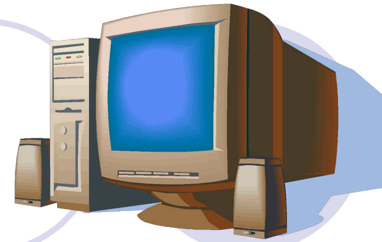
И Н Ф О Р М А Т И К А



Лекция № 3. “Логические основы ЭВМ.”

End

1. Основы теории двоичных функций.

- В основе алгебры логики лежат понятия *зависимой* и *независимой* переменных (т.е. функции и аргумента).
- Их отличие от соответствующих понятий обычной алгебры в том, что они могут принимать всего лишь два значения: 0 (ложь) и 1 (истина).
- Такие переменные получили название *двоичных переменных*.

Пусть $X_1, X_2, \dots, X_N$ – двоичные аргументы, т.е. $X_i \in \{0,1\}$. Тогда, функция

$$\mathbf{Y = f(X_1, X_2, \dots , X_N)} ,$$

является двоичной функцией N двоичных аргументов и может принимать только два значения $Y \in \{0,1\}$ при любых значениях двоичных аргументов.

Способы представления двоичных функций

В виде формул

В виде таблиц истинности

- **Значение функции должно быть задано на всех возможных наборах значений N двоичных аргументов.**
- **Число таких наборов равно 2^N, т.к. так как каждый из N аргументов может иметь всего лишь два значения $X_i \in \{0,1\}$.**
- **Количество всех возможных функций N двоичных аргументов будет $(2)^{2N}$.**

Рассмотрим функции $Y=f(X_1)$ одного двоичного аргумента X_1

- **Любая из этих функций должна быть определена на двух наборах двоичного аргумента ($2^N=2^1=2$).**
- **Существует всего четыре такие функции ($2^{2N}= 2^{21} = 2^2=4$), которые можно представить таблицами истинности:**

X	Y_0	Y_1	Y2	Y_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

- **Функция, которая принимает нулевое значение при всех значениях аргумента, называется *константой нуля* (читается – "Y_0 тождественна 0").** $Y_0 = 0$

- **Функция, значения которой совпадают со значения аргумента при всех его значениях, называется *тавтологией* или *повторением* ("Y_1 тождественна X").** $Y_1 = X$

- **Функция, значения которой противоположны значениям аргумента, называется *инверсией* или *отрицанием* ("Y_2 тождественна не X").** $Y_2 = \overline{X}$

- **Функция, которая принимает единичное значение при всех значениях аргумента, называется *константой единицы* ("Y_3 тождественна 1").** $Y_3 = 1$

2. *Двоичные функции двух аргументов*.

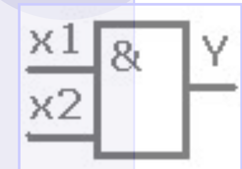
- Рассмотрим функции $Y = f(X_1, X_2)$ двух двоичных аргументов (т.е. N=2).
- Всего может быть16 таких функций ($2^{2N}= 2^{22} = 2^4$).
- Каждая из них должна быть определена на четырех ($2^2 = 4$) наборах двоичных аргументов.
- Среди всех возможных функций рассмотрим три, имеющих большое значение в алгебре логики.
- Таблицы истинности для них будут иметь вид:

X_1	X_2	Y_1	Y_7	Y_{10}	Y_{12}
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1
1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	0	0

Базовые функции алгебры логики:

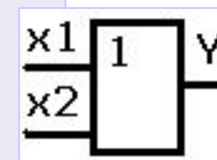
Функция *конъюнкция* $Y_1 = X_1 \& X_2 = X_1 \cdot X_2$.

- **Соответствует операции логического умножения (”AND”).**
- **Является истинной (т.е. принимает значение 1), когда все аргументы принимают единичное значение.**
- **В средствах ВТ реализуется автоматом ”И”.**



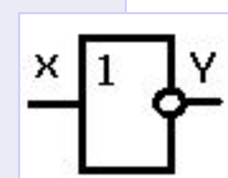
Функция *дизъюнкция* $Y_7 = X_1 \vee X_2$.

- **Соответствует операции логического сложения (”OR”).**
- **Является истинной (т.е. принимает значение 1), когда хотя бы один из аргументов принимает единичное значение.**
- **В средствах ВТ реализуется автоматом ”ИЛИ”.**



Функция *инверсия* $Y_{10} = \overline{X_2}$ и $Y_{12} = \overline{X_1}$.

- **Соответствует операции логического отрицания (”NOT”).**
- **Если ”И” и ”ИЛИ” могут выполняться над любым (N>1) числом аргументов, то данная операция выполняется всегда над одним аргументом.**
- **Всегда принимает значение противоположное значению аргумента.**
- **В средствах ВТ реализуется автоматом ”НЕ”**



0

- Среди множества двоичных функций есть такие, которые принимают значение единицы только на одном наборе аргументов.
- Такие функции получили название *<u>конституент единицы</u>* и для N=2 представлены в таблице истинности:

X_1	X_2	Y_1	Y_2	Y_4	Y_8
0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0

***<u>Правила записи</u>* конституент единицы:**

- **Выбирается строка, а которой функция принимает значение 1.**
- **Записывается конъюнкция всех аргументов.**
- **Над аргументами конъюнкции, которые в данной строке имеют нулевые значения, выполняется еще u операция отрицания.**

$$Y_1 = X_1 \cdot X_2,$$

$$Y_2 = X_1 \cdot \overline{X_2},$$

$$Y_4 = \overline{X_1} \cdot X_2,$$

$$Y_8 = \overline{X_1} \cdot \overline{X_2}.$$

- Записать любую двоичную функцию, заданную таблицей истинности можно в виде <u>*совершенной дизъюнктивной нормальной формы*</u> (СДНФ).
- СДНФ – это дизъюнкция конституент единицы, записанная для тех наборов двоичных аргументов, на которых функция принимает единичное значение.

Пример 1. **Записать в виде формулы функцию, заданную таблицей истинности**

X_1	X_2	Y_6
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Y_{61}	Y_{62}
0	0
0	1
1	0
0	0

1. **Функцию Y_6 представляем в виде дизъюнкции двух конституент:**

$$Y_6 = Y_{61} \vee Y_{62}$$

2. **Каждую из конституент записываем через исходные аргументы**

$$Y_6 = (X_1 \cdot \overline{X}_2) \vee (\overline{X}_1 \cdot X_2)$$

Функция Y_6 принимает значение 1 при противоположных значениях аргументов и называется <u>***неравнозначность***</u>**.**

<u>Вывод:</u> с помощью всего лишь трех двоичных функций «И», «ИЛИ» и «НЕ» можно записать любую двоичную функцию.

3. Основные соотношения алгебры логики.

- Наука, которая занимается логическими преобразованиями, называется алгеброй логики или булевой алгеброй по имени ее создателя английского математика Джорджа Буля (1815 -1864).
- Над логическими выражениями можно выполнять только три действия: логическое *сложение*, логическое *умножение* и *инверсию*.
- Приоритет выполнения операций: инверсия, затем конъюнкции и самой старшей является дизъюнкция.
- Если есть скобки, то сначала выполняются действия в скобках.

Пример 2. Имеем логическое выражение вида

$$Y = X_1\ X_2\ V\ X_1\ \overline{X}_2\ X_3$$

Последовательность выполнения логических операций будет следующей:

$$Y_1 = \overline{X}_2 \ \square \ Y_2 = (X_1\ X_2) \ \square \ Y_3 = (X_1\ Y_1\ X_3) \ \square \ Y = Y_2\ V\ Y_3$$

При выполнении логических преобразований используют следующие основные соотношения для логических операций:

Дизъюнкция	Конъюнкция	Инверсия
$X \vee 0 = X$ $X \vee 1 = 1$ $X \vee X = X$ $X \vee \overline{X} = 1$	$X \cdot 0 = 0$ $X \cdot 1 = X$ $X \cdot X = X$ $X \cdot \overline{X} = 0$	$\overline{\overline{X}} = X$

Из этих соотношений следует, что

$$X \vee X \vee X \ \dots \vee X = X, \qquad X \cdot X \cdot X \ \dots \cdot X = X$$

Это позволяет сделать вывод, что в любом логическом выражении в одноприоритетных операциях можно сколько угодно раз добавлять любой из логических членов.

Пример 3. Имеем $Y = X_1 X_2 \vee \overline{X_1} X_2 X_3$, тождественным ему будет логическое выражение вида:

$$Y = X_1 X_2 X_1 \vee X_1 \overline{X_2} X_3 \overline{X_2} \vee X_1 X_2$$

4. Основные законы алгебры логики.

В алгебре логики используется ряд законов, аналогичных законам обычной алгебры: это переместительный, сочетательный и распределительный законы:

- *Переместительный.* От перестановки логических аргументов в операциях дизъюнкции или конъюнкции результат не изменяется

$$Y = X_1X_2 = X_2X_1 \qquad Y = X_1VX_2 = X_2VX_1$$

- *Сочетательный.* От изменения последовательности однаприоритетных действий результат не изменяется

$$Y=X_1X_2X_3 =X_1(X_2\ X_3) \qquad Y=X_1VX_2VX_3 = X_1V(X_2VX_3)$$

- *Распределительный.*

$$Y = X_1\cdot(X_2\ V\ X_3)=X_1\cdot X_2\ V\ X_1\cdot X_3$$

Из приведенных законов следует, что как и в обычной алгебре логические переменные можно менять местами и выносить за скобки. Однако в алгебре логики есть еще законы, которые не имеют аналогов в обычной алгебре.

Второй распределительный.

$$Y = X_1 \vee (X_2 \cdot X_3) = (X_1 \vee X_2) \cdot (X_1 \vee X_3)$$

С целью иллюстрации логических преобразований докажем справедливость данного закона.

Возьмем правую часть исходного логического выражения и раскроем скобки:

$$(X_1 \vee X_2)(X_1 \vee X_3) =$$
$$= X_1(X_1 \vee X_3) \vee X_2(X_1 \vee X_3) =$$
$$= X_1X_1 \vee X_1X_3 \vee X_2X_1 \vee X_2X_3 =$$
$$= X_1 \vee X_1X_3 \vee X_1X_2 \vee X_2X_3 =$$
$$= X_1(1 \vee X_3 \vee X_2) \vee X_2X_3 =$$
$$= X_1(1) \vee X_2X_3$$
$$= X_1 \vee X_2X_3$$

- **Законы инверсии базируется на теореме шотландского математика Огастеса де Моргана (1806-1871), которая формулируется следующим образом:**
- **”При замене в исходной логической функции аргументов их отрицаниями, знаков дизъюнкции на знаки конъюнкции и знаков конъюнкции на знаки дизъюнкции, получим функцию инверсную от исходной”.**

Первый закон инверсии. Отрицание конъюнкции эквивалентно дизъюнкции отрицаний.

$$\overline{X_1 \cdot X_2 \cdot \ \ldots \cdot X_n} = \overline{X_1} \vee \overline{X_2} \ \ldots \vee \overline{X_n}$$

Второй закон инверсии. Отрицание дизъюнкции эквивалентно конъюнкции отрицаний.

$$\overline{X_1 \vee X_2 \vee \ldots \vee X_n} = \overline{X_1} \cdot \overline{X_2} \cdot \ldots \cdot \overline{X_n}$$

Вывод. Основные соотношения и законы позволяют упрощать и минимизировать логические выражения, т.е. записывать их с наименьшим числом знаков логических операций. В результате получают тупиковую форму, которую нельзя более упростить.

5. Синтез логических выражений и схем.

- Задача синтеза формулируется следующим образом:

  ”По заданной словесной формулировке определить тупиковую логическую форму и структуру автомата с минимальным числом элементов”.
- Этапы синтеза:

  А). Словесное описание задачи.

  Б). Составление таблицы истинности.

  В). Запись СДНФ и ее минимизация.

  Г). Составление структуры автомата (если это необходимо)

Пример 4. Требуется построить одноразрядный полусумматор, т.е. устройство, которое выполняет сложение двух младших разрядов двоичных чисел

$(a)_2 =$	**1**	**0**	**1**
$(b)_2 =$	**0**	**1**	**0**
$(c)_2 = (a)_2 + (b)_2$	**1**	**1**	**1**

Следует особо подчеркнуть, что идет речь о сложении двух двоичных чисел, т.е. выполнении арифметических операций, а ставится задача построения логических выражений и структуры логической схемы.

А). Словесное описание задачи.

Введем логические переменные (высказывания):

x1 – единица в младшем разряде 1-го слагаемого, т.е. высокий уровень сигнала в этом разряде.

x2 – единица в младшем разряде 2-го слагаемого.

S – единица в младшем суммы.

P – единица переноса в следующий разряд.

Здесь x1 и x2 - это логические аргументы (простые высказывания), а S и P – логические функции (сложные высказывания), которые могут принимать значения либо “истина”, либо “ложь”.

Б). *Составление таблицы истинности.*

- Для составления таблицы необходимо вспомнить правила сложения двоичных чисел.
- Также следует помнить, что значения аргументов и функций в таблице – это логические переменные «истина» и «ложь», которые мы кодируем 1 или 0 и, которые никакой связи с числовыми значениями не имеют.

x1	x2	S	P
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

В). *Запись СДНФ и ее минимизация.*

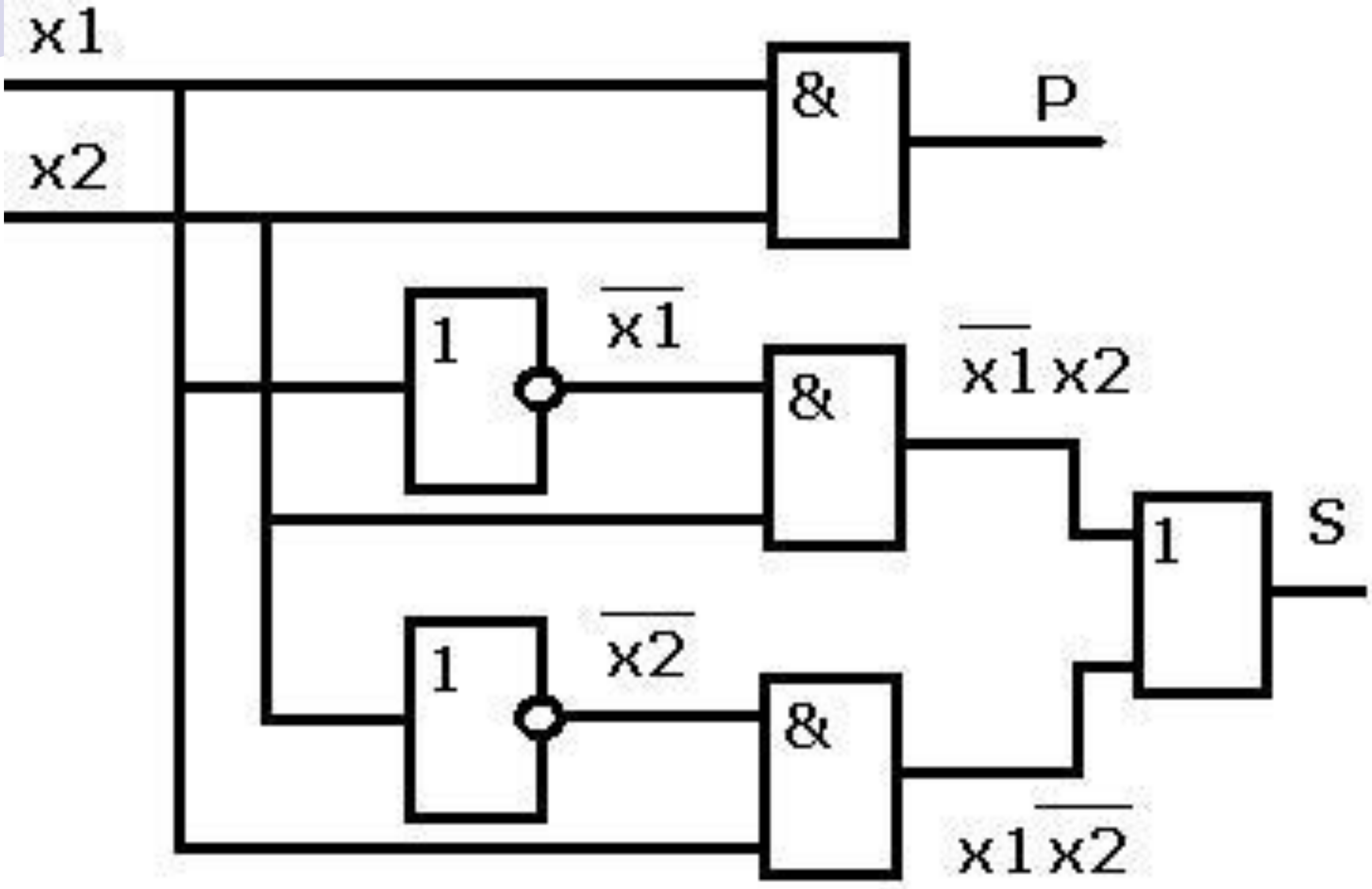
Имеем две логические функции S и P двух двоичных аргументов, для каждой из которых чисто формально на основе таблицы записываем СДНФ.

$$\mathbf{S = (x1 \cdot \overline{x2}) \vee (\overline{x1} \cdot x2)}$$

$$\mathbf{P = (x1 \cdot x2)}$$

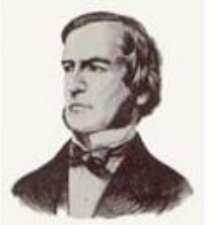
Полученные логические выражения имеют тупиковые формы и не допускают дальнейшего упрощения.

Г). Составление структуры автомата, реализующего операцию сложения младших разрядов двух двоичных чисел.



- $\mathbf{S = (\overline{x1} \cdot x2)\ V\ (x1 \cdot \overline{x2})}$
- $\mathbf{P = (x1 \cdot x2)}$

Приложение 1. Историческая справка



Джордж Буль (1815-1864 гг.)

- Родился в семье рабочего. Первые уроки математики получил у отца. Хотя мальчик посещал местную школу, его можно считать самоучкой. В 12 лет знал латынь, затем овладел греческим, французским, немецким и итальянским языками. В 16 лет уже преподавал в деревенской школе, а в 20 открыл собственную школу в Линкольне. В редкие часы досуга зачитывался математическими журналами Механического института, интересовался работами математиков прошлого – Ньютона, Лапласа, Лагранжа, проблемами современной алгебры.
- Начиная с 1839 года Буль стал посылать свои работы в новый Кембриджский математический журнал. Его первая работа «Исследования по теории аналитических преобразований» касалась дифференциальных уравнений, алгебраических проблем линейной трансформации и концепции инвариантности. В своем исследовании 1844 года, опубликованном в «Философских трудах Королевского общества», он коснулся проблемы взаимодействия алгебры и исчисления. В том же году молодой ученый был награжден медалью Королевского общества за вклад в математический анализ.

Продолжение приложения 1

- Вскоре, после того как Буль убедился, что его алгебра вполне применима к логике, в 1847 году он опубликовал памфлет «Математический анализ логики», в котором высказал идею, что логика более близка к математике, чем к философии. Эта работа была чрезвычайно высоко оценена английским математиком Огастесом (Августустом) Де Морганом. Благодаря этой работе Буль в 1849 году получил пост профессора математики Куинз-колледжа в графстве Корк, несмотря на то, что он даже не имел университетского образования.
- В 1854 году опубликовал работу «Исследование законов мышления, базирующихся на математической логике и теории вероятностей». Работы 1847 и 1854 годов положили начало алгебре логики, или булевой алгебре. Буль первым показал, что существует аналогия между алгебраическими и логическими действиями, так как и те, и другие предполагают лишь два варианта ответов – истина или ложь, нуль или единица. Он придумал систему обозначений и правил, пользуясь которыми можно было закодировать любые высказывания, а затем манипулировать ими как обычными числами. Булева алгебра располагала тремя основными операциями – И, ИЛИ, НЕ, которые позволяли производить сложение, вычитание, умножение, деление и сравнение символов и чисел.

Продолжение приложения 1

- Таким образом, Булю удалось подробно описать двоичную систему счисления. В своей работе «Законы мышления» (1854г.) Буль окончательно сформулировал основы математической логики. Он также попытался сформулировать общий метод вероятностей, с помощью которого из заданной системы вероятных событий можно было бы определить вероятность последующего события, логически связанного с ними.
- В 1857 году Буль был избран членом Лондонского Королевского общества. Его работы «Трактат о дифференциальных уравнениях» (1859г.) и «Трактат о вычислении предельных разностей» (1860 г.) оказали колоссальное влияние на развитие математики. В них нашли свое отражение наиболее важные открытия Буля.
- Сегодня идеи Буля используются во всех современных цифровых устройствах
- Дж. Буль был отцом писательницы Этель Лилиан Буль, в замужестве Войнич, - автора популярного в нашей стране романа "Овод".