

Трапеция и ее свойства.

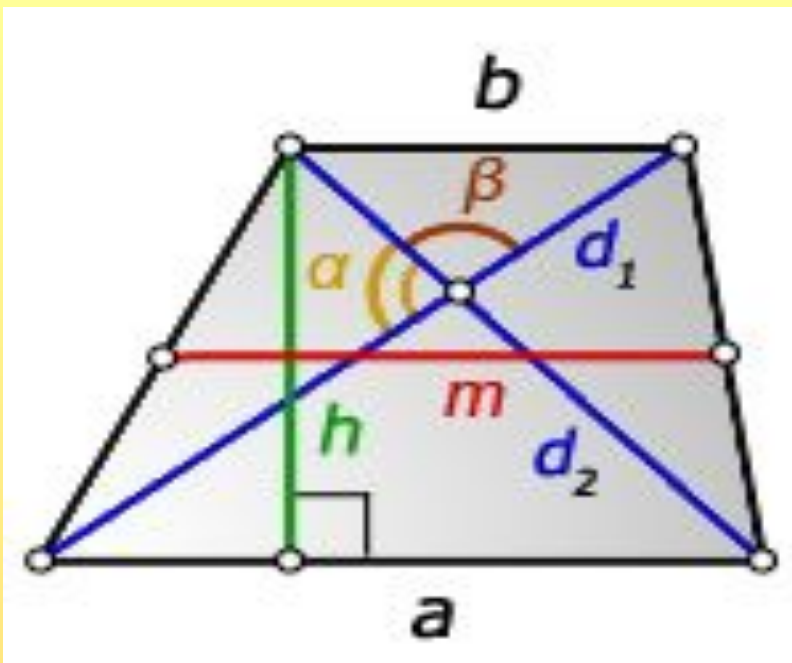
Работу выполнила учитель математики
Снегурова А.М.
МБОУ СОШ №5 г-к АНАПА.

*Тот, кто учится самостоятельно, достигнет в семь раз
больше того, кому все разъясняется.*

Артур Гитерман.

Элементы трапеции

- ***Трапеция*** — четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две стороны не параллельны.
- ***Элементы трапеции:***
- **Основания трапеции** - параллельные стороны
- **Боковые стороны** - две другие стороны
- **Средняя линия** - отрезок, соединяющий середины боковых сторон.
- **Вторая средняя линия** - отрезок, соединяющий середины оснований.
- **Диагонали трапеции** — это отрезки, соединяющие противоположные вершины трапеции.
- **Высота трапеции** - это расстояние между основаниями .



a - нижнее основание

b - верхнее основание

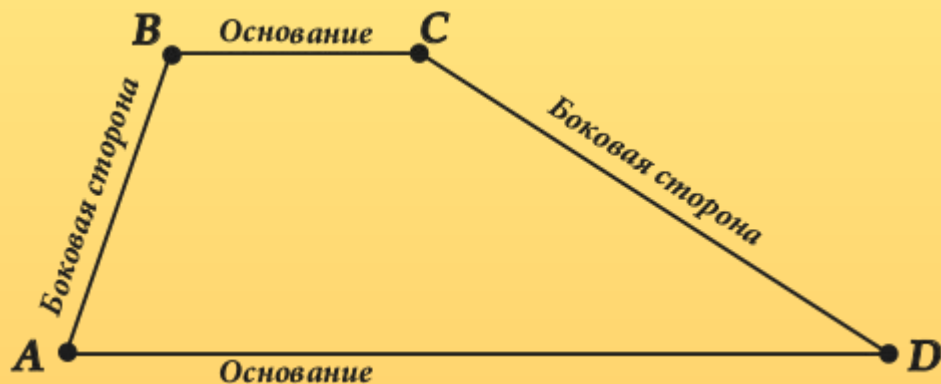
α, β - углы между
диагоналями

h - высота трапеции

m - средняя линия трапеции

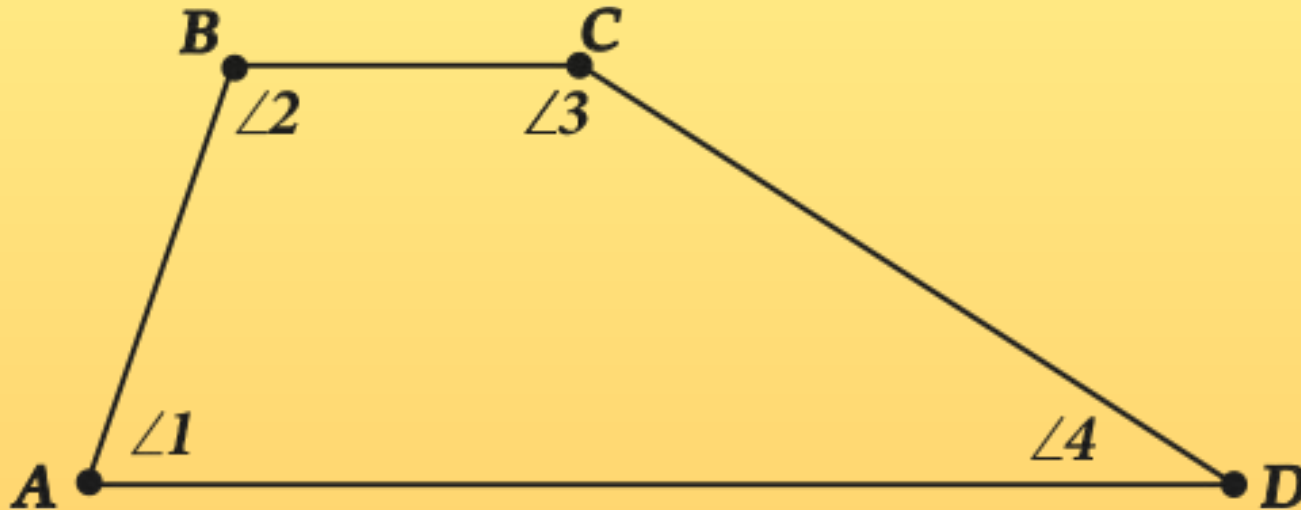
S - площадь трапеции

d_1, d_2 - диагонали трапеции

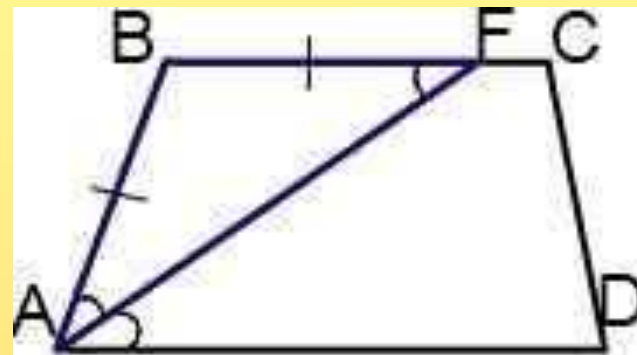
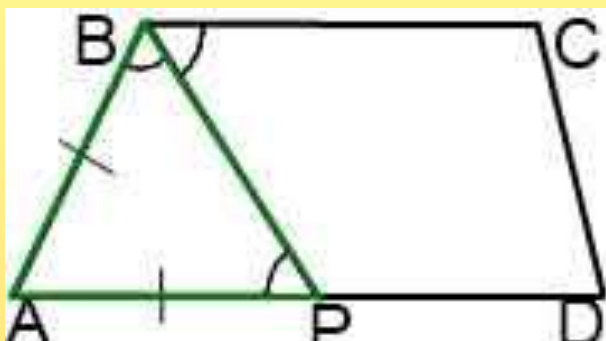


Сумма углов при каждой боковой стороне равна 180°

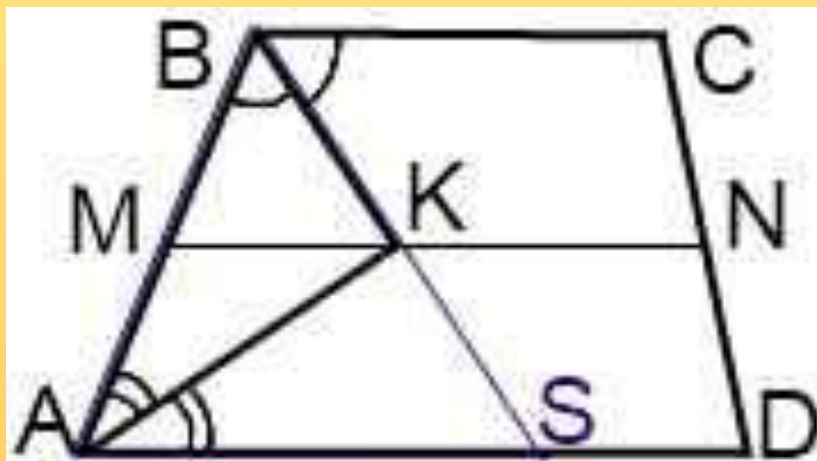
- $\angle 1 + \angle 2 = 180^{\circ}$
 -
- $\angle 3 + \angle 4 = 180^{\circ}$ ◦



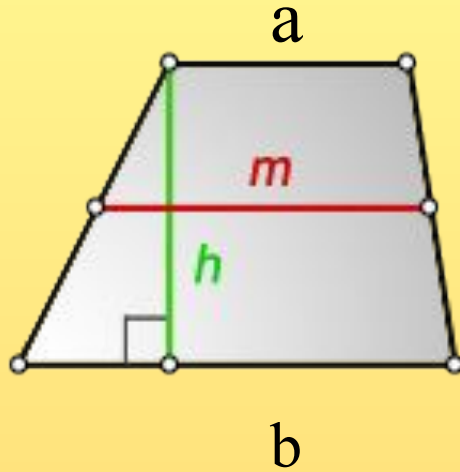
Биссектриса любого угла отсекает на ее основании (или на ее продолжении) отрезок, равный боковой стороне.



Биссектрисы углов при боковой стороне трапеции пересекаются под прямым углом.

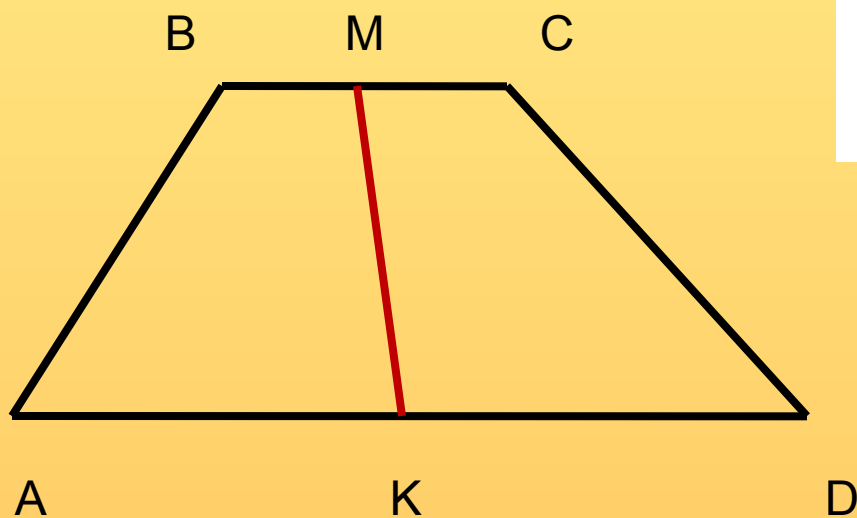


Средняя линия трапеции равна полусумме оснований и параллельна им.



$$m = \frac{a+b}{2} = \frac{S}{h}$$

Если сумма углов при любом основании трапеции равна 90 градусам, то отрезок, соединяющий середины оснований равен их полуразности:

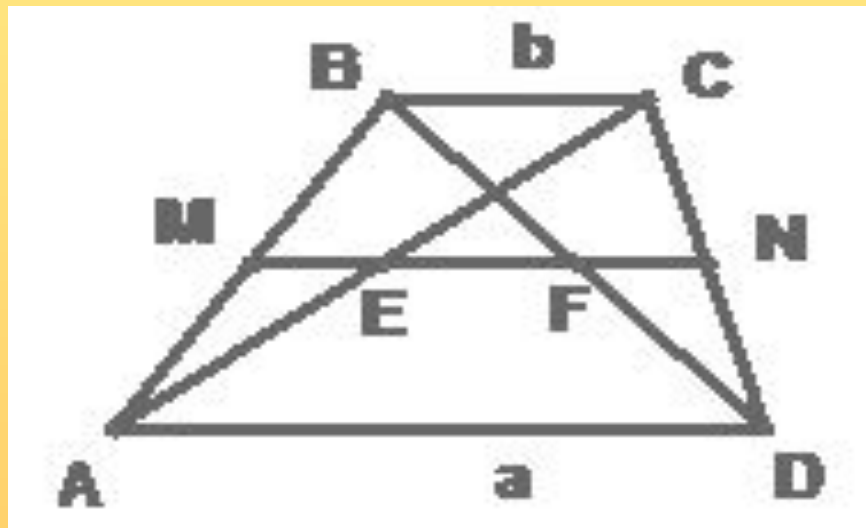


Если $\angle A + \angle D = 90^\circ$, то

$$MK = \frac{AD - BC}{2}$$

Средняя линия

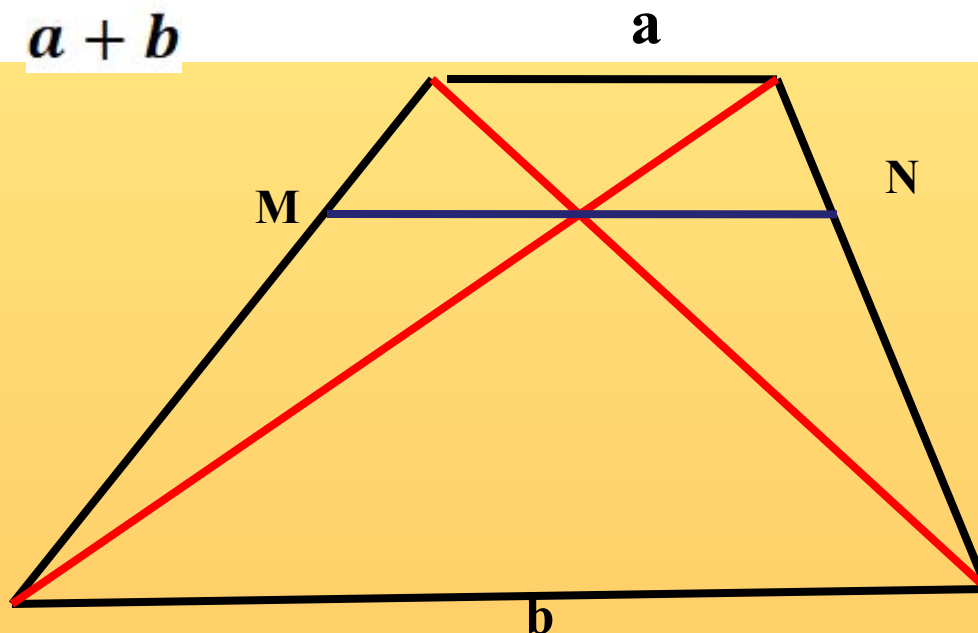
$$MN = \frac{a+b}{2}; \quad FN = ME = \frac{b}{2}; \quad EN = MF = \frac{a}{2}; \quad EF = \frac{a-b}{2}$$



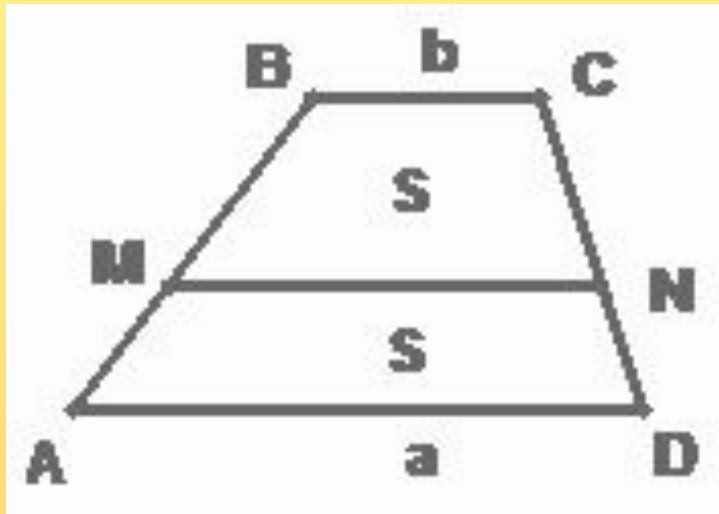
Линия, проходящая через точку пересечения диагоналей

Отрезок, параллельный основаниям и проходящий через точку пересечения диагоналей, делится последней пополам и равен среднему гармоническому длин оснований трапеции (формула Буракова).

$$MN = \frac{2ab}{a + b}$$



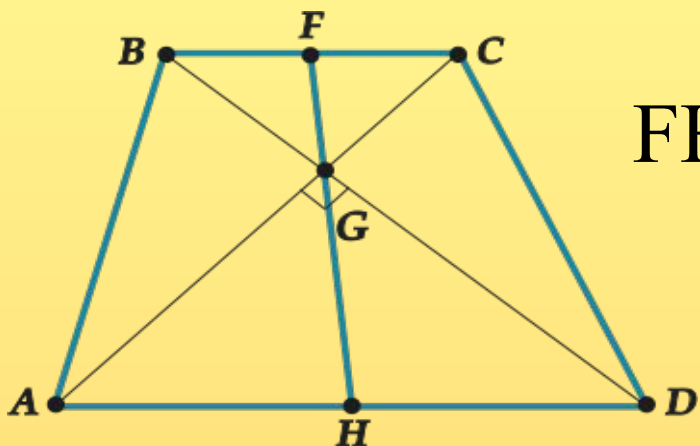
Линия, делящая площадь трапеции на
равновеликие части



$$MN = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

В трапеции с перпендикулярными диагоналями:

если $BF = FC$ и $AH = HD$



$$FH = \frac{AB + CD}{2}$$

Если провести отрезок, концы которого лежат на основаниях трапеции и проходящий через точку пересечения диагоналей трапеции, то соотношение составляющих его отрезков от стороны основания до точки пересечения диагоналей будет равно соотношению оснований трапеции. Это справедливо и для диагоналей и для высоты.

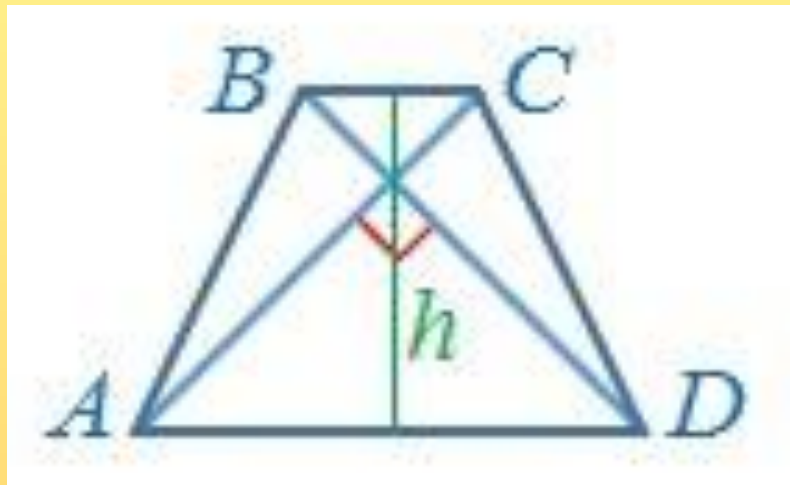
$$\frac{FG}{GH} = \frac{BC}{AD} = \frac{BC}{AD}$$

**А площадь такой трапеции равна квадрату
высоты :**

$$S_{ABCD} = h^2$$

В равнобедренной трапеции равны не только боковые стороны, но и диагонали:

$$AC = BD$$



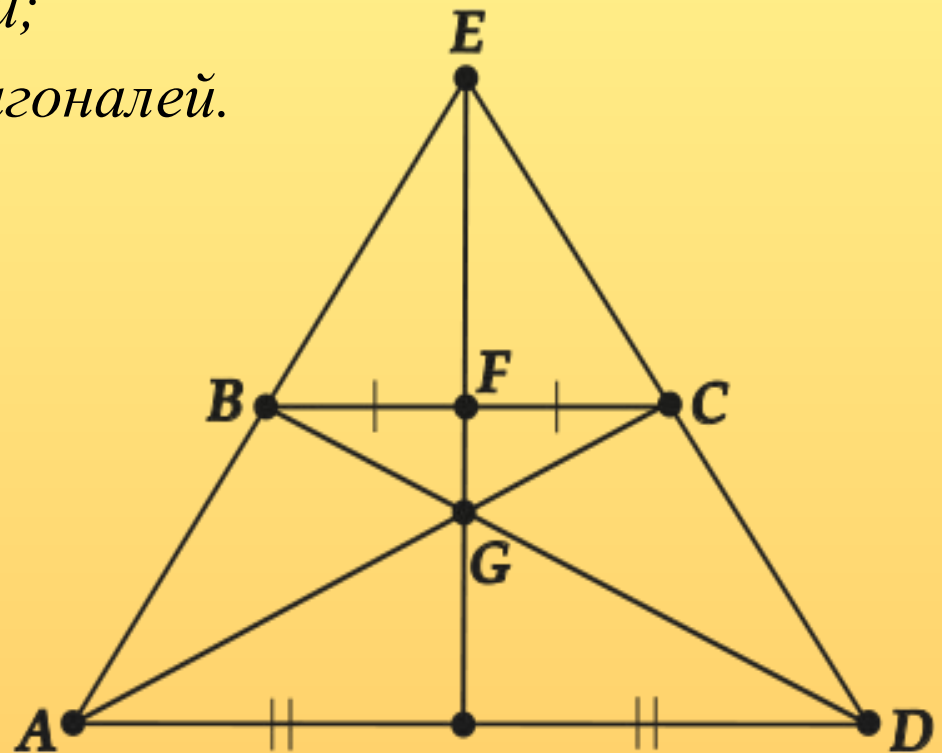
$$h = m$$

$$h = \frac{AB + CD}{2}$$

Если в равнобедренной трапеции диагонали перпендикулярны, то средняя линия равна высоте трапеции.

В любой трапеции следующие четыре точки лежат на одной прямой:

- 1) E – точка пересечения продолжений боковых сторон;
- 2) F и H – середины оснований;
- 3) G – точка пересечения диагоналей.



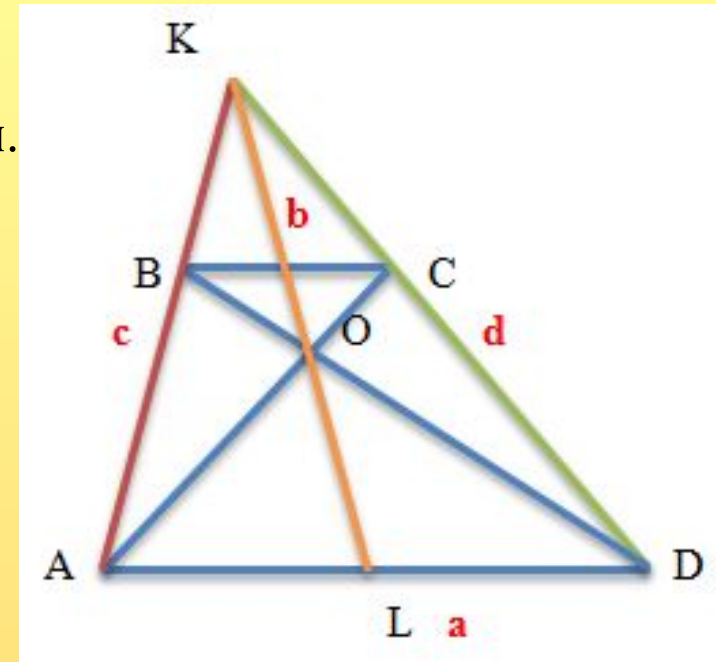
Если продлить стороны трапеции в сторону меньшего основания, то точка пересечения сторон будет **совпадать с прямой линией, которая проходит через середины оснований**.

Таким образом, любая трапеция может быть достроена до треугольника.

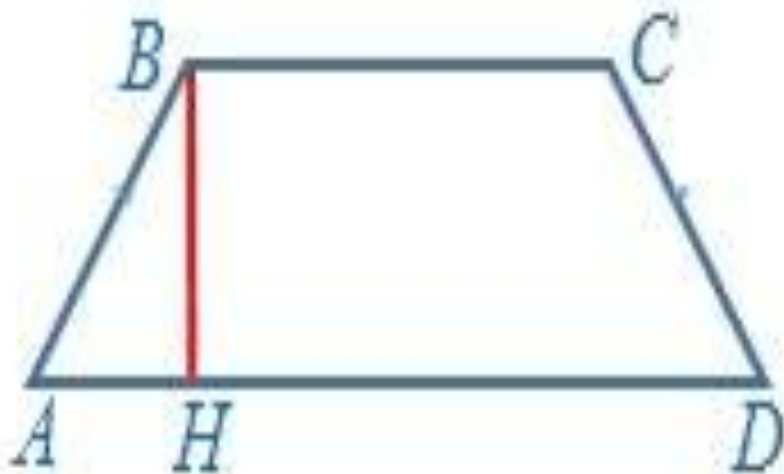
При этом:

Треугольники, образованные основаниями трапеции с общей вершиной в точке пересечения продленных боковых сторон являются подобными.

Прямая, соединяющая середины оснований трапеции, является, одновременно, медианой построенного треугольника



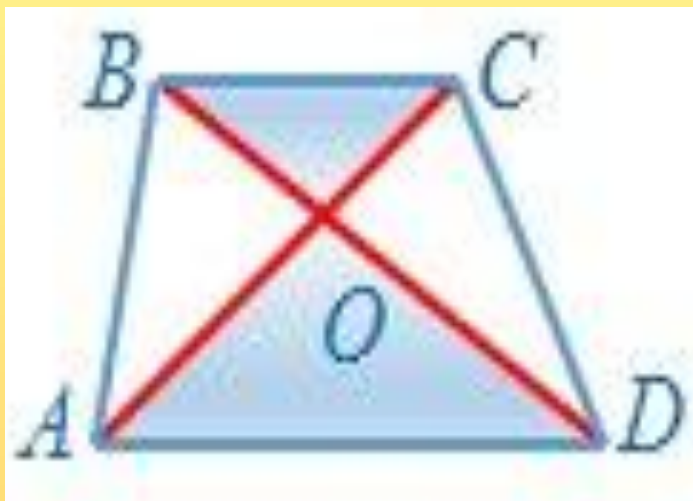
Высота, проведенная из вершины тупого угла в равнобокой трапеции делит большее основание на два отрезка:



$$AH = \frac{AD - BC}{2};$$

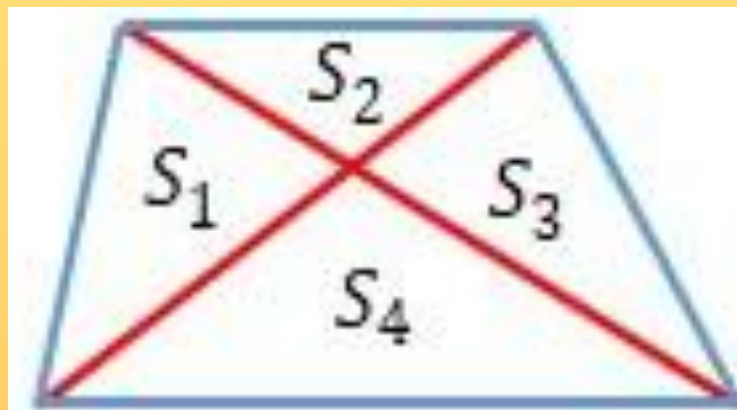
$$HD = \frac{AD + BC}{2}$$

Треугольники, образованные основаниями и диагоналями, подобны. Их коэффициент подобия k равен отношению большего основания к меньшему основанию трапеции.



$$\frac{AD}{BC} = k$$

$$\frac{S_{AOD}}{S_{BOC}} = k^2$$

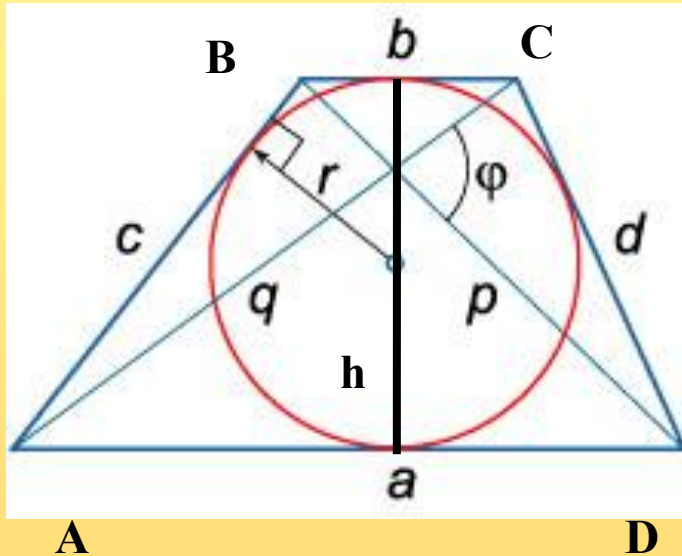


$$S_1 = S_3$$

$$S_1^2 = S_2 \cdot S_4$$

Если в произвольной трапеции сумма оснований равна сумме боковых сторон, то в нее можно вписать окружность:

$$a+b = c+d$$



Диаметр вписанной в трапецию окружности равен высоте трапеции, радиус — половине высоты:

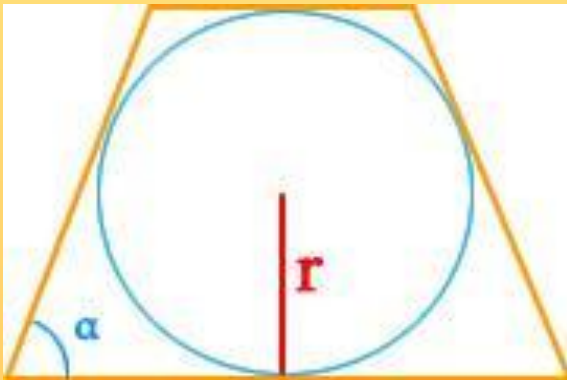
$$d=h \quad \text{или} \quad r = \frac{h}{2}$$

Если в трапецию можно вписать окружность, то квадрат высоты равен произведению оснований

$$h^2 = BC \cdot AD$$

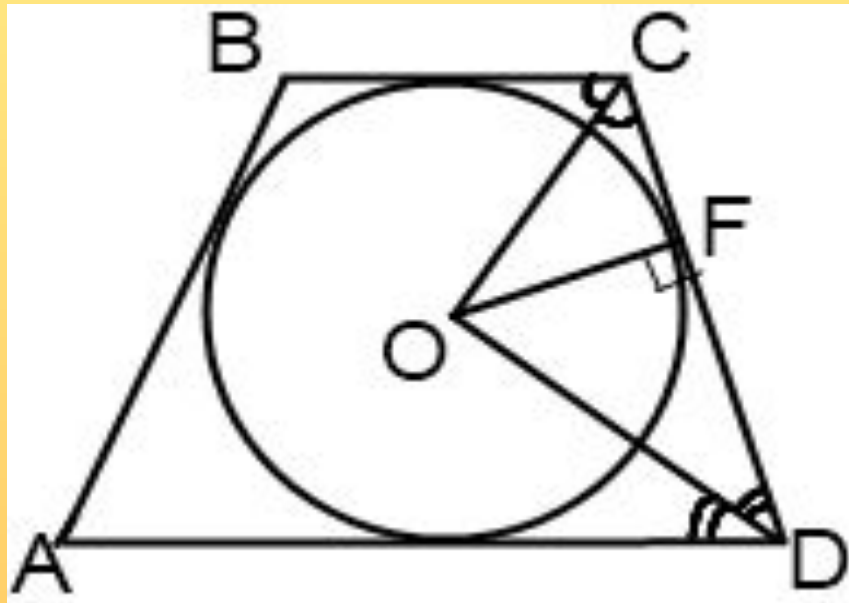
Площадь трапеции равна отношению квадрата радиуса вписанной окружности умноженное на четыре и синуса острого угла между боковой стороной и основанием

$$S = \frac{4r^2}{\sin \alpha}$$



В трапецию можно вписать окружность, если:

- сумма длин боковых сторон равна сумме длин оснований:
 $AB + CD = BC + AD$;
- трапеция равнобедренная;
- боковая сторона трапеции видна из центра вписанной окружности под прямым углом.



Формулы в помощь:

*Средняя линия через площадь и высоту:

$$m = \frac{S}{h}$$

*Высота через площадь и длины оснований:

$$h = \frac{2S}{a + b}$$

*Высота через площадь и длину средней линии:

$$h = \frac{2S}{m}$$

*Площадь через среднюю линию и высоту **$S = h \cdot m$**

*В равнобедренной трапеции длина диагонали равна **$d = \sqrt{c^2 + ab}$**

где c — боковая сторона, a и b — основания или

$$d = \sqrt{h^2 + m^2}$$

*Длина основания через среднюю линию и другое основание

$$a = 2m - b \text{ и } b = 2m - a$$

Описанная

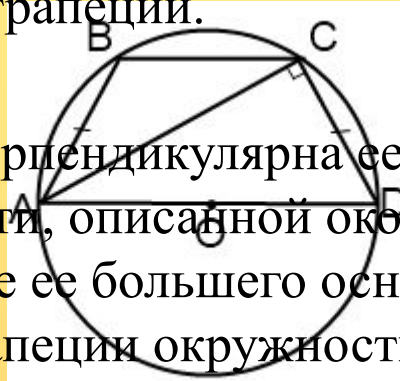
окру́жность многоугольника — окружность,
содержащая все вершины многоугольника.
Центром является точка (принято обозначать {О})
пересечения серединных перпендикуляров к
сторонам многоугольника.

- Радиус окружности, описанной около трапеции, можно найти как радиус окружности, описанной около одного из двух треугольников, на которые трапецию делит ее диагональ.
- Где находится центр окружности, описанной около трапеции? Это зависит от угла между диагональю трапеции и ее боковой стороной.
-

Окружность, описанная около трапеции.

Четырехугольник можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда сумма его противоположных углов равна 180° . Отсюда следует, что *вписать в окружность можно только равнобокую трапецию.*

Радиус описанной окружности — точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам трапеции.



Если диагональ трапеции перпендикулярна ее боковой стороне, то центр окружности, описанной около трапеции, лежит на середине ее большего основания. Радиус описанной около трапеции окружности в этом случае равен половине ее большего основания:

$$R = \frac{1}{2}AD$$