

**Векторы в пространстве
и действия над ними.
Компланарные векторы.**

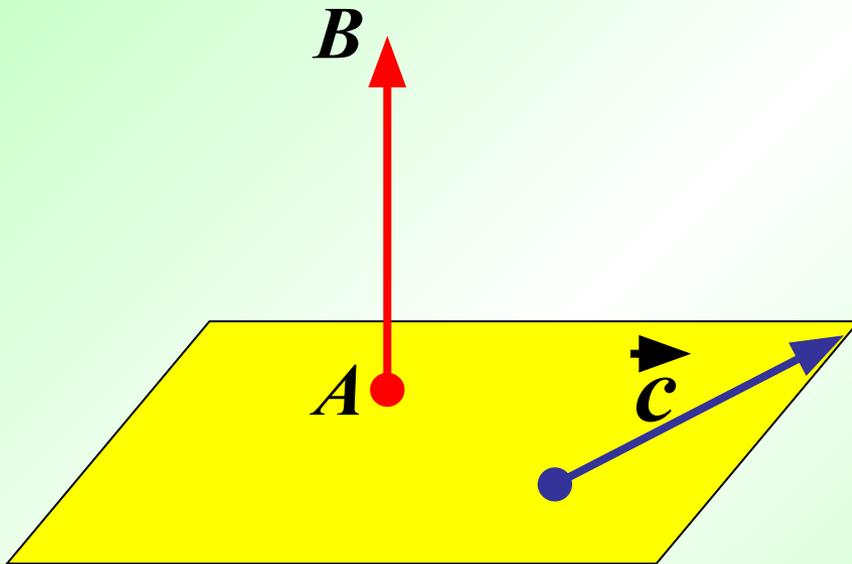


- Многие физические величины характеризуются числовым значением и направлением в пространстве, их называют векторными величинами

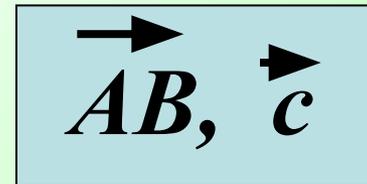


Определение вектора в пространстве

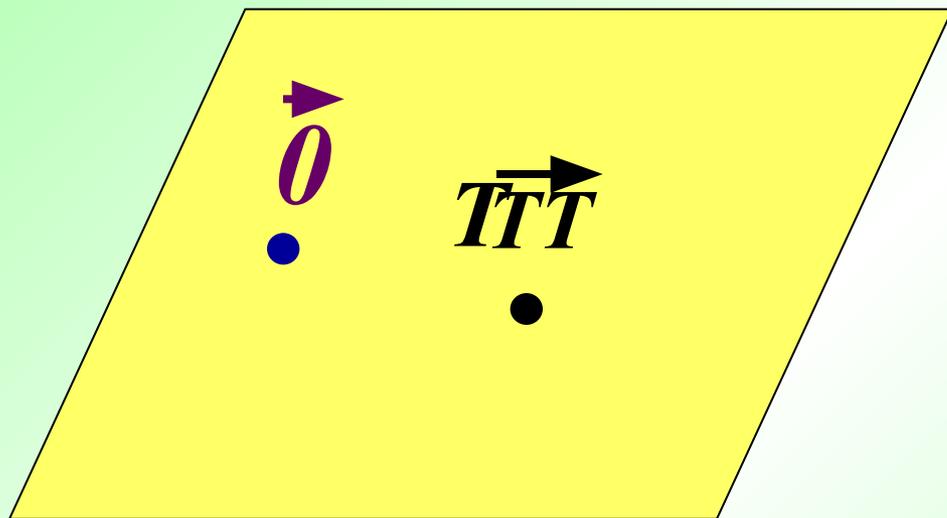
Отрезок, для которого указано, какой из его концов считается началом, а какой-концом, называется **вектором**.



Обозначение вектора



Любая точка пространства также может рассматриваться как вектор. Такой вектор называется **нулевым**.



Обозначение нулевого вектора

$\overrightarrow{TT}, \vec{0}$

Длина ненулевого вектора

- Длиной вектора \vec{AB} называется длина отрезка AB .
- Длина вектора \vec{a} (вектора a) обозначается так:

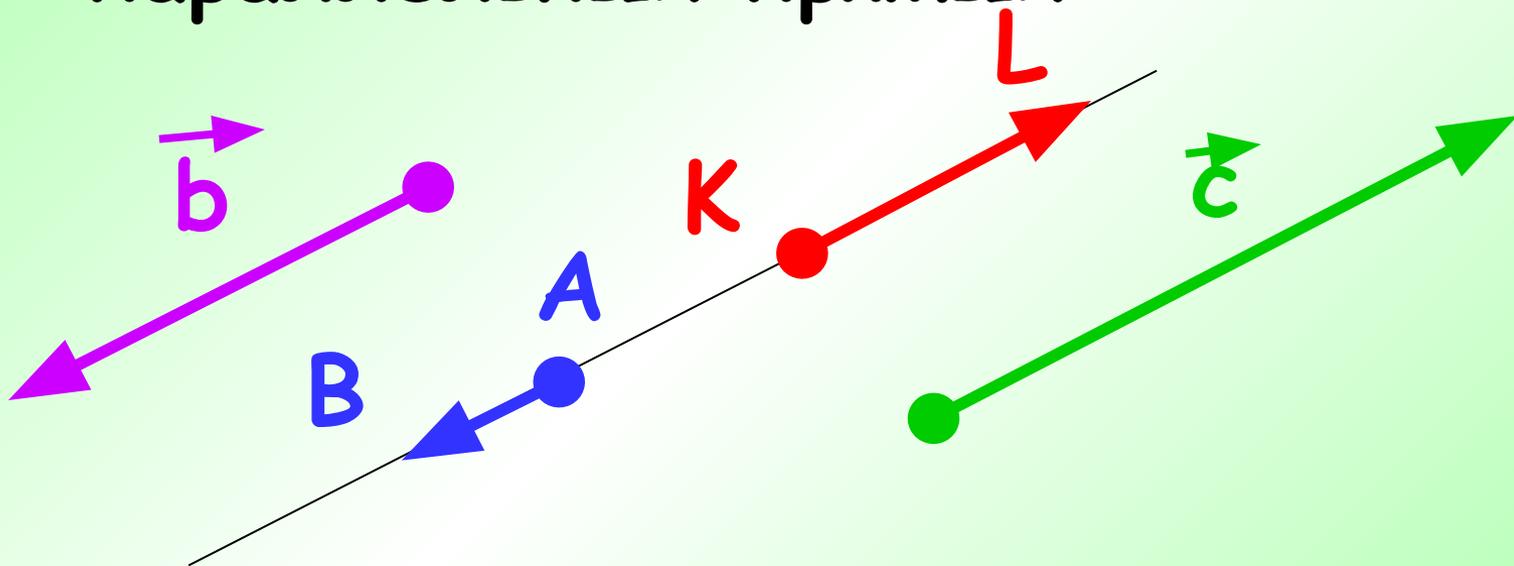
$$|\vec{AB}|, |a|$$

- Длина нулевого вектора считается равной нулю:

$$|\vec{0}| = 0$$

Коллинеарные векторы

- Ненулевые векторы называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых

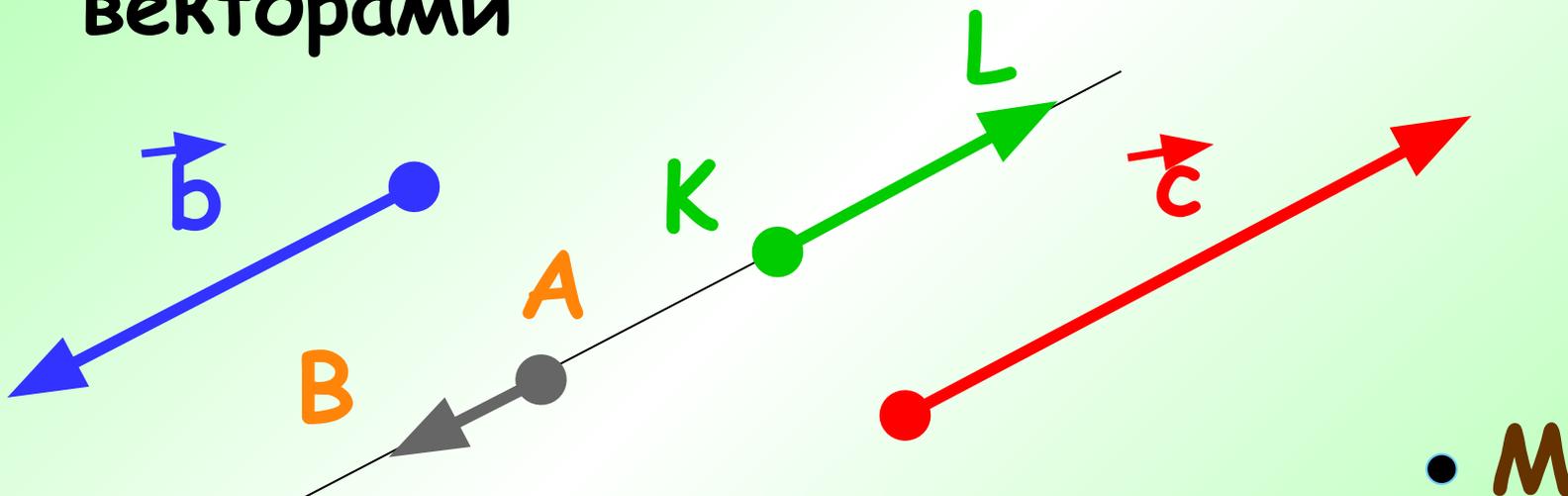


Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору



Сонаправленные векторы

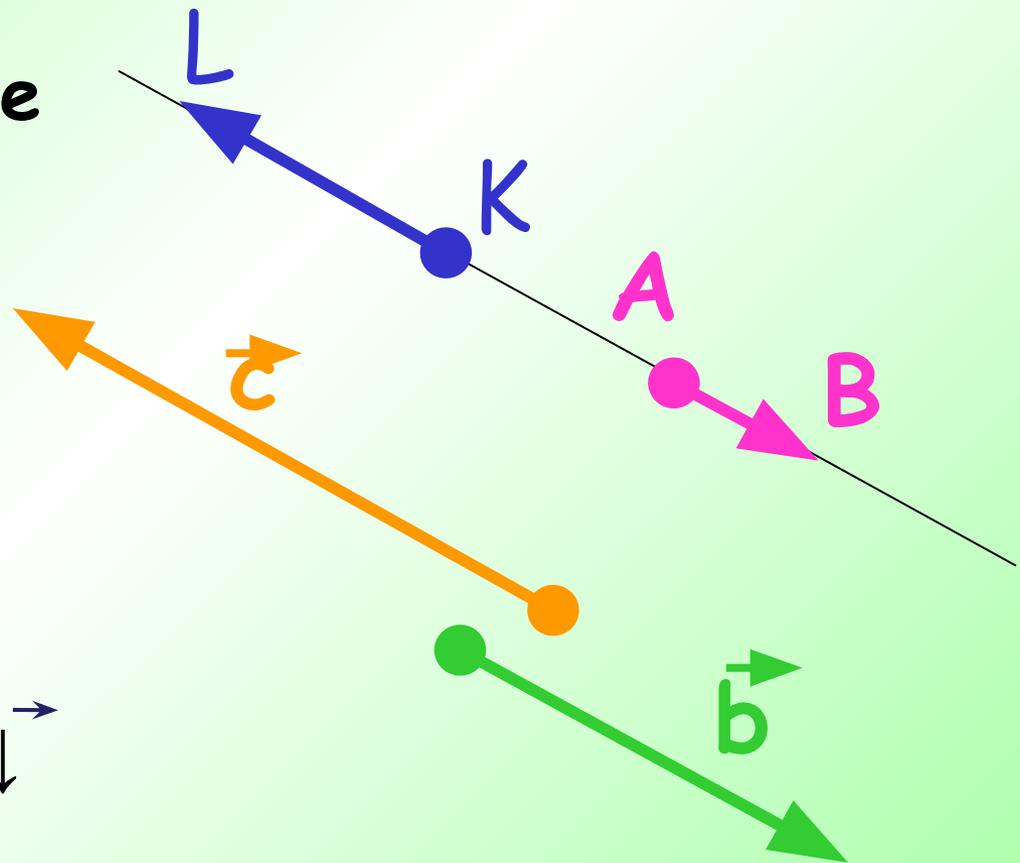
Коллинеарные векторы, имеющие одинаковое направление, называются *сонаправленными* векторами



$\vec{c} \uparrow\uparrow \vec{KL}$ $\vec{AB} \uparrow\uparrow \vec{b}$ $\vec{MM} \uparrow\uparrow \vec{c}$ (нулевой вектор сонаправлен любому вектору)

Противоположно направленные векторы

Коллинеарные
векторы, имеющие
противоположное
направление,
называются
*противоположно
направленными*
векторами

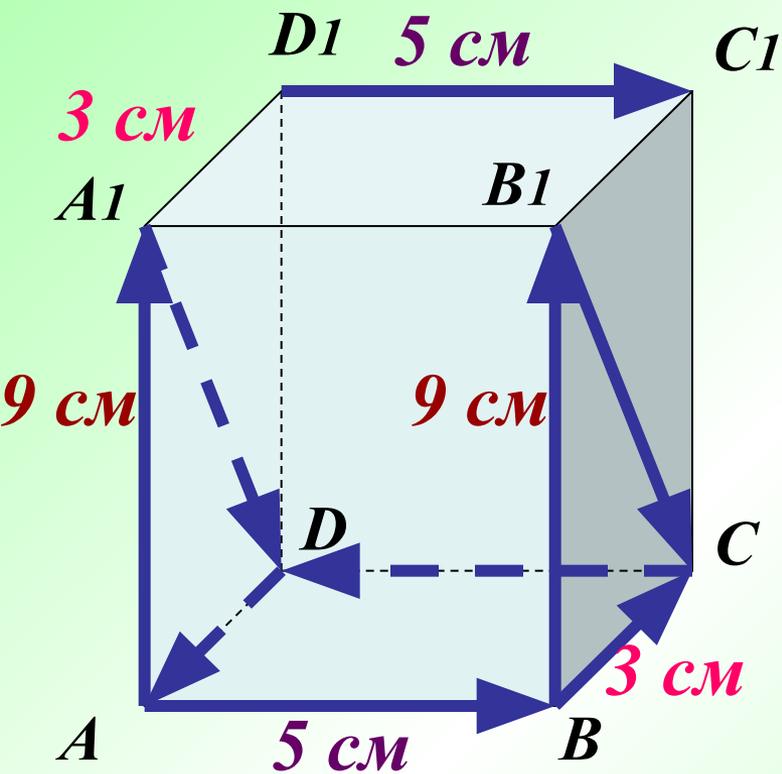


$$\vec{b} \updownarrow \vec{KL} \quad \vec{AB} \updownarrow \vec{c}$$

$$c \updownarrow b \quad KL \updownarrow AB$$

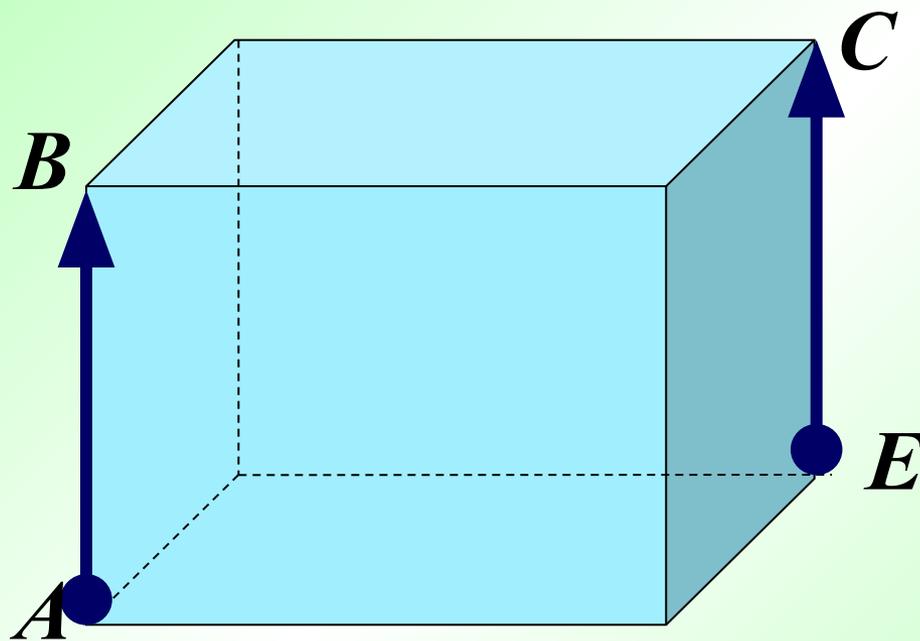
Какие векторы на рисунке сонаправленные?
Какие векторы на рисунке противоположно
направленные?

Найти длины векторов \vec{AB} ; \vec{BC} ; $\vec{CC_1}$.



Равенство векторов

Векторы называются **равными**, если они сонаправлены и их длины равны.



$$\vec{AB} = \vec{EC}, \text{ так как}$$
$$\vec{AB} \parallel \vec{EC} \text{ и } |\vec{AB}| = |\vec{EC}|$$

Могут ли быть равными векторы на рисунке? Ответ обоснуйте.

• Рисунок № 1

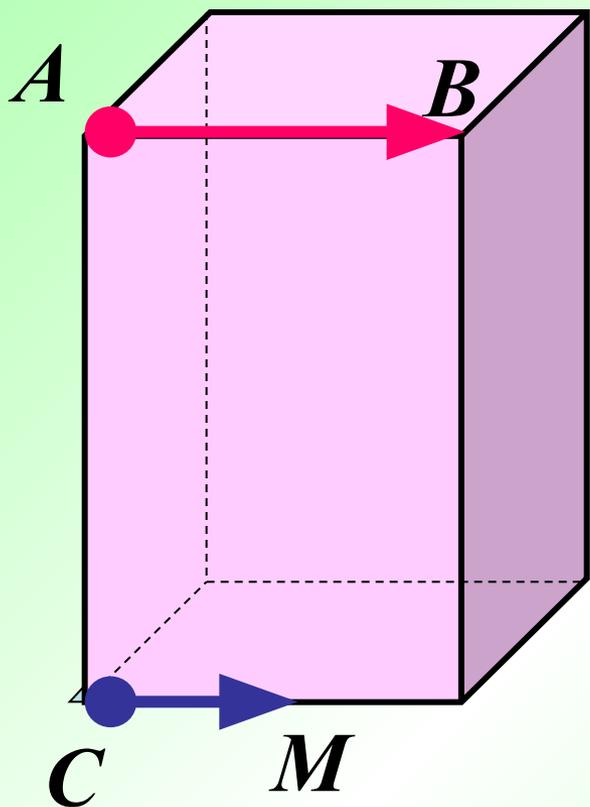
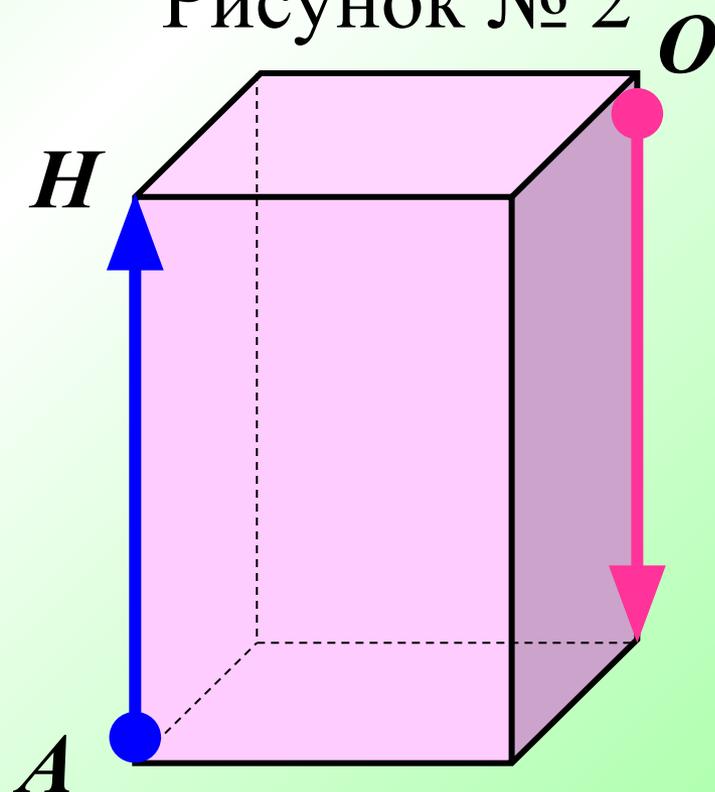


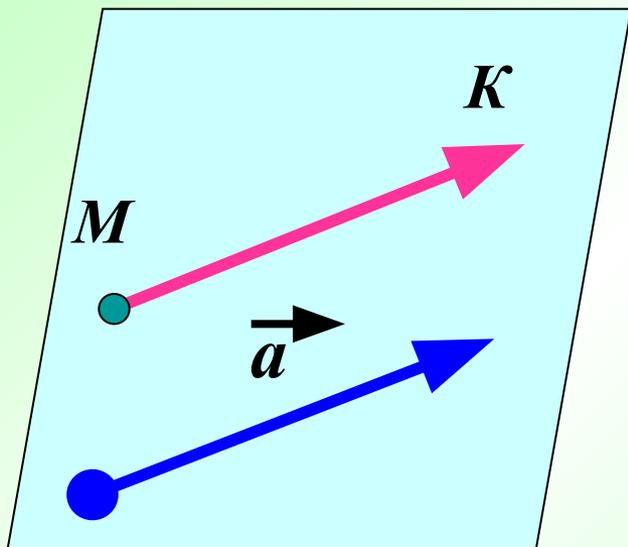
Рисунок № 2



Доказать, что от любой точки пространства можно отложить вектор, равный данному, и притом только один

Дано: \vec{a}, M .

Доказать: $\vec{v} = \vec{a}, M \in \vec{v}$, единственный.



Доказательство:

Проведем через вектор a и точку M плоскость.

В этой плоскости построим $\vec{MK} = \vec{a}$.

Из теоремы о параллельности $\vec{MK} = \vec{a}$ и $M \in MK$.

Действия над векторами

Сложение векторов

- **Правило треугольника.**

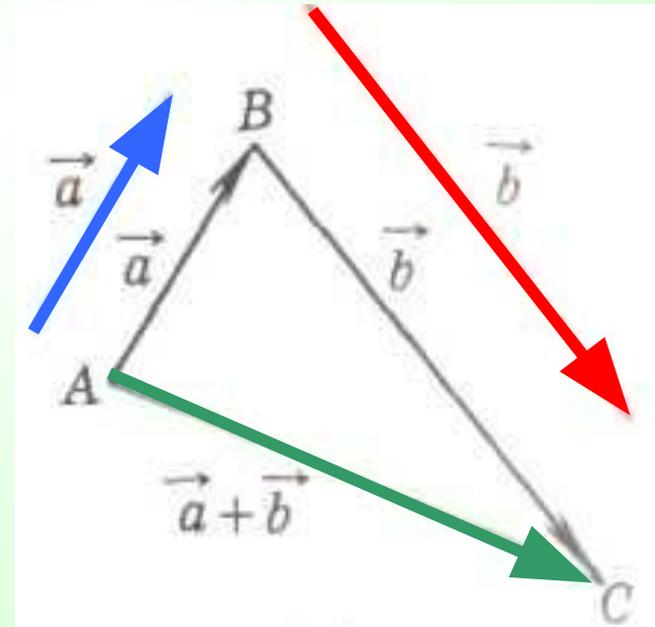
(правило сложения двух произвольных векторов \vec{a} и \vec{b}).

Отложим от какой-нибудь точки A вектор AB , равный \vec{a} :

Затем от точки B отложим вектор BC , равный \vec{b} . Вектор

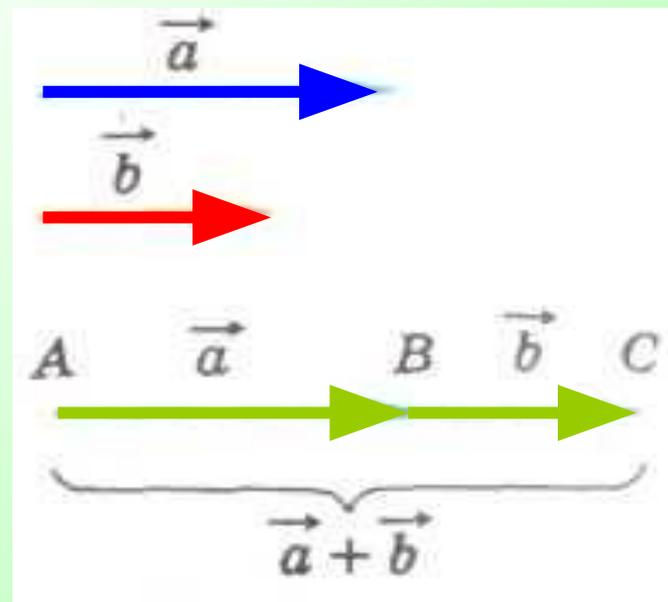
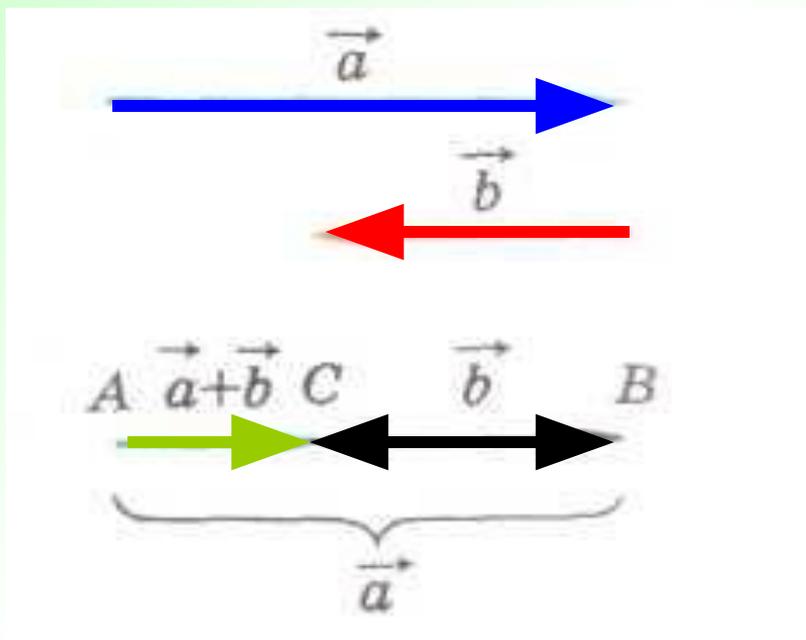
AC называется **суммой**

векторов \vec{a} и \vec{b} : **$\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b}$** .



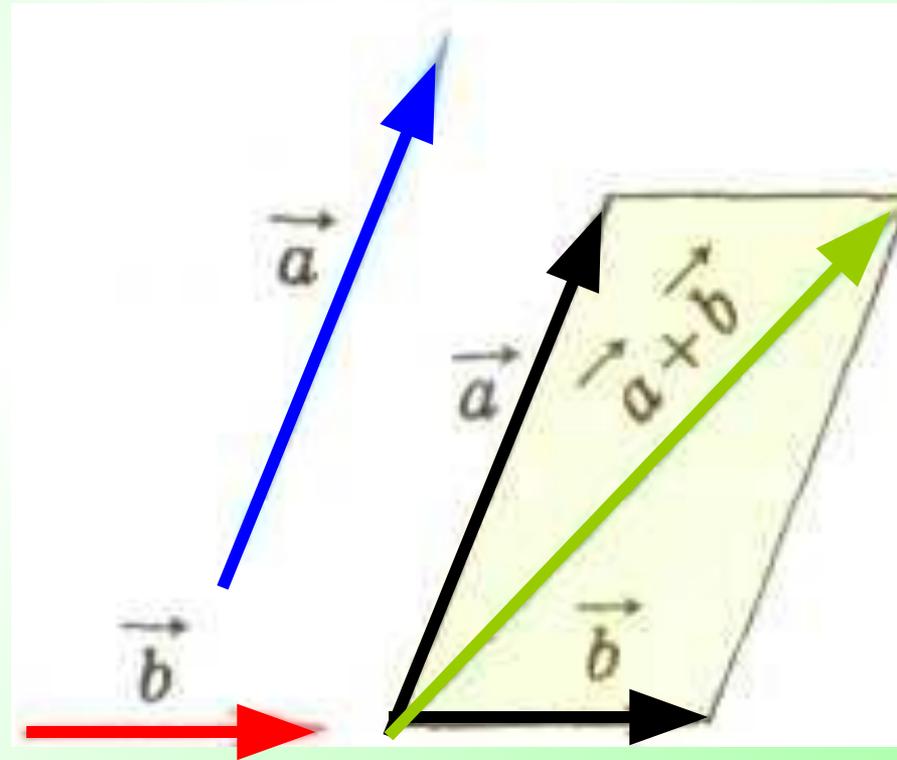
Сложение коллинеарных векторов

- По этому же правилу складываются и коллинеарные векторы, хотя при их сложении и не получается треугольника.



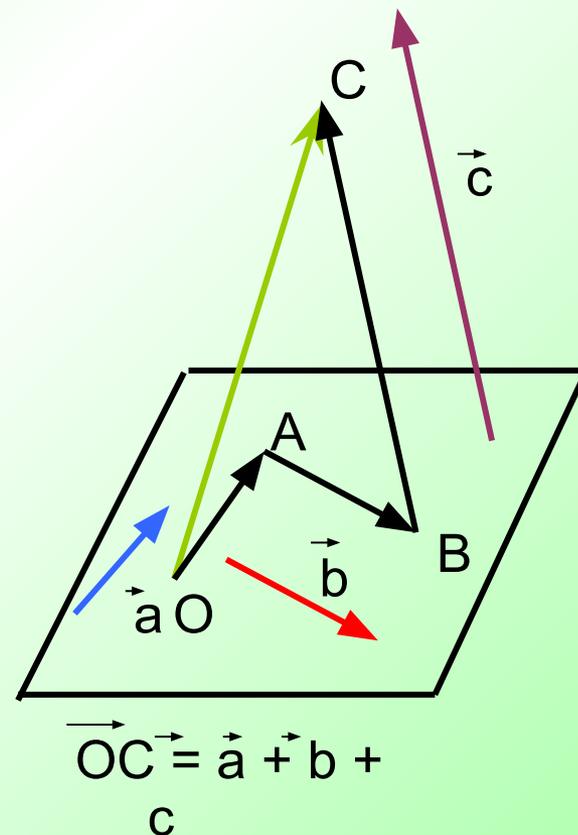
Сложение векторов

- Для сложения двух неколлинеарных векторов можно пользоваться также **правилом параллелограмма**, известным из курса планиметрии.



Сложение нескольких векторов

Сложение нескольких векторов в пространстве выполняется так же, как и на плоскости: первый вектор складывается со вторым, затем их сумма — с третьим вектором и т. д. Из законов сложения векторов следует, что **сумма нескольких векторов не зависит от того, в каком порядке они складываются.**



Свойства сложения векторов

Для любых векторов справедливы
равенства:

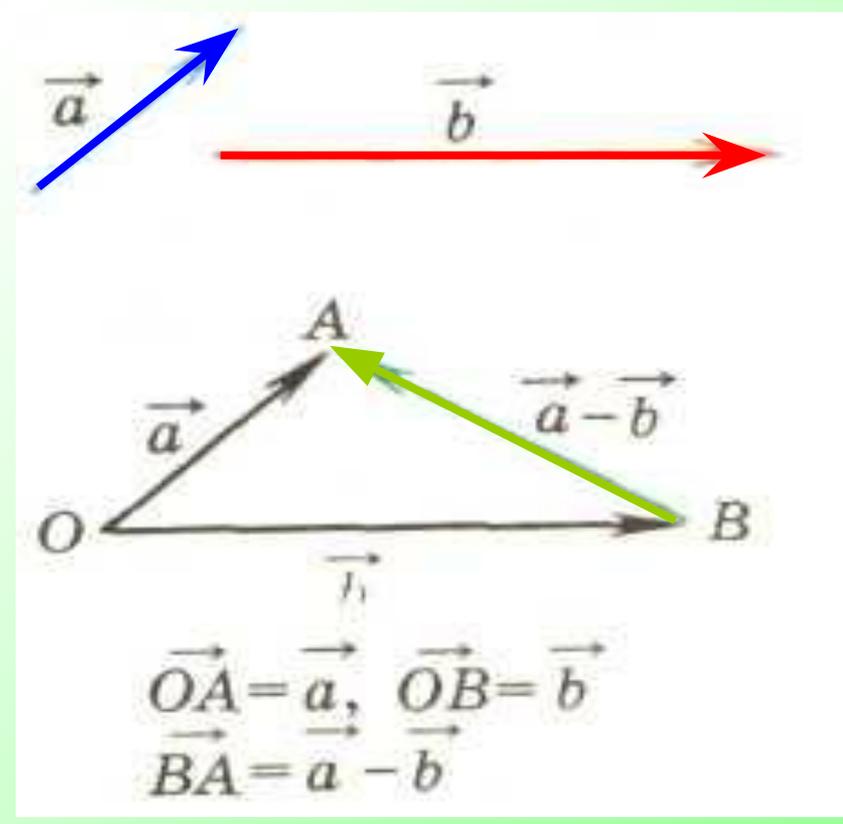
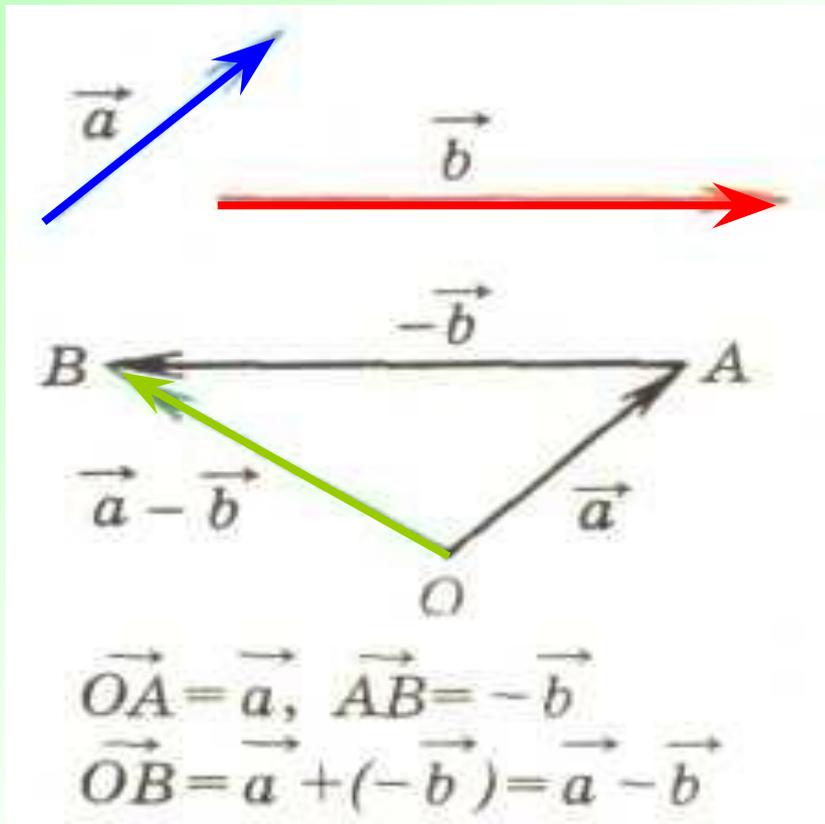
$$a + b = b + a \text{ (переместительный закон)}$$

$$(a + b) + c = a + (b + c) \text{ (сочетательный закон)}$$

Разность векторов

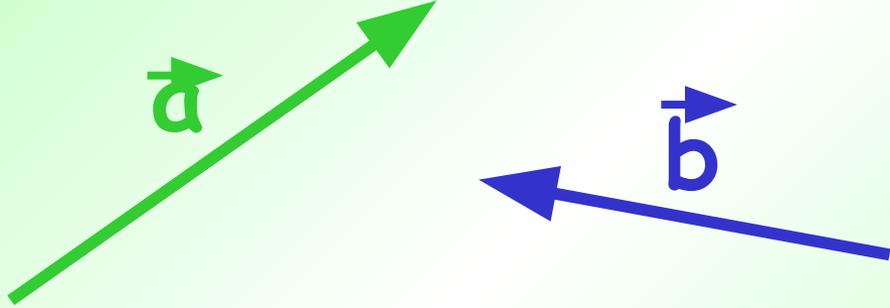
- **Разностью векторов \vec{a} и \vec{b}** называется такой вектор, сумма которого с вектором \vec{b} равна вектору \vec{a} . Разность $\vec{a} - \vec{b}$ векторов \vec{a} и \vec{b} можно найти по формуле:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$



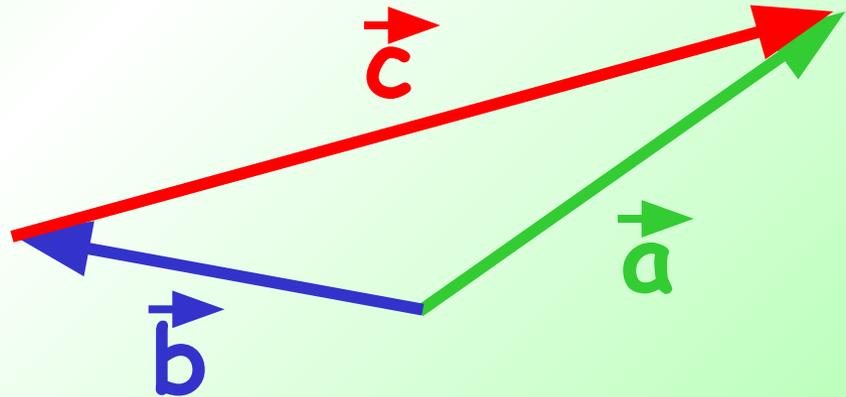
Разность векторов

Дано: \vec{a} , \vec{b}



Построить: $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$

Построение:



$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$$

Умножение вектора \vec{a} на число k

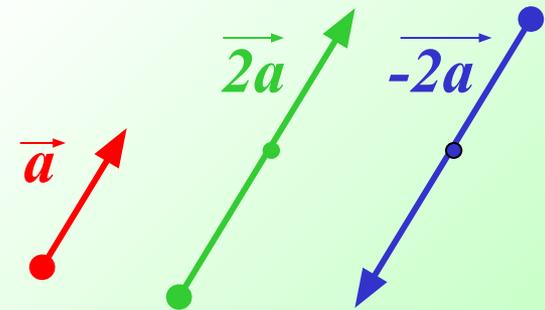
$$k \cdot \vec{a} = \vec{b},$$

$|\vec{a}| \neq 0$, k – произвольное число

$$|\vec{b}| = |k| \cdot |\vec{a}|,$$

если $k > 0$, то $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$

если $k < 0$, то $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$



Для любых чисел k, l и любых векторов a, b справедливы равенства:

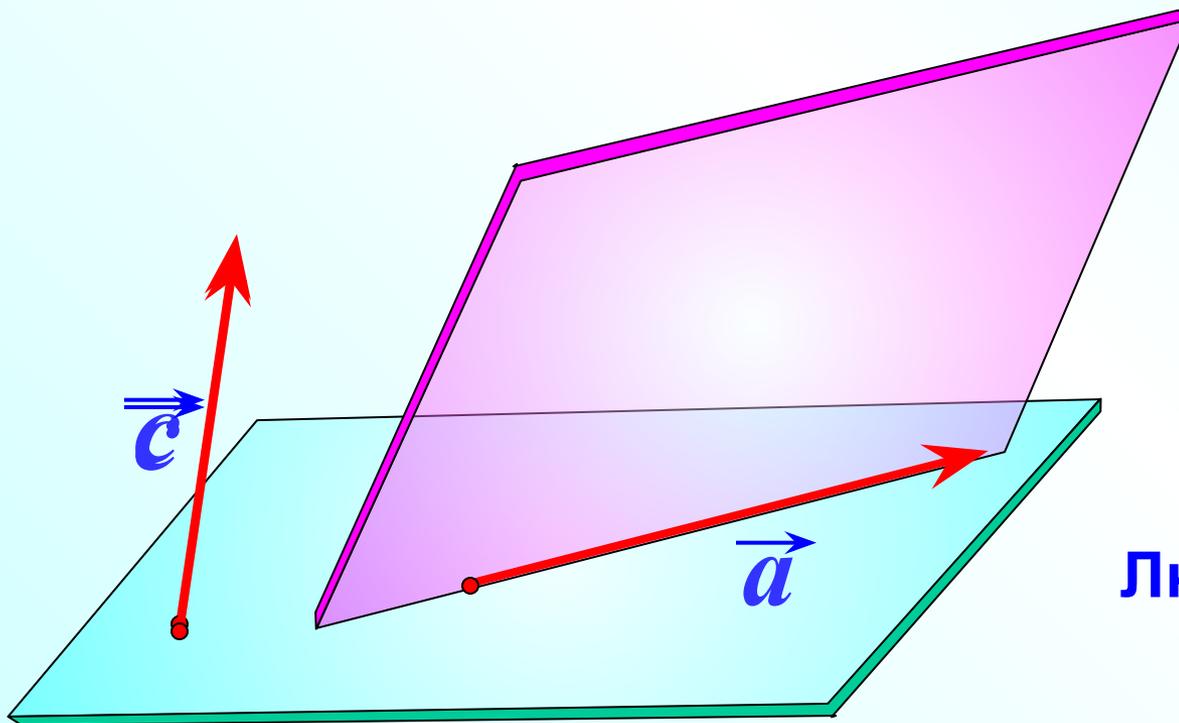
1°. $(kl)a = k(la)$ (сочетательный закон),

2°. $(k+l)a = ka + la$ (первый распределительный закон),

3°. $k(a+b) = ka + kb$ (второй распределительный закон).

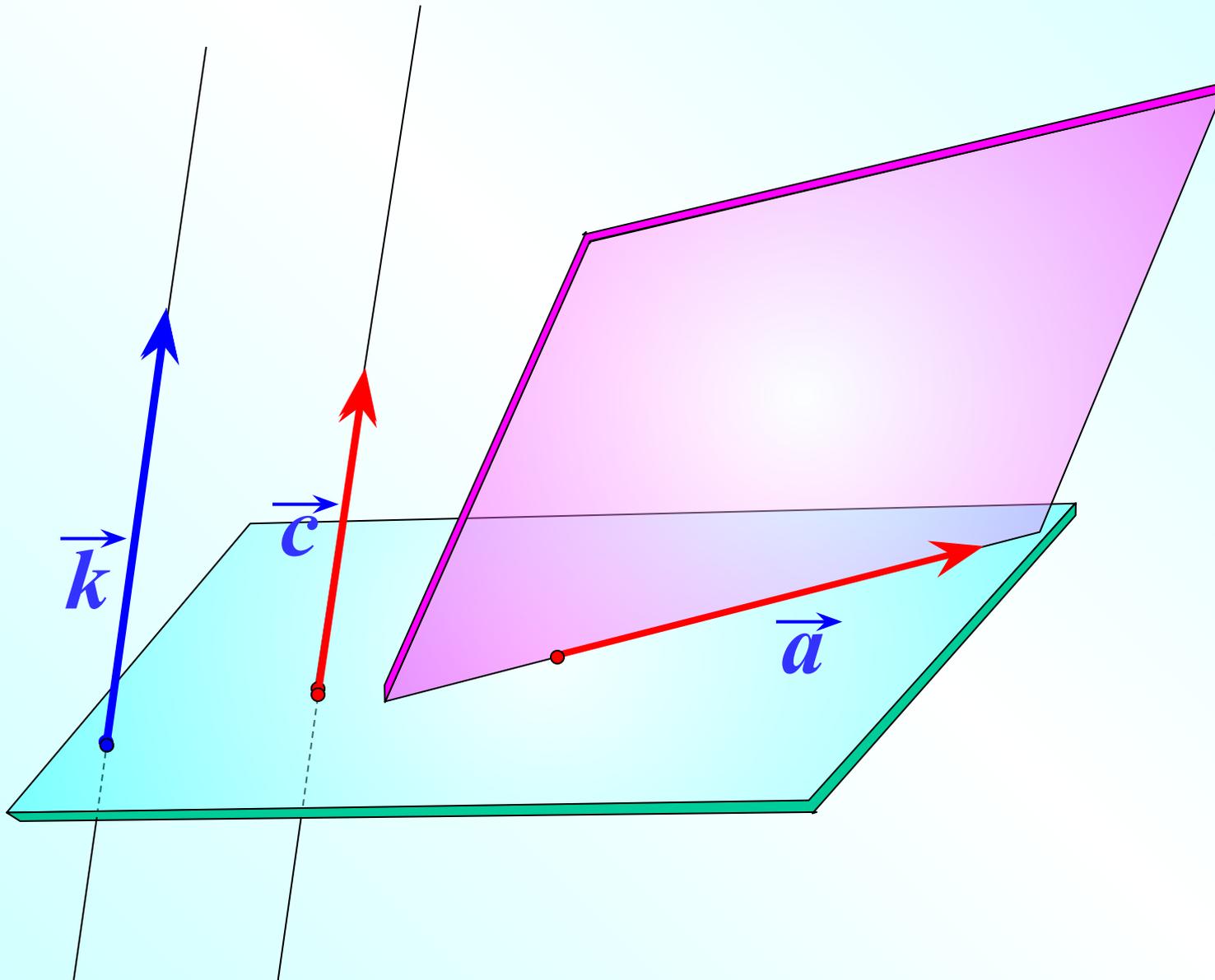
Векторы называются **компланарными**, если при откладывании их от одной и той же точки они будут лежать в одной плоскости.

Другими словами, векторы называются **компланарными**, если имеются равные им векторы, лежащие в одной плоскости.



**Любые два вектора
компланарны.**

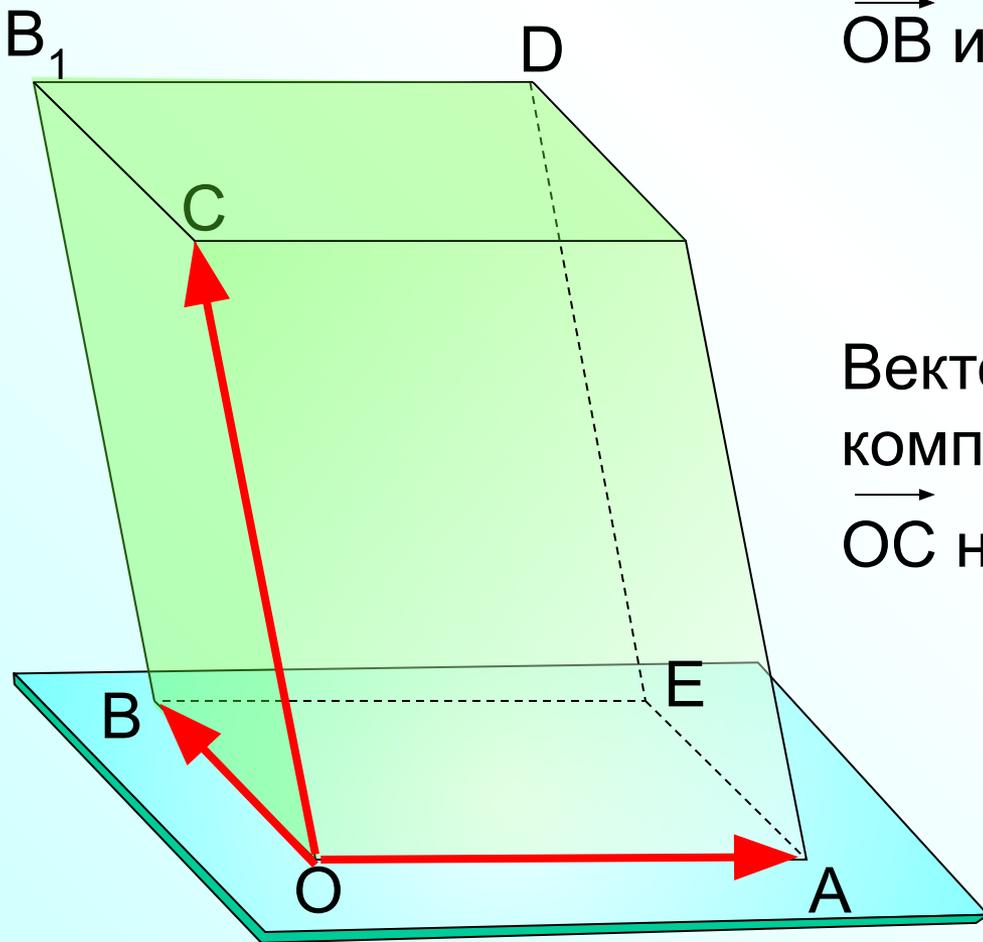
Три вектора, среди которых имеются два коллинеарных, также компланарны.



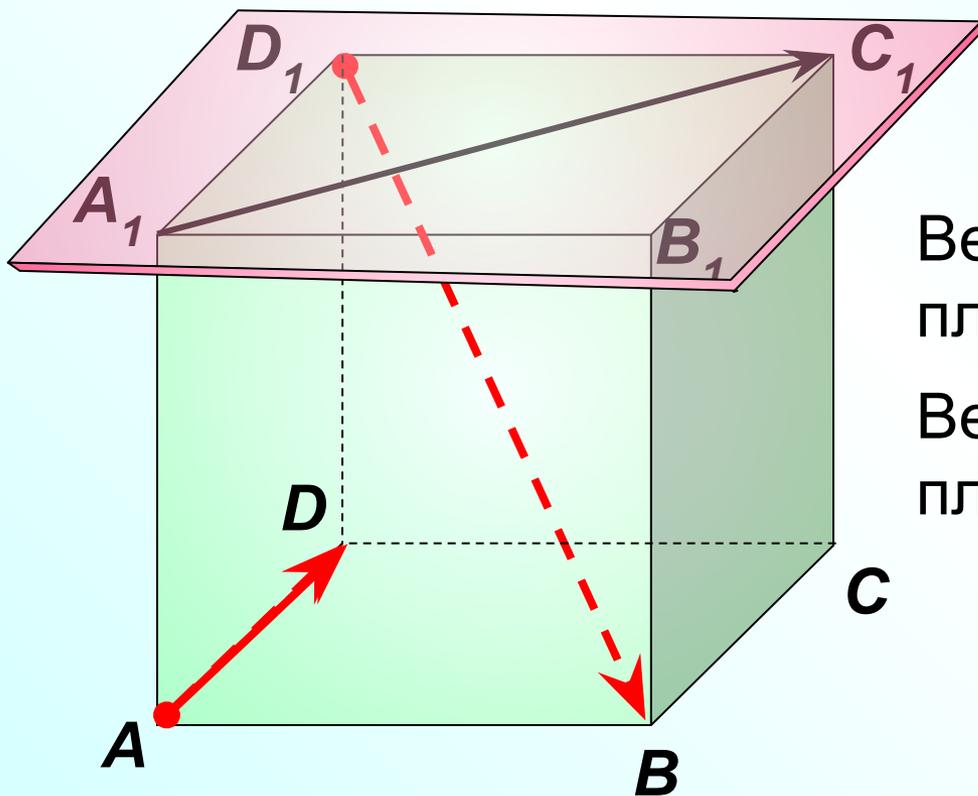
Три произвольных вектора могут быть как компланарными, так и не компланарными. На рисунке изображен параллелепипед.

Являются ли векторы \vec{OA} , \vec{OB} и \vec{OC} компланарными?

Векторы \vec{OA} , \vec{OB} и \vec{OC} не компланарны, так как вектор \vec{OC} не лежит в плоскости OAB .



Являются ли векторы \vec{AD} , $\vec{A_1C_1}$ и $\vec{D_1B}$ компланарными?



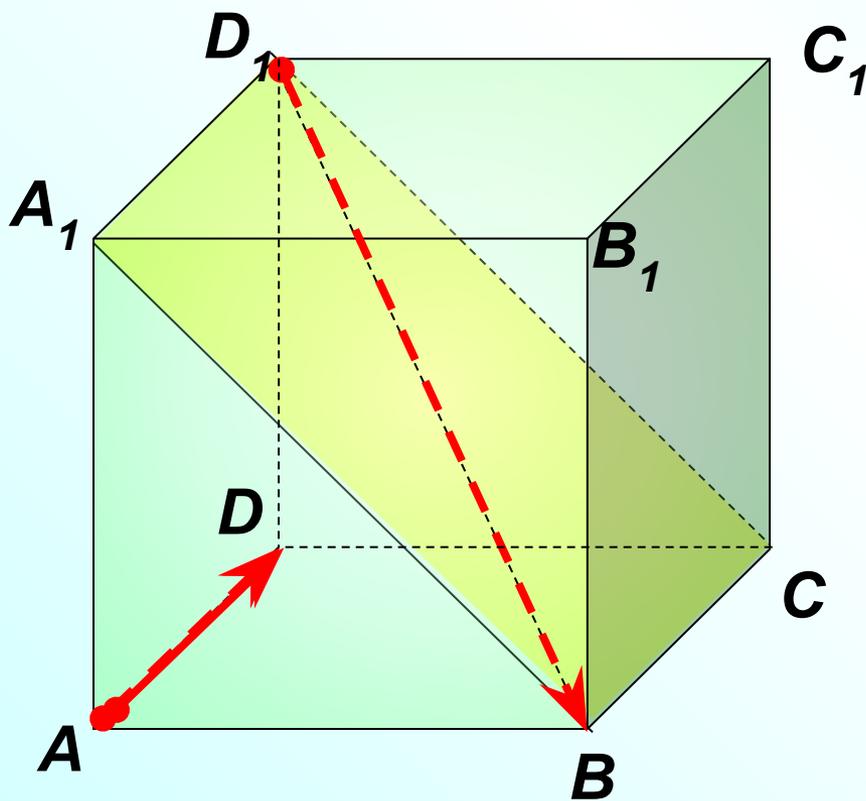
Векторы $\vec{A_1D_1}$, $\vec{A_1C_1}$ лежат в плоскости $A_1D_1C_1$.

Вектор $\vec{D_1B}$ не лежит в этой плоскости.

Векторы \vec{AD} , $\vec{A_1C_1}$ и $\vec{D_1B}$ не компланарны.

Являются ли векторы \vec{AD} и $\vec{D_1B}$ компланарными?

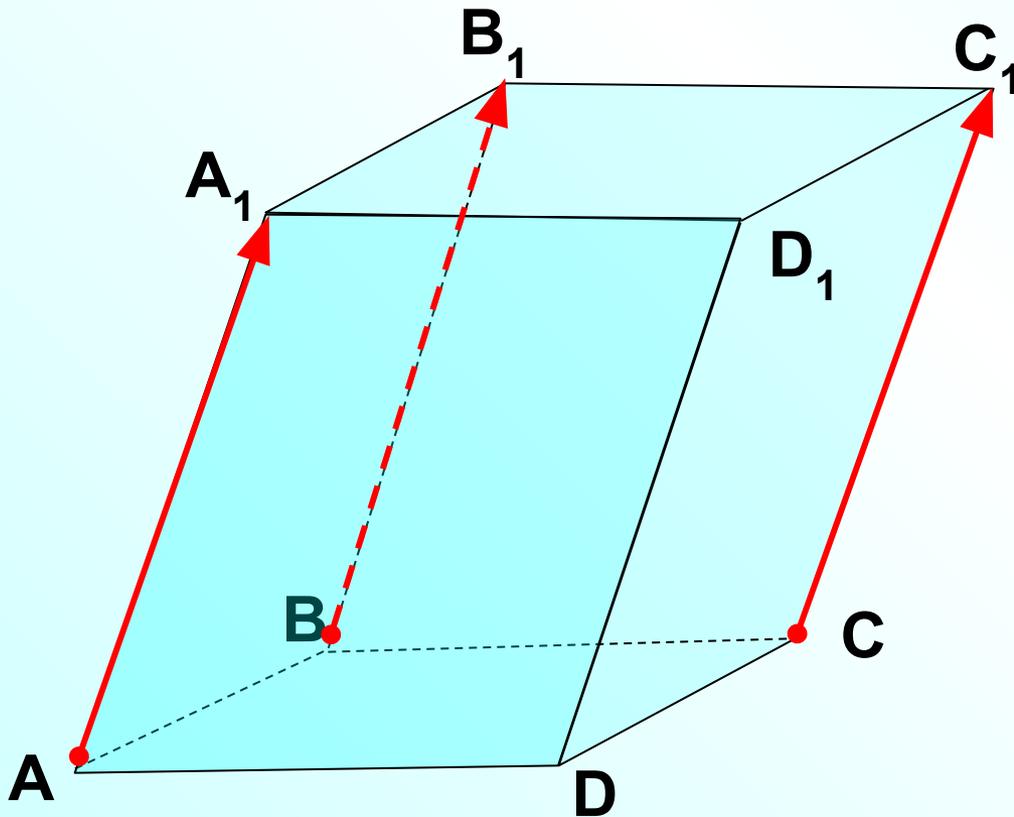
Любые два вектора компланарны.



Дан параллелепипед $ABCA_1B_1C_1D_1$.
Компланарны ли векторы?

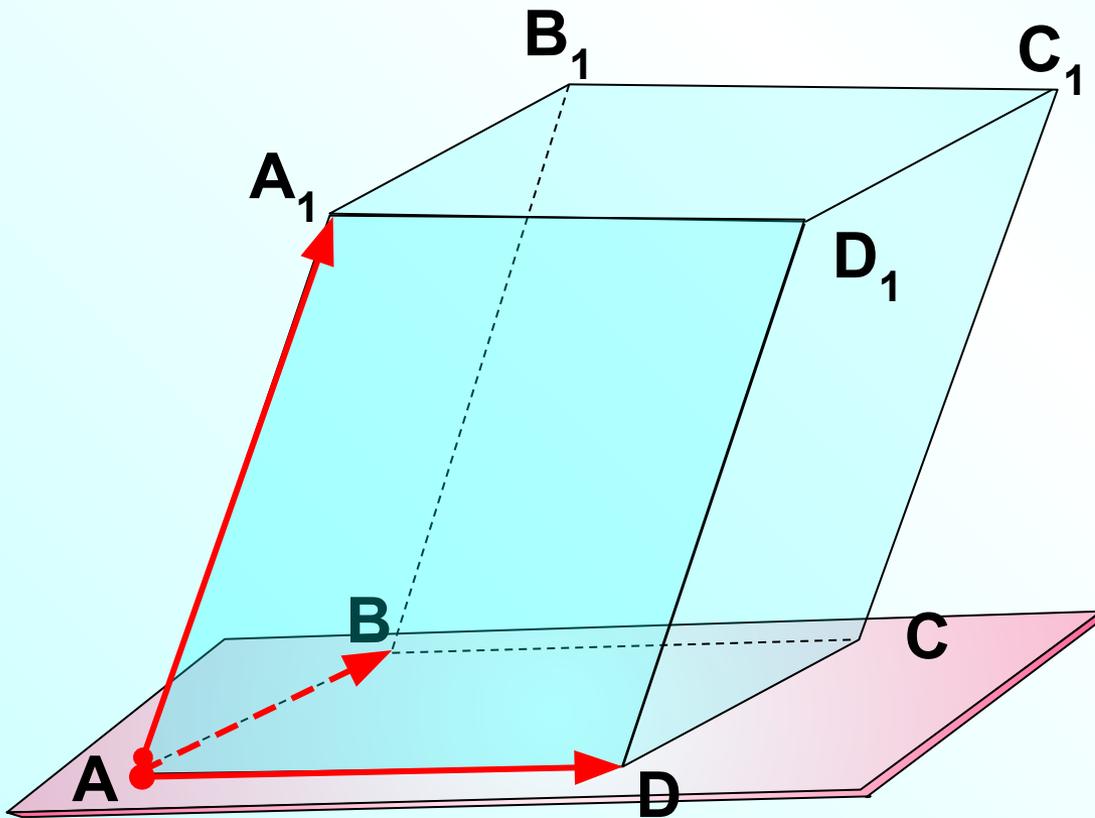
$\vec{AA_1}$, $\vec{CC_1}$, $\vec{BB_1}$

Три вектора, среди которых имеются
два коллинеарных, компланарны.



Дан параллелепипед $ABCA_1B_1C_1D_1$.
Компланарны ли векторы?

\vec{AB} , \vec{AD} , $\vec{AA_1}$ Векторы \vec{AB} , \vec{AD} и $\vec{AA_1}$ не компланарны, так как вектор $\vec{AA_1}$ не лежит в плоскости ABC .



Признак компланарности

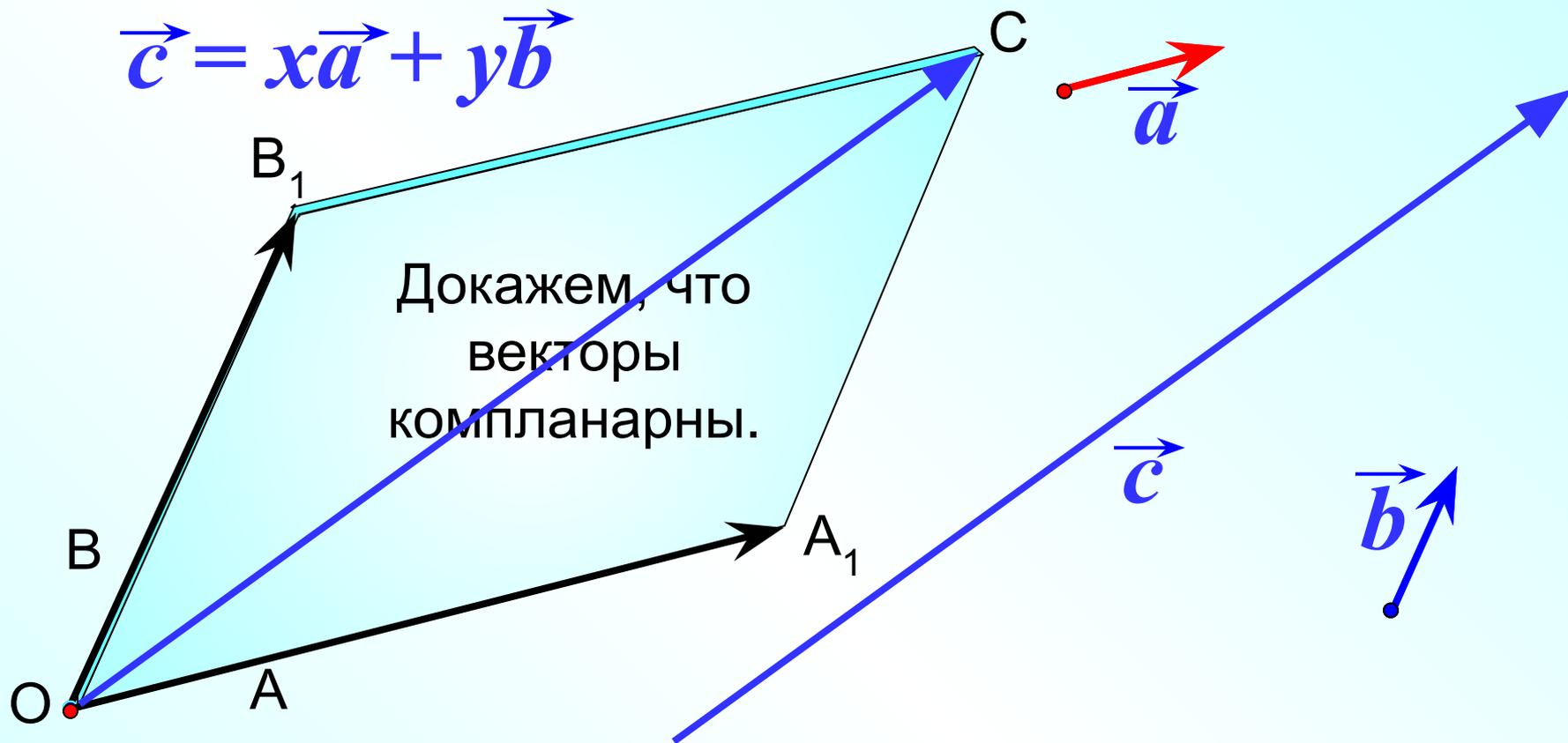
Если вектор \vec{c} можно разложить по векторам

\vec{a} и \vec{b} , т.е. представить в виде $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$

где x и y – некоторые числа, то векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c}

компланарны.

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$$



Векторы \vec{OA} и \vec{OB} лежат в одной плоскости OAB .

$$\vec{OA}_1 = x \vec{OA} \quad \vec{OB}_1 = y \vec{OB}$$

Векторы \vec{OA}_1 и \vec{OB}_1 также лежат плоскости OAB .

А следовательно, и их сумма – вектор $\vec{OC} = x \vec{OA} + y \vec{OB}$,
равный вектору \vec{c} .

Справедливо и обратное утверждение.

Если векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} компланарны, а векторы \vec{a} и \vec{b} не коллинеарны, то вектор \vec{c} можно разложить по векторам \vec{a} и \vec{b}

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}, \text{ причем}$$

коэффициенты разложения определяются

единственным образом.

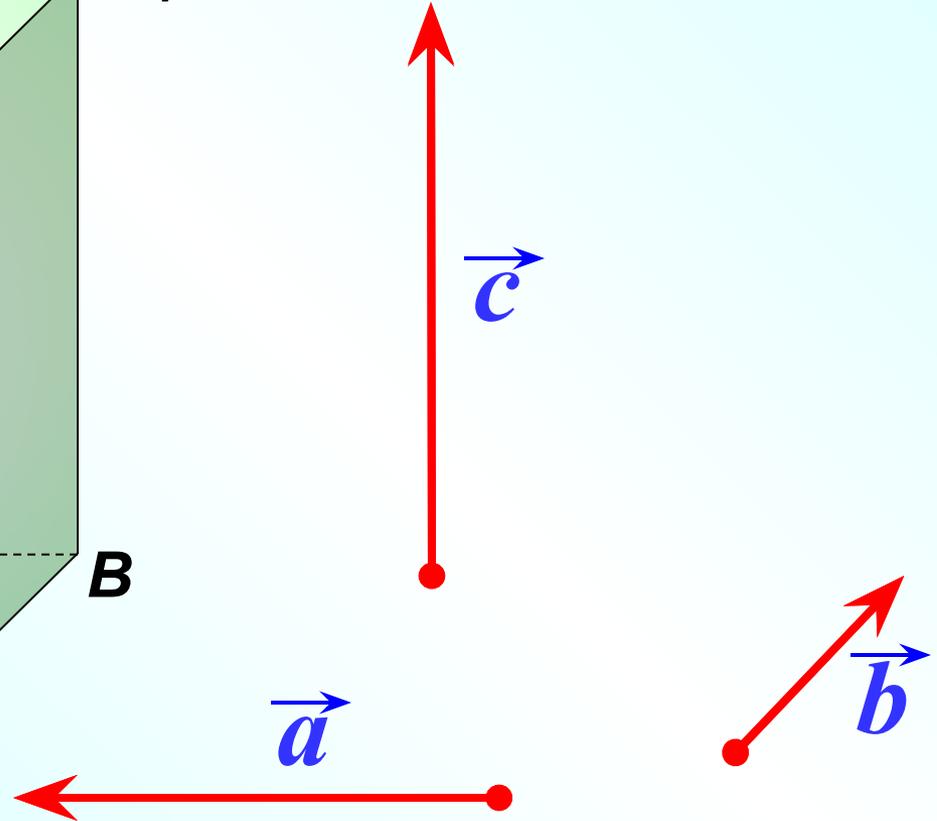
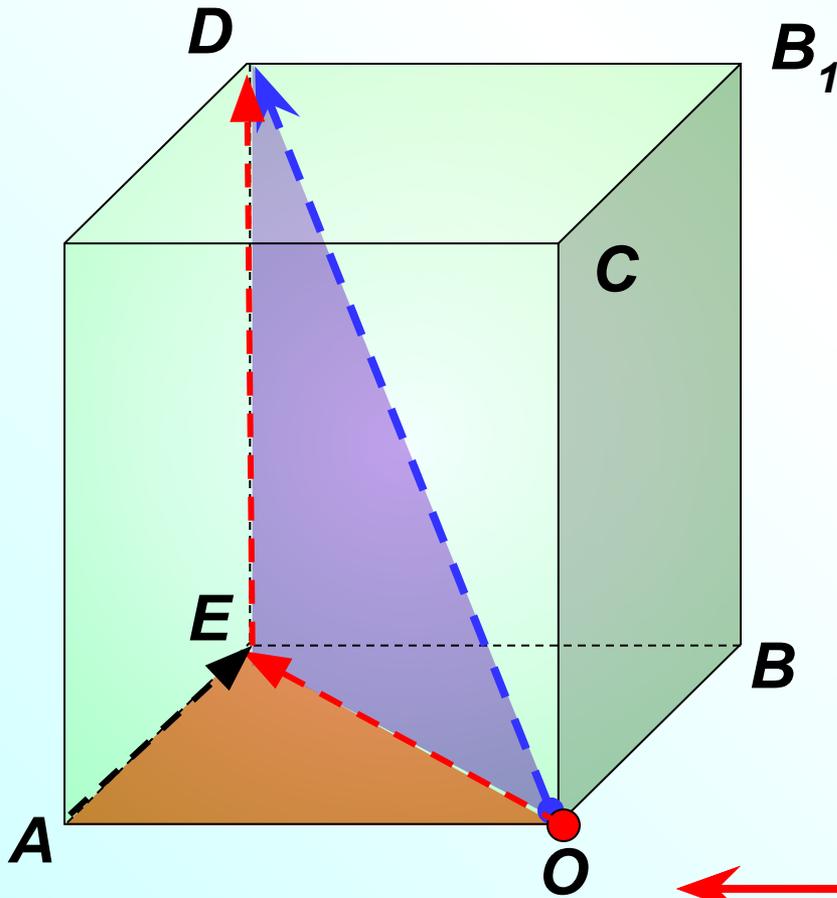
Правило параллелепипеда. $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} \Leftrightarrow \vec{OD}$

из $\triangle OED$

из $\triangle OAE$

$$\vec{OD} = \vec{OE} + \vec{ED} = (\vec{OA} + \vec{AE}) + \vec{ED} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} =$$

$$= \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$



Разложение вектора по трем некопланарным векторам. Если вектор представлен в виде

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$$

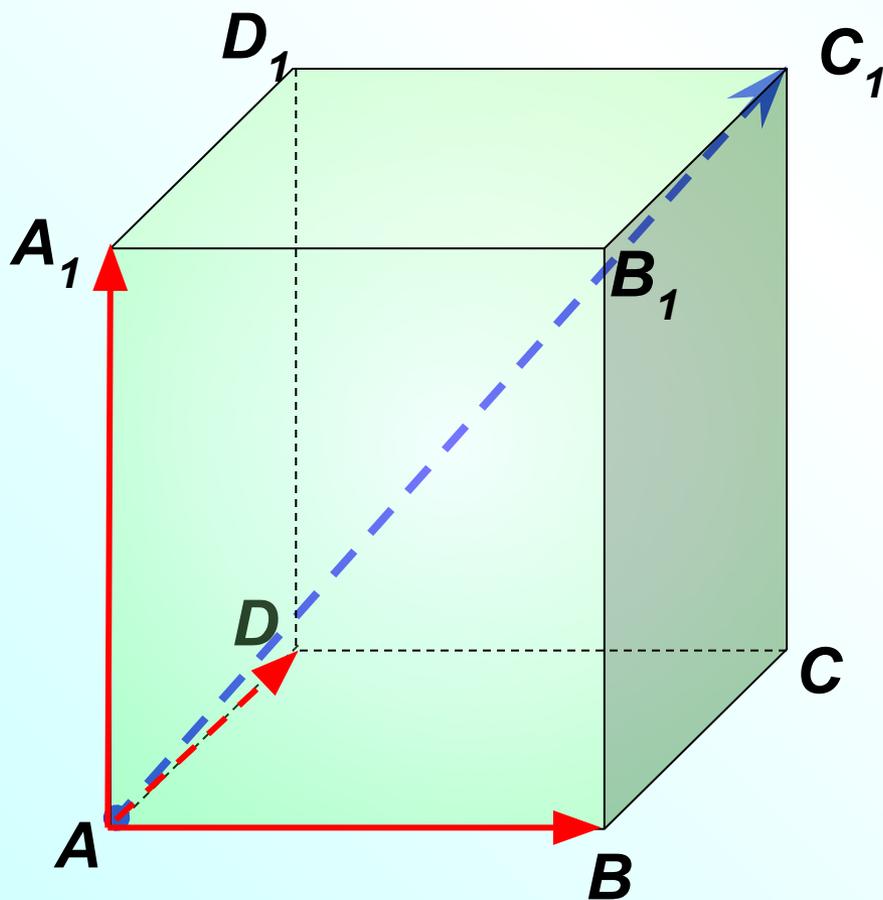
где x , y и z - некоторые числа, то говорят, что вектор \vec{p} разложен по векторам \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} . Числа x , y и z называются коэффициентами разложения.

Теорема о разложении вектора по трем некопланарным векторам.

Любой вектор можно разложить по трем данным некопланарным векторам, причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.

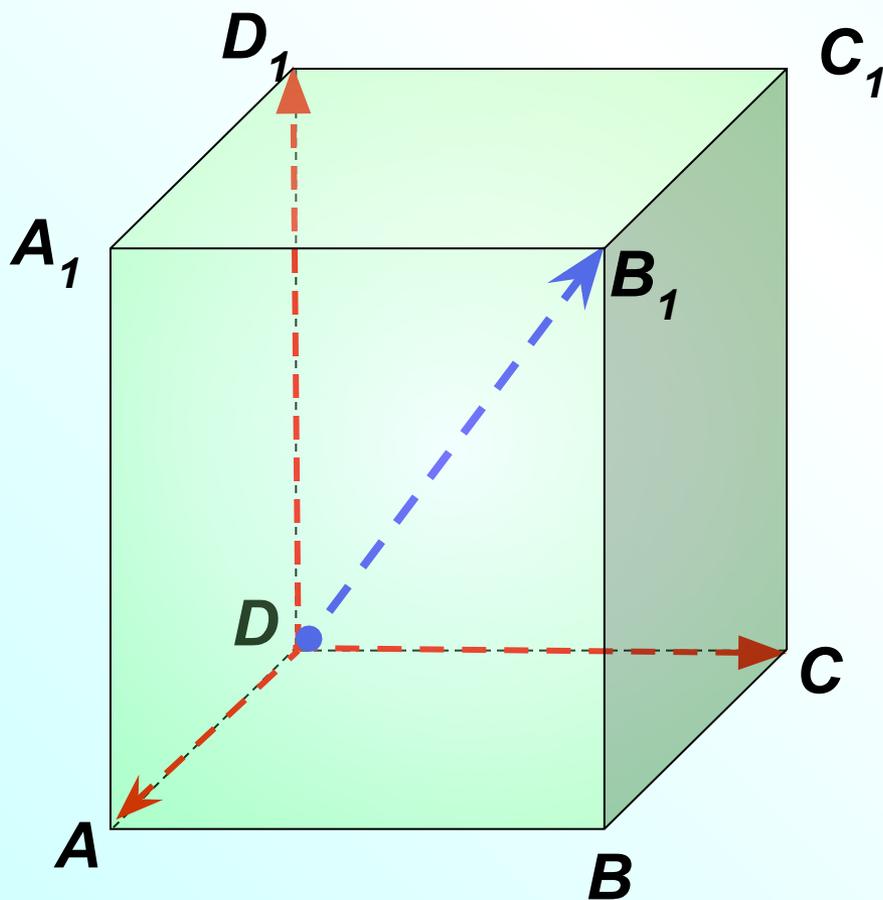
Дан параллелепипед $ABCA_1B_1C_1D_1$. Назовите вектор, начало и конец которого являются вершинами параллелепипеда, равный сумме векторов:

$$\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA_1} = \vec{AC_1}$$

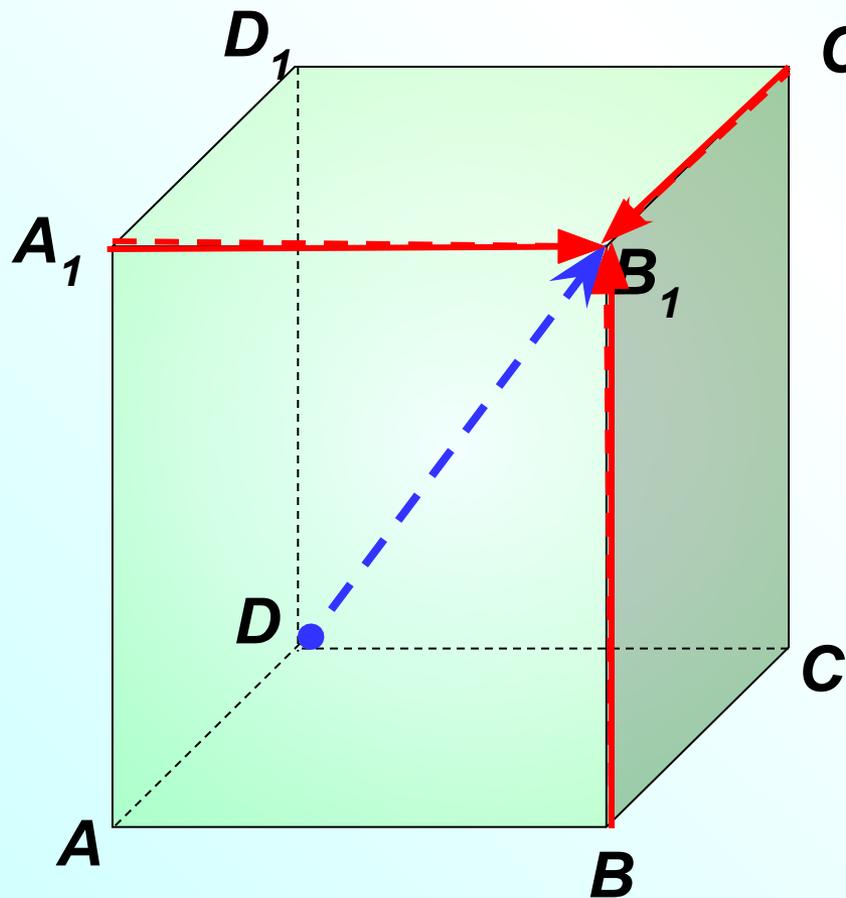


Дан параллелепипед $ABCA_1B_1C_1D_1$. Назовите вектор, начало и конец которого являются вершинами параллелепипеда, равный сумме векторов:

$$\vec{DA} + \vec{DC} + \vec{DD_1} = \vec{DB_1}$$

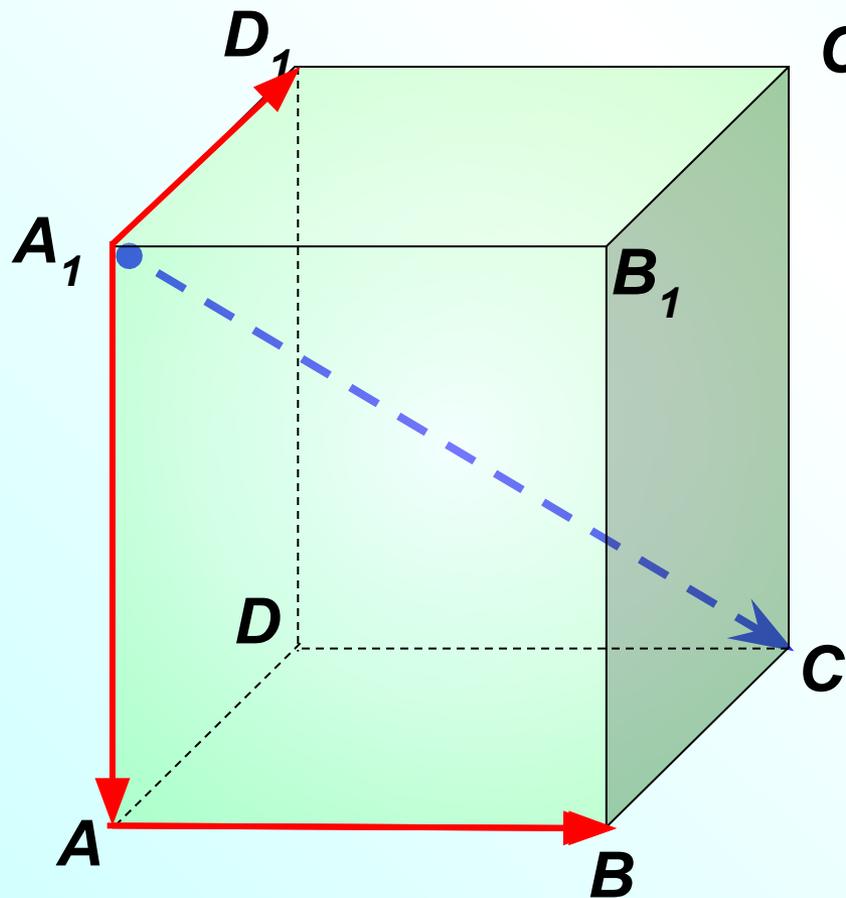


Дан параллелепипед $ABCA_1B_1C_1D_1$. Назовите вектор, начало и конец которого являются вершинами параллелепипеда, равный сумме векторов:



$$\begin{aligned} \vec{A_1B_1} + \vec{C_1B_1} + \vec{BB_1} \\ \vec{DC} + \vec{DA} + \vec{DD_1} = \vec{DB_1} \end{aligned}$$

Дан параллелепипед $ABCA_1B_1C_1D_1$. Назовите вектор, начало и конец которого являются вершинами параллелепипеда, равный сумме векторов:



$$\vec{A_1A} + \vec{A_1D_1} + \vec{AB}$$

$$\vec{A_1A} + \vec{A_1D_1} + \vec{A_1B_1} = \vec{A_1C}$$