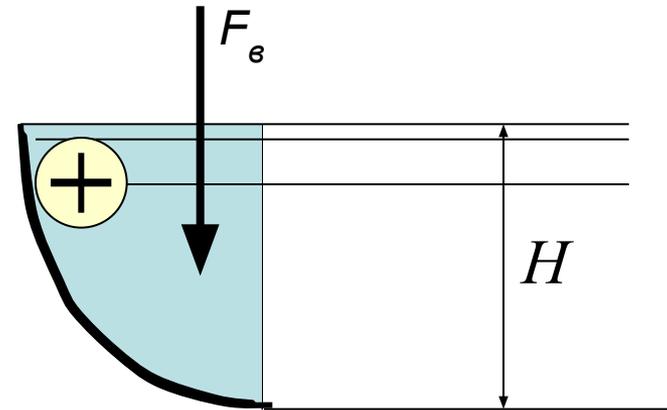
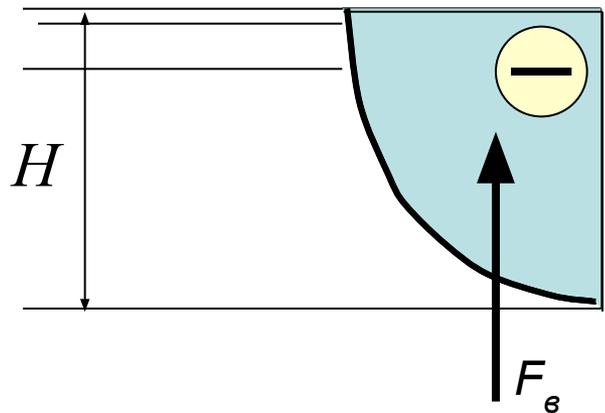
$$\frac{T(H+h)}{\sin \alpha} = F \left( \frac{H}{\sin \alpha} - l_d \right)$$

$$l_d = \frac{2 \cdot 1,8}{3 \cdot 0,866} = 1,386$$

$$T = F \left( \frac{H}{\sin \alpha} - l_d \right) \frac{\sin \alpha}{H+h} = 36700 \cdot \left( \frac{1,8}{0,866} - 1,386 \right) \frac{0,866}{1,8+0,7} = 8804$$

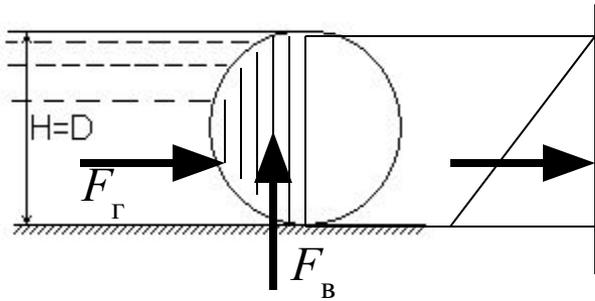
# Сила давления на криволинейные поверхности

$$F = \sqrt{F_z^2 + F_x^2} \quad F_z = \rho g h_c S_x \quad F_x = \rho g W$$



# Задача 8

Определить силу давления воды на 1 м ширины вальцевого затвора диаметром  $D = 1,5$  м



$$F = \sqrt{F_2^2 + F_6^2} \quad F_2 = \rho g h_c S_6$$

$$h_c = \frac{H}{2}; \quad S = bH \quad F_2 = \rho g \frac{bH^2}{2}$$

Дано  
 $b=1$  м  
 $D=1,5$  м  
 $F=?$

$$F_2 = \rho g \frac{bH^2}{2} = 1000 \cdot 9,81 \cdot \frac{1 \cdot 1,5^2}{2} = 11040H$$

$$F_6 = \rho g W = \rho g b \frac{\pi D^2}{4 \cdot 2} = 1000 \cdot 9,81 \cdot 1 \cdot \frac{3,14 \cdot 1,5^2}{8} = 8662$$

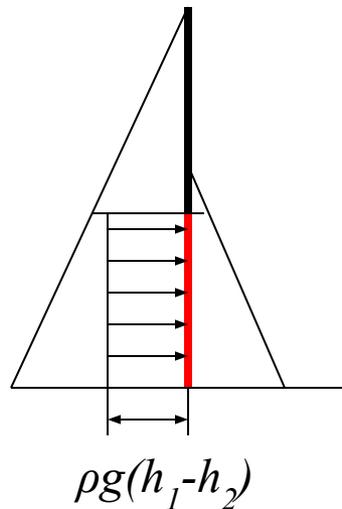
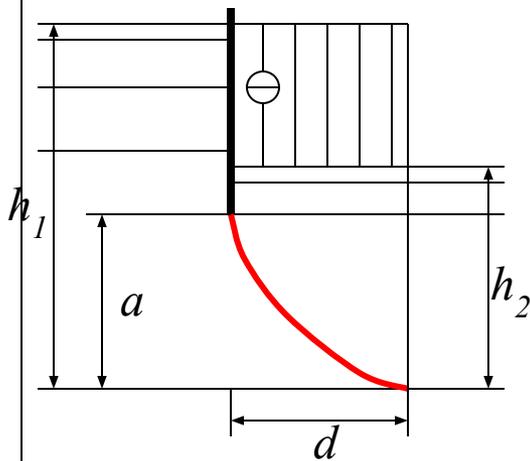
$$H = \sqrt{11040^2 + 8662,5^2} = 14033$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_6}{F_2} = \frac{8662}{11040} = 0,785$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}(0,785) = 38,1^\circ$$

# Задача 9

Определить силу давления воды на затвор, перекрывающий отверстие в канале высотой  $a = 2$  м, между двумя смежными камерами, если глубины воды  $h_1 = 5$  м,  $h_2 = 2,5$  м, ширина затвора  $b = 4$  м, его откос  $d = 1$  м



Дано

$$h_1 = 5 \text{ м}$$

$$h_2 = 2,5 \text{ м}$$

$$a = 2 \text{ м}$$

$$d = 1 \text{ м}$$

$$b = 4 \text{ м}$$

$$F = ?$$

$$F_{r1} = \rho g \left( h_1 - \frac{a}{2} \right) ba$$

$$F_{r2} = \rho g \left( h_2 - \frac{a}{2} \right) ba$$

$$F_r = F_{r1} - F_{r2} = \rho g b a (h_1 - h_2) = 1000 \cdot 9,81 \cdot 4 \cdot 2 (5 - 2,5) = 196200$$

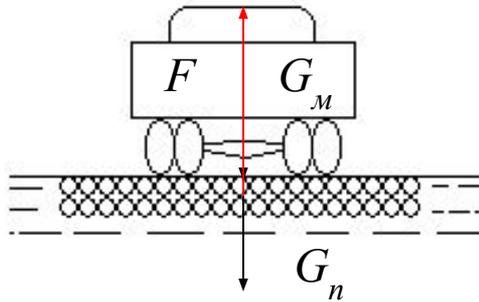
$$F_B = \rho g W = \rho g d (h_1 - h_2) b = 1000 \cdot 9,81 \cdot 1 (5 - 2,5) 4 = 98100$$

$$F = \sqrt{F_r^2 - F_B^2} = \sqrt{196200^2 - 98100^2} = 219400$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_B}{F_r} = \frac{98100}{196200} = 0,5; \quad \alpha = \operatorname{arctg}(0,5) = 26,5^\circ$$

# Задача 10

Определить сколько бревен диаметром  $d = 20$  см и длиной  $l = 10$  м необходимо для перевозки машины массой  $M = 7000$  кг



Дано  $d$   
 $= 20$  см  $l$   
 $= 10$  м  $M$   
 $= 7000$  кг  $\rho_d =$   
 $650$  кг/м<sup>3</sup>  $\rho_b =$   
 $\underline{1000}$  кг/м<sup>3</sup>  
 $n = ?$

$$F > G_M + G_n$$

$$G_M = gM$$

$$G_n = \rho_b g \frac{\pi d^2}{4} l$$

$$F_b = \rho_b g \frac{\pi d^2}{4} l$$

$$F = nF_b; \quad G_n = nG$$

$$n = \frac{G_M}{F_b - G_n} = \frac{gM}{g \frac{\pi d^2}{4} l (\rho_b - \rho_d)} = \frac{9,81 \cdot 7000}{9,81 \frac{3,14 \cdot 0,2^2 \cdot 10}{4} (1000 - 650)} = \underline{69} = 64$$

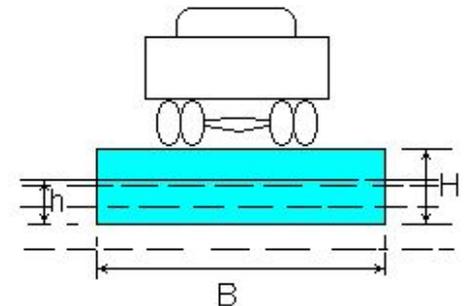
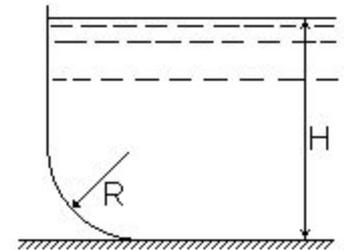
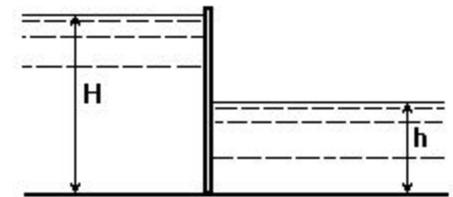
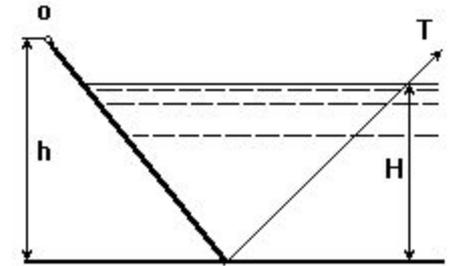
# Задачи на дом

1. Прямоугольный щит шириной  $b = 5$  м закреплен шарнирно в точке  $O$ . (рис.1) Определить усилие  $T$ , необходимое для подъема щита, если  $h = 4.0$  м,  $H = 1.9$  м, угол наклона щита к горизонту -  $60^\circ$ .

2. Найти величину и точку приложения силы гидростатического давления на вертикальный щит шириной  $b=3,5$  м, если вода с одной стороны  $H=2,4$  м, с другой стороны  $h=0,8$  м

3. Определить силу давления воды на криволинейную часть резервуара, представляющую собой четверть кругового цилиндра, радиусом  $R=1,4$  м, протяженностью  $b=3$  м, если глубина воды  $H=5,0$  м.

4. Прямоугольный понтон размером  $L*B*H = 5.5*2.5*2.2$  м и массой  $M = 4200$  кг находится в воде. Определить грузоподъемность понтона при осадке  $h = 1.8$  м.



# Уравнение Бернулли

Для невязкой жидкости

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} = const$$

Для вязкой жидкости

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + h_c = const$$

Пьезометрическая линия

$$z + \frac{p}{\rho g}$$

Напорная линия

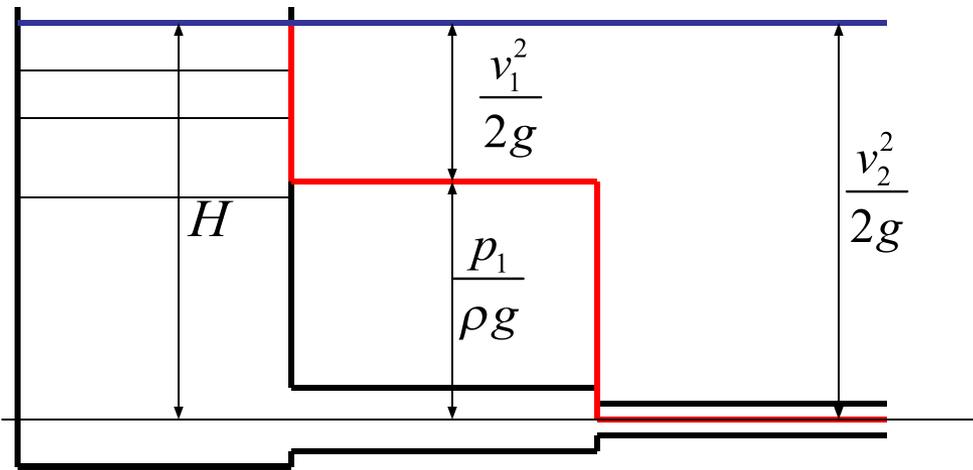
$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g}$$

Линия полного гидродинамического напора

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + h_c$$

# Задача 11

Построить для заданной схемы пьезометрическую и напорную линии для невязкой жидкости



$$d_1 > d_2$$

$$v_1 < v_2$$

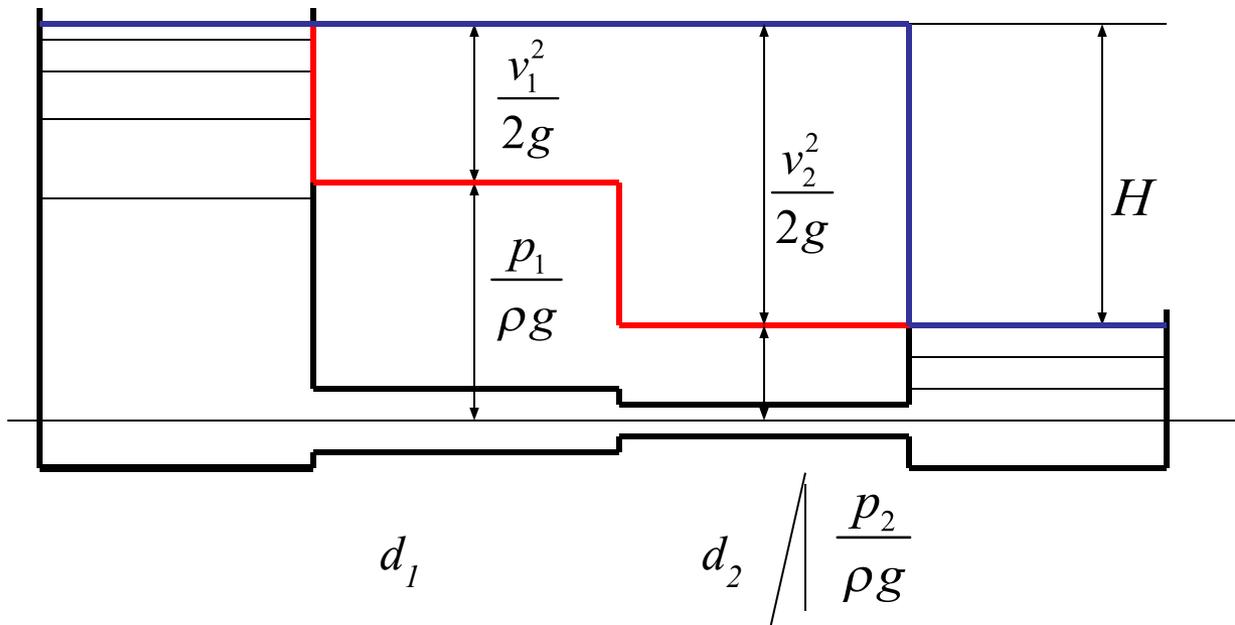
$$\frac{v_1^2}{2g} < \frac{v_2^2}{2g}$$

$$\overline{p_2} = 0$$

- $d_1$                        $d_2$   
—      Напорная линия  
—      Пьезометрическая линия

# Задача 12

Построить для заданной схемы пьезометрическую и напорную линии для невязкой жидкости



$$d_1 > d_2$$

$$v_1 < v_2$$

$$\frac{v_1^2}{2g} < \frac{v_2^2}{2g}$$



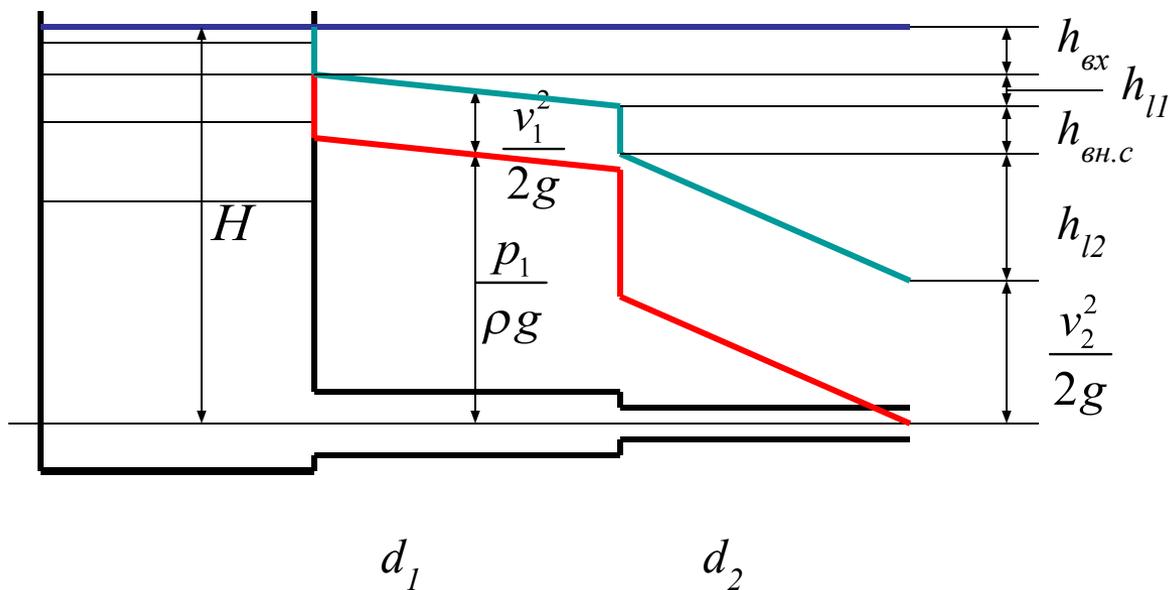
Напорная линия



Пьезометрическая линия

# Задача 13

Построить для заданной схемы пьезометрическую и напорную линии для вязкой жидкости



$$d_1 > d_2$$

$$v_1 < v_2$$

$$\frac{v_1^2}{2g} < \frac{v_2^2}{2g}$$

$$2g < 2g$$

$$h_l = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}; \quad I = \frac{\lambda}{d} \frac{v^2}{2g}$$

$$I_1 < I_2$$



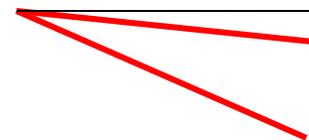
Пьезометрическая линия



Напорная линия

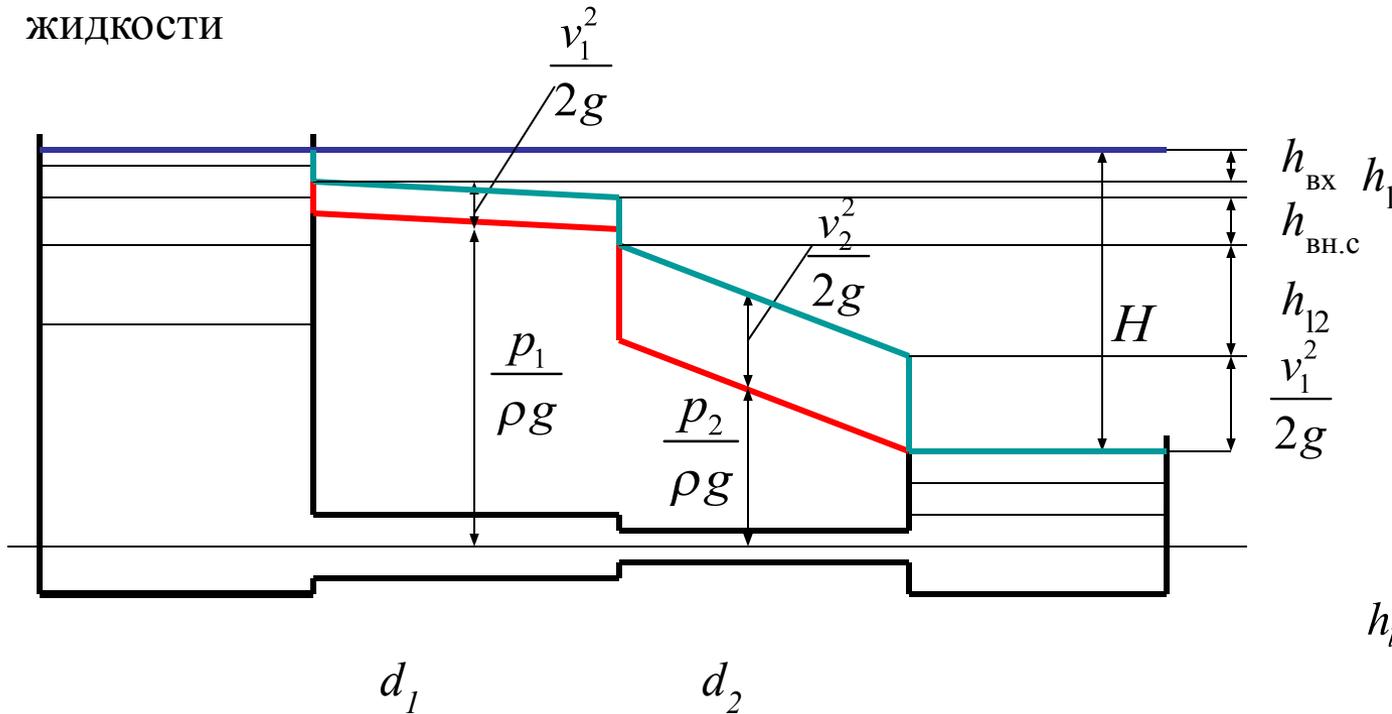


Линия полного гидродинамического напора



# Задача 14

Построить для заданной схемы пьезометрическую и напорную линии для вязкой жидкости



$$d_1 > d_2$$

$$v_1 < v_2$$

$$\frac{v_1^2}{2g} < \frac{v_2^2}{2g}$$

$$h_l = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}; \quad I = \frac{\lambda}{d} \frac{v^2}{2g}$$

$$I_1 < I_2$$

- Пьезометрическая линия
- Напорная линия
- Линия полного гидродинамического напора

# Задание на дом

Придумать схемы движения жидкости (не менее 2-х участков) с истечением в атмосферу и под уровень, и построить для них пьезометрические и напорные линии для невязкой и вязкой жидкостей.