

# Основы гидромеханики механика жидкости и газа

Основные понятия и определения

Физические свойства жидкостей

Элементы гидростатики

Элементы гидродинамики



# Гидромеханика

□ - наука, изучающая равновесие и движение жидкости, а также взаимодействие между жидкостью и твердыми частицами, погруженными в жидкость полностью или частично.

□ По принципу целенаправленности гидромеханические процессы можно разделить на:

1. Процессы перемещения потоков в трубопроводах и аппаратах;
2. Процессы, протекающие *с разделением* неоднородных систем (осаждение, фильтрование, центрифугирование)
3. Процессы, протекающие *с образованием* неоднородных систем (перемешивание, псевдооживление и др.)



**Законы гидромеханики и их практические приложения изучают в**

**ГИТАВЛИКЕ**



# Гидравлика

- наука, изучающая  
законы равновесия  
и движения жидкостей

## Гидростатика

Учение о  
равновесии  
жидкостей

## Гидродинамика

Учение о  
движении  
жидкостей



# Жидкости

- физические тела, которые легко изменяют свою форму под действием приложенных сил.



Капельные

е

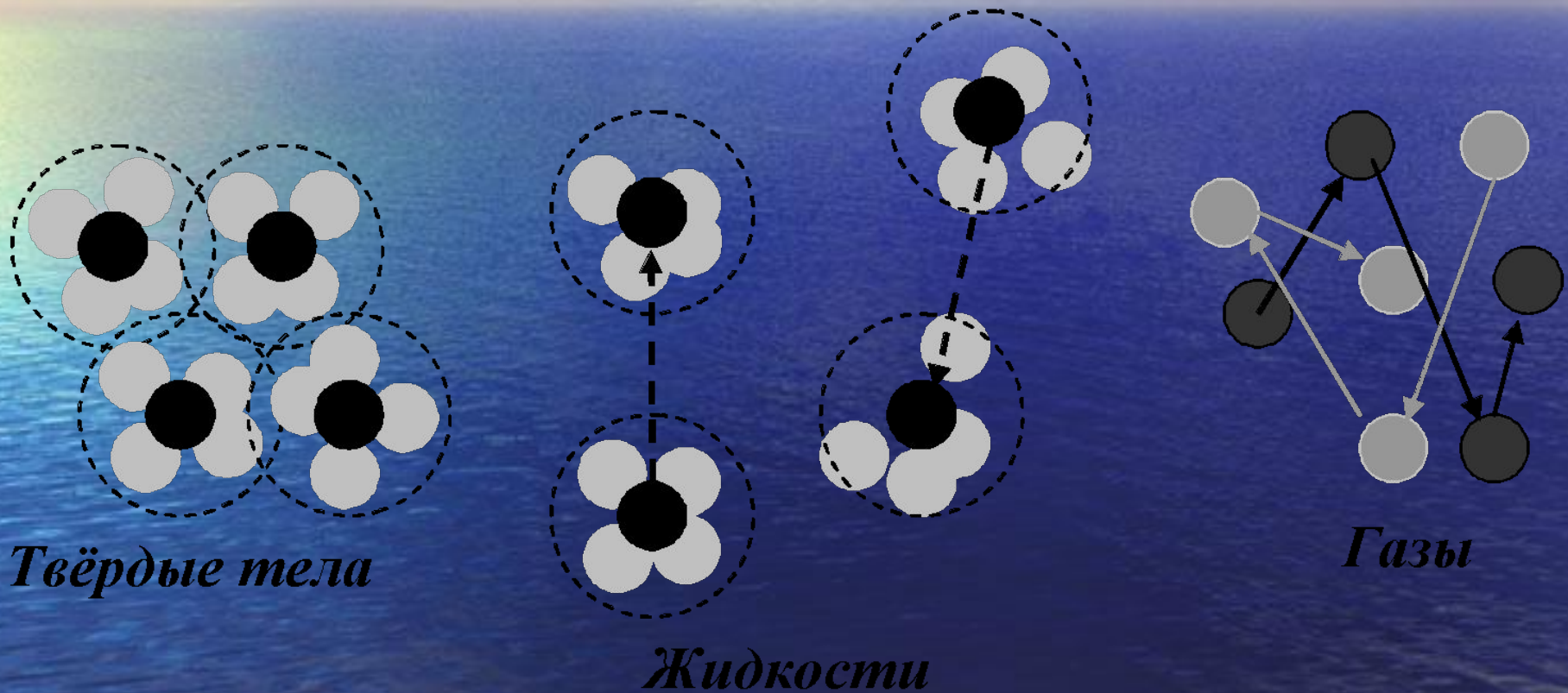


Газообразные

характеризуются малой сжимаемостью и относительно небольшим изменением объема при изменении температуры.



# Молекулярное строение



*Твёрдые тела*

*Жидкости*

*Газы*

Рисунок 1

## Предмет гидравлики

- Гидравлика— наука о движении и покое воды и других жидкостей. Жидкость в гидравлике представляют как сплошную среду, легко изменяющую форму под действием внешних сил.
- Сплошная среда— это масса, физические и механические параметры которой являются функциями координат в выбранной системе отсчета. Молекулярное строение жидкостей заменяется сплошной средой той же массы.

# Понятие жидкости. Свойства капельной, некапельной и идеальной жидкости

Жидкостью называется физическое тело, обладающее текучестью и не имеющее своей формы, но принимающее форму того сосуда, в котором оно находится.

Текучестью называется способность жидкости изменять свою форму, не дробясь на части, под действием даже небольших сил.

Различают два вида жидкостей:  
капельные и некапельные (газообразные).

- **Капельные жидкости:** оказывают большое сопротивление изменению объема и трудно поддаются сжатию.
- При изменении давления и температуры их объем изменяется весьма незначительно.
- Любая капельная жидкость может переходить в газообразное состояние при определенной температуре и давлении.
- Практически не оказывают заметного сопротивления растягивающим усилиям.
- Оказывают существенное сопротивление сдвигающим силам.



## **Некапельные (газообразные) жидкости**

- Изменяют свой объем в зависимости от этих же факторов в значительной степени.
- При понижении температуры и повышении давления могут переходить в жидкое состояние.

**Идеальная жидкость** — это жидкость, лишенная вязкости ( $\mu = 0$ ). Эту модель используют для упрощения расчетов в случае, когда силами вязкости можно пренебречь.

# ● Физические свойства жидкости

1 – Плотность  $\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} \quad [\rho] = \text{кг/м}^3$

$$\rho = \rho(p, T)$$

$$pV = nRT; \quad (n = m/M) \Rightarrow$$

$$\frac{p}{\rho} = R_0 T \quad (R_0 \text{ — универсальная газовая постоянная}) \quad R = 8,314 \text{ Дж/моль}\cdot\text{К}$$

2 – Сжимаемость жидкости

определяется производной  $\partial p / \partial \rho$ ,

Несмотря на значительную сжимаемость газов по сравнению с жидкостями при скоростях в среде  $v < 0,1c$  ( $c$  — скорость звука в среде), при решении конкретных задач сжимаемостью можно пренебречь. Поэтому понятие “несжимаемая жидкость” нашло широкое применение.

$$\beta = -\frac{\Delta V}{V \Delta p} = \frac{\Delta \rho}{\rho \Delta p} \Rightarrow \beta = \frac{\partial \rho}{\rho \partial p} \quad E_0 = 1/\beta$$

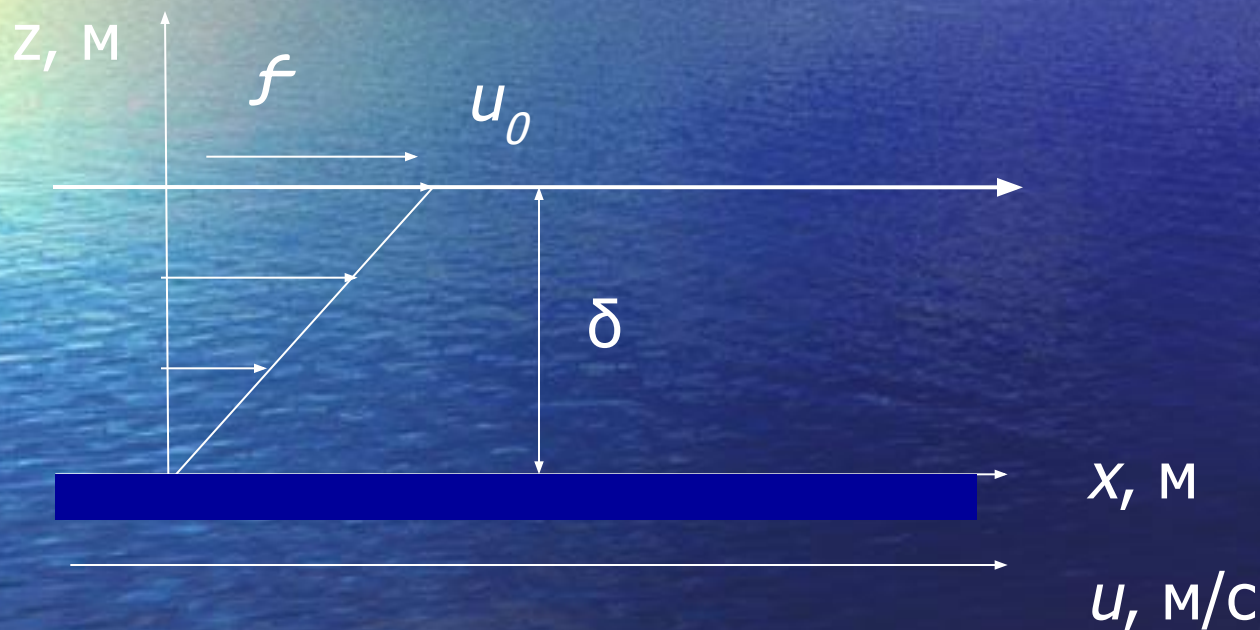
$$c = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}} \Rightarrow c = \sqrt{k \frac{p}{\rho}} \Rightarrow c = \sqrt{\frac{E_0}{\rho}}$$

$$c_{\text{возд}} = 330 \text{ м/с}; \quad c_{\text{вод}} = 1414 \text{ м/с}; \quad \text{Ma} = u/c$$

скорость распространения малых возмущений давления в данной среде,

# ВЯЗКОСТЬ ИЛИ ВНУТРЕННЕЕ ТРЕНИЕ В ЖИДКОСТЯХ

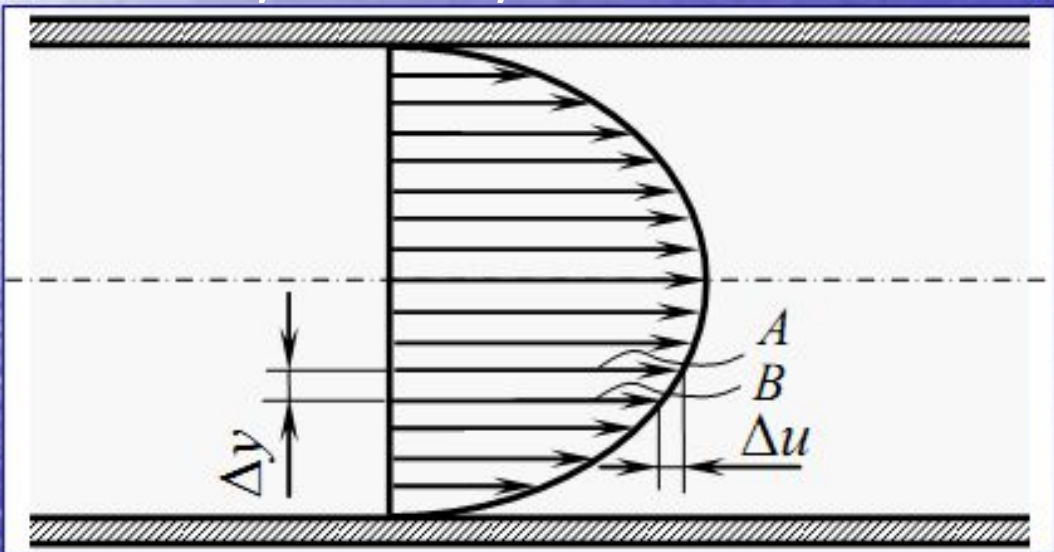
Характеризует ее способность сопротивляться сдвиговым усилиям.



$$f = \mu S u_0 / \delta$$

$$\tau = \mu \frac{du}{dz}$$

где  $\mu$  – коэффициент пропорциональности или динамический коэффициент вязкости.  
Единица измерения – Па·с; Пуаз (П):  
 $1 \text{ П} = 0,1 \text{ Па}\cdot\text{с}$ ;  $1 \text{ Па}\cdot\text{с} = 10 \text{ П}$



На практике чаще используется  
***кинематический коэффициент вязкости***

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

$$1 \text{ стокс} = 1 \frac{\text{пуаз}}{\text{г/см}^3} = 1 \frac{\text{см}^2}{\text{с}}$$



3

$$\tau = \mu \frac{du}{dz}$$

ньютоновская (вода, керосин, спирт, газы)

1

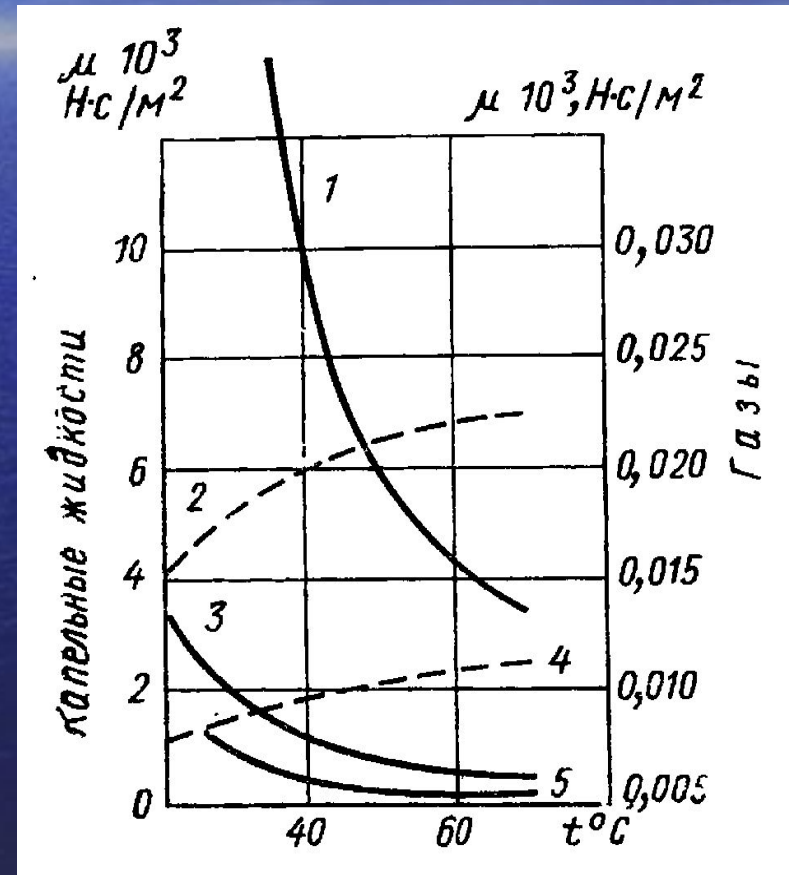
$$\tau = \tau_0 + \mu \frac{du}{dz}$$

вязкопластическая или бингамовская (глинистые и цементные р-ры; пасты; пена; масл. краски)

2, 4

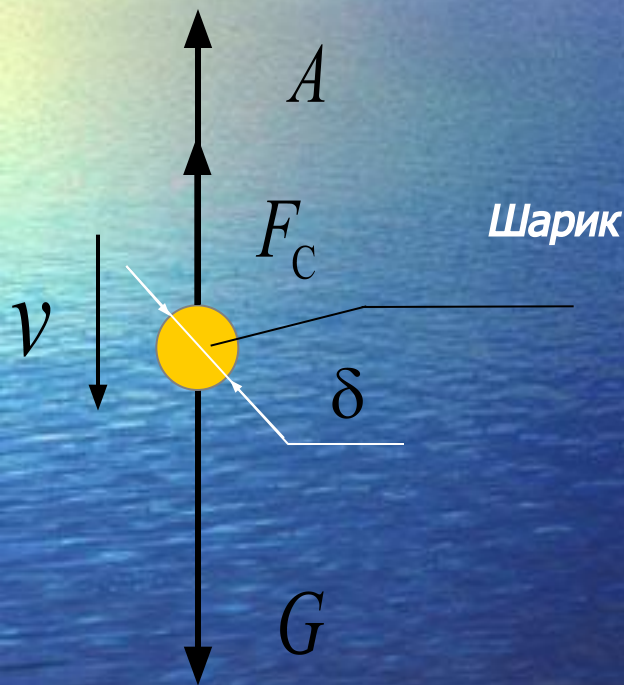
$$\tau = C \left( \frac{du}{dz} \right)^n$$

2 – псевдопластическая (суспензии из ассим. част.; р-ры полимеров; еллоулоза);  
4 – дилатантная (клейстер, крахмал)



1 – масло; 2 – воздух; 3 – керосин; 4 – водород; 5 – вода

Вязкость жидкости определяется экспериментально с помощью приборов, которые называются вискозиметрами. Примером такого прибора может служить вискозиметр Стокса.

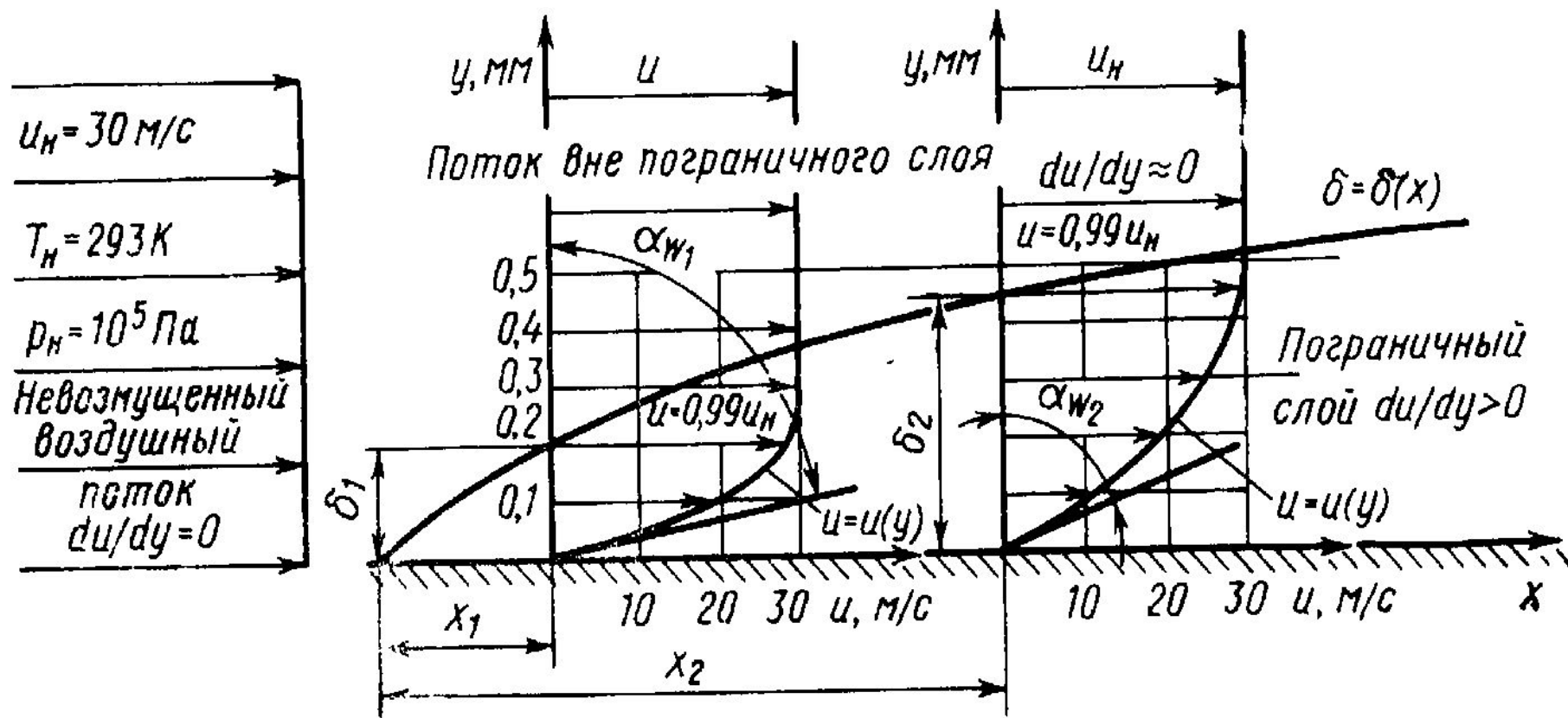


$$G = \rho_{\text{ш}} W g, \quad A = \rho_{\text{ж}} W g,$$

$$F_C = (\sigma + \tau) \pi \delta^2 = 3\pi \mu \nu \delta$$

$$\mu = \frac{1}{18} g \delta^2 \frac{1}{v} (\rho_{\text{ш}} - \rho_{\text{ж}})$$

С вязкостью связано возникновение динамического пограничного слоя при обтекании жидкостями твердых тел.





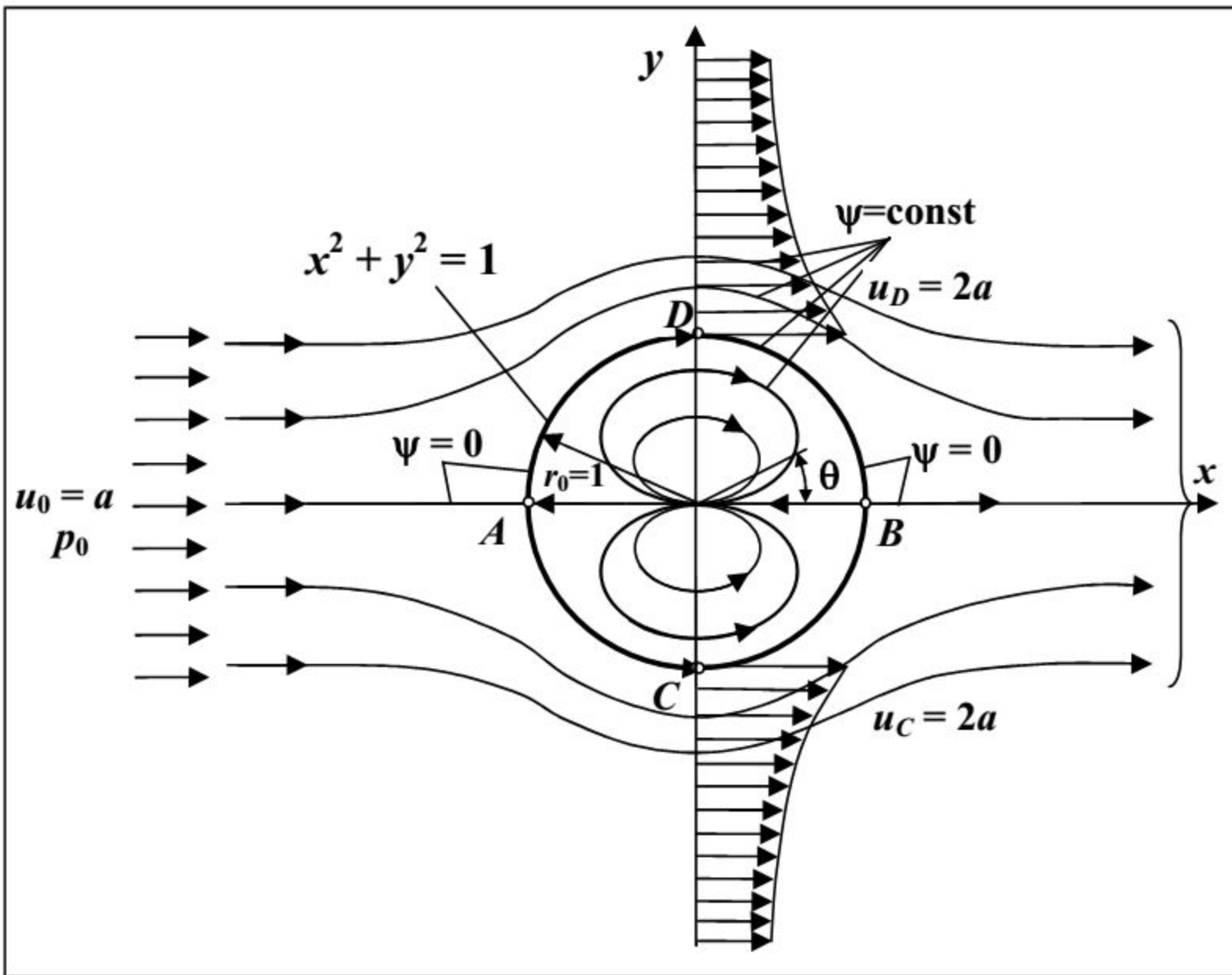


Рисунок 5.3 – Поперечное обтекание цилиндра потенциальным потоком идеальной жидкости

# Парадокс Даламбера

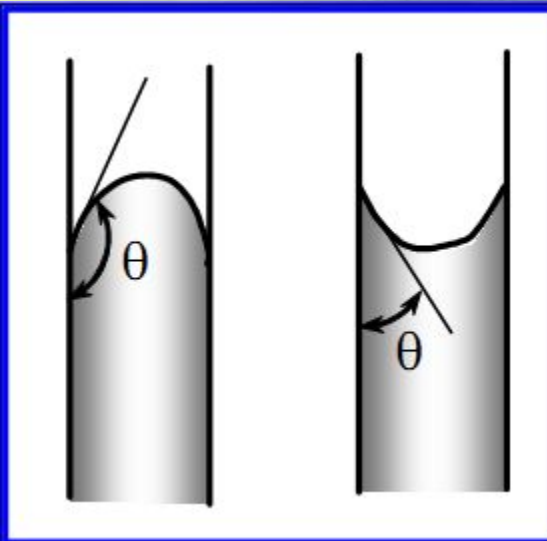
В силу полной симметрии распределения давления по поверхности цилиндра равнодействующая сил давления равна нулю. Полученный вывод называется парадоксом Даламбера: при дозвуковом безотрывном обтекании тел идеальной жидкостью сила лобового сопротивления равна нулю: сила трения отсутствует, а вторая составляющая — сила сопротивления давления, действующая на переднюю часть цилиндра, уравновешивается силой давления на кормовую часть. Парадокс состоит в несоответствии этого вывода с экспериментальными данными — при обтекании тел реальными жидкостями всегда возникает сила лобового сопротивления



Рисунок 5.4 – Распределение скорости и давления по поверхности цилиндра

## Поверхностное натяжение

Коэффициент поверхностного натяжения –  $\sigma^*$ , Н/м.  
Физический смысл – это свободная потенциальная энергия единицы поверхности раздела, обусловленная действием сил притяжения на молекулы вблизи поверхности раздела



## Капиллярные явления

На поверхности раздела трех фаз: твердой стенки, жидкости и газа образуется краевой угол  $\theta$ . Величина угла зависит только от природы соприкасающихся сред, и не зависит от формы сосуда и силы тяжести.

$$\Delta p = \sigma^* \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \Rightarrow \Delta p = \frac{4\sigma^*}{d}$$

# Давление насыщенных паров $p_n$

Характеризует испаряемость жидкостей. Зависит от температуры  $T$ . Эта величина определяет то минимальное абсолютное давление, при котором жидкость не теряет своей сплошности.

**местное нарушение сплошности течения** с образованием паровых и газовых пузырей (каверн), обусловленное местным падением давления в потоке, называется **кавитацией**.

Кавитация сопровождается характерным шумом, а при длительном её воздействии также и **эрозионным разрушением** твёрдых, как правило, металлических стенок. Последнее объясняется тем, что конденсация пузырьков пара (и сжатие пузырьков газа) происходит со значительной скоростью, частицы жидкости, заполняющие полость конденсирующегося пузырька, устремляются к его центру и в момент завершения конденсации вызывают местный гидравлический удар, т. е. значительное местное повышение давления. Разрушение материала при кавитации происходит не там, где выделяются пузырьки, а там, где они конденсируются вследствие длительного воздействия знакопеременных сил.

Кавитация в обычных случаях явление нежелательное.

При кавитации также возрастает сопротивление трубопроводов и, следовательно, уменьшается их пропускная способность.

# ЭЛЕМЕНТЫ КИНЕМАТИКИ ЖИДКОСТИ

Метод Эйлера заключается в непосредственном описании поля скоростей в пространстве и времени, т. е.

$$\vec{u} = \vec{u}(\vec{r}, t)$$

или  $u_x = u_x(x, y, z, t); u_y = u_y(x, y, z, t); u_z = u_z(x, y, z, t)$

Если  $\partial u / \partial t = 0$  или, иначе,  $u = u(x, y, z)$ , то движение называют установившемся или стационарным

Если  $\partial u / \partial t \neq 0$ , то неустановившемся или нестационарным

Линия тока — это линия, в каждой точке которой в данный момент времени вектор скорости  $\vec{u}$  направлен по касательной, т. е.

$$\vec{u} \times d\vec{r} \Rightarrow \vec{u} \times d\vec{r} = 0 \Rightarrow$$
$$(u_y dz - u_z dy)i + (u_z dx - u_x dz)j + (u_x dy - u_y dx)k = 0$$

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z}$$

Траектория— кривая, вдоль которой происходит перемещение частицы жидкости, т. е.

$$d\vec{r} = \vec{u} dt \Rightarrow dx = u_x dt; \quad dy = u_y dt; \quad dz = u_z dt$$

$$dt = \frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z}$$

**Трубка тока.** Если через каждую точку произвольного контура провести линии тока, то получим трубчатую поверхность, называемую трубкой тока. Если контур мал, то трубка тока называется элементарной.

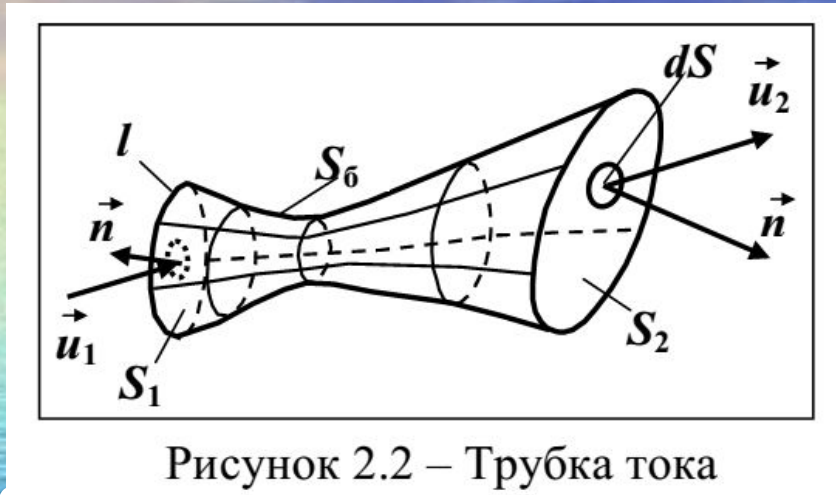


Рисунок 2.2 – Трубка тока



Рисунок 2.3 – Элементарная трубка тока

Объемный расход жидкости через произвольное сечение  $ds$  с нормалью элементарной трубки тока вычислим из простых рассуждений: объем жидкости, прошедший через сечение  $ds$  за время  $dt$ , равен объему цилиндра

$$\underbrace{u}_{\text{длина}} \underbrace{nds}_{\text{площадь}} dt = dV,$$

т. е. расход

$$dQ = dV/dt = \underbrace{u}_{\text{длина}} \underbrace{nds}_{\text{площадь}} = u_n ds = u ds_n$$

$$ds_n = ds \cdot \cos(\vec{u}, \vec{n})$$

площадь сечения, перпендикулярная линиям тока, или  
«живое сечение»

$$dG = \rho \vec{u} \cdot \vec{n} ds = \rho u_n ds = \rho u_n ds_n$$

Объемный и массовый расходы жидкости через произвольную площадку  $S$  найдем, просуммировав расходы по элементарным пронизывающим ее трубкам, т. е. объемный расход

$$Q = \int_S u_n ds \quad G = \int_S \rho u_n ds$$

Средняя расходная скорость  $v$  в живом сечении  $S_n$

$$v = Q/S_n$$



# Ускорение при движении жидкости

$$\vec{a} = \frac{d\vec{u}}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{u}}{dt} = u_x \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + u_y \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + u_z \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$$

$$a_x = \frac{du_x}{dt} = u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_x}{\partial t}$$

# Уравнение неразрывности

это уравнение материального баланса  
или иначе закон сохранения массы

Если в сплошной среде выделить  
произвольный объем  $V$ , то очевидно

$$m = \int_V \rho dV$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

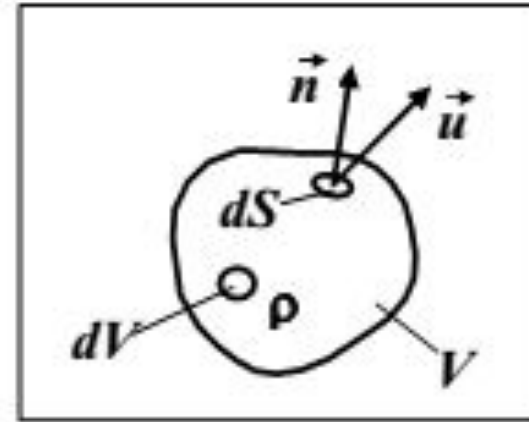


Рисунок 2.4 – Фиксация произвольного объема  $V$  в пространстве (для вывода уравнения неразрывности)

Возможно лишь за счет притока жидкости, который равен суммарному массовому расходу жидкости через поверхность  $S$  объема  $V$ , т. е.

$$G = - \int_s \rho u_n ds$$

Тогда

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_s \rho u_n ds = 0$$

уравнение неразрывности в интегральной форме

С учетом теоремы о кратных интегралах (теоремы Остроградского-Гаусса) можно записать

$$\int_V \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) \right] dV = 0$$

Поскольку предел интегрирования произволен, то

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0$$

Для несжимаемой жидкости  $\rho = \text{const}$  и  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

Тогда

$$\text{div} \vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

Для потока несжимаемой жидкости уравнение неразрывности для трубки тока с учетом непроницаемости ее боковой поверхности после интегрирования преобразуется к виду

$$Q = v_1 S_1 = v_2 S_2$$

# Скорость деформации

В отличие от твердого тела, движение которого рассматривается как сумма поступательного движения со скоростью произвольно выбранной точки (полюса) и вращательного движения вокруг мгновенной оси, проходящей через эту точку, жидкости присуще деформационное движение.

Особенности движения жидкой среды можно выяснить на примере отдельной ее частицы. Если задана скорость в точке  $A$ , то скорость жидкости в точке  $B$ , отстоящей от точки  $A$  (рис. 2.5) на расстоянии  $d\vec{r}$ , можно вычислить по формуле

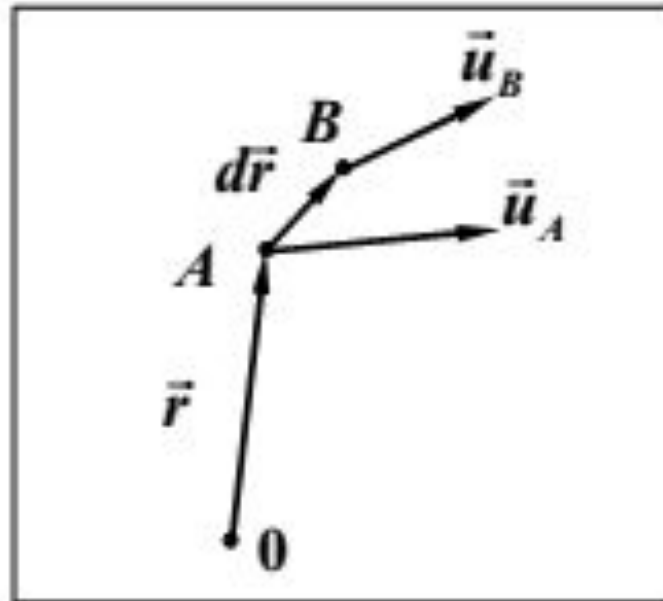


Рисунок 2.5 – Схема к определению скорости в точке  $B$

$$u_B = u_A + du = u_A + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

Отсюда следует

$$d\bar{u} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} dx + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} dy + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} dz. \quad (2.18)$$

Различие в скоростях обусловлено:

а) растяжением жидкостного элемента, т. е. линейной деформацией; б) угловой деформацией, изменяющей форму и размер жидкостной частицы; в) вращением элемента без деформации. Следовательно, различие в скоростях – результат деформации жидкостного элемента, т. е.

$$du_{\text{деф}} = du - du_{\text{вр}}$$

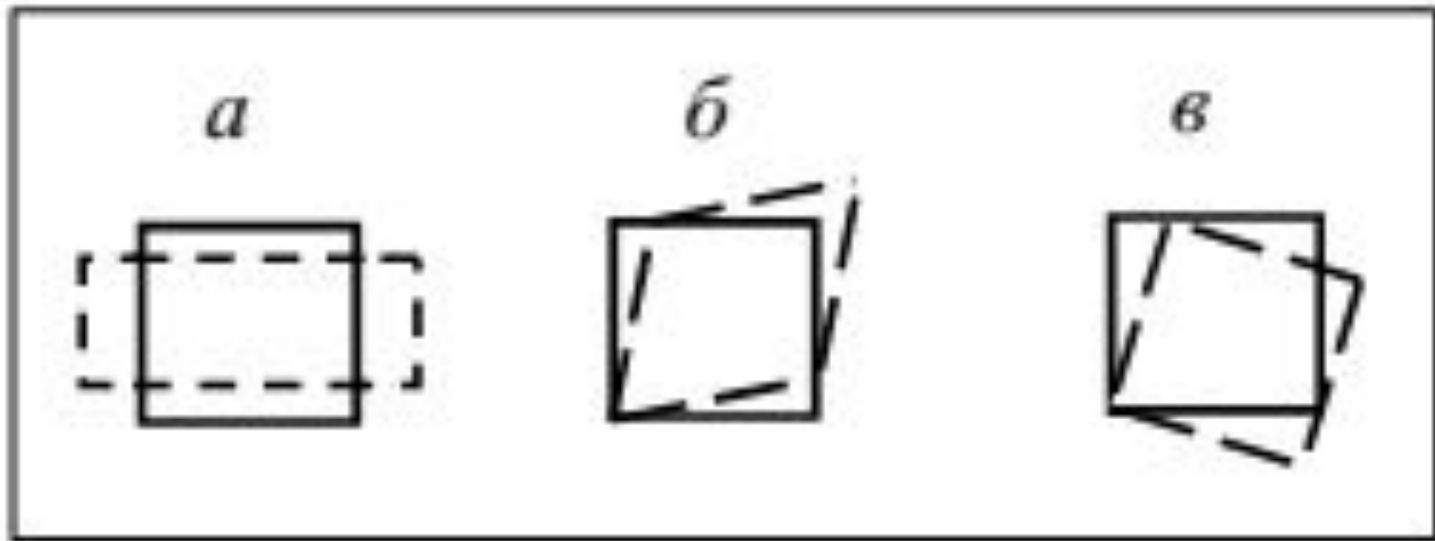


Рисунок 2.6 – Геометрическая иллюстрация изменения жидкостного элемента за счет деформации *a* – линейной; *б* – угловой и вращения (*в*)

В свою очередь

$$\begin{aligned}
 du_{\text{вр}}^{\boxtimes} &= \overset{\boxtimes}{\omega} \times dr^{\boxtimes} = \left( \overset{\boxtimes}{\omega}_x i + \overset{\boxtimes}{\omega}_y j + \overset{\boxtimes}{\omega}_z k \right) \times \left( dx i + dy j + dz k \right) = \\
 &= \left( \overset{\boxtimes}{\omega}_y dz - \overset{\boxtimes}{\omega}_z dy \right) i + \left( \overset{\boxtimes}{\omega}_z dx - \overset{\boxtimes}{\omega}_x dz \right) j + \left( \overset{\boxtimes}{\omega}_x dy - \overset{\boxtimes}{\omega}_y dx \right) k
 \end{aligned}$$

Проектируя, например, на ось  $x$  будем иметь

$$du_{\text{деф } x} = du_x - du_{\text{вр } y} \quad (1)$$

$$du_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy + \frac{\partial u_x}{\partial z} dz \quad (2)$$

$$du_{\text{вр } x} = \omega_y dz - \omega_z dy \quad (3)$$



Подставляя (2) – (3) в (1) получим

$$du_{\text{деф.х}} = \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_y}{\partial y} dy + \frac{\partial u_z}{\partial z} dz - \omega_y dz - \omega_z dy \quad (4)$$

$$d\varphi_{\text{вр.у}} = \frac{1}{2} (d\varphi_A - d\varphi_C) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) dt$$

то

$$\omega_y = \frac{d\varphi_{\text{вр.у}}}{dt} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)$$

По аналогии для  $\omega_z$  можно записать

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)$$

Подставляя эти выражения в (4), после преобразований будем иметь

$$du_{\text{деф } x} = \varepsilon_{xx} dx + \varepsilon_{xy} dy + \varepsilon_{xz} dz$$

Здесь  $\varepsilon_{xx}$  – скорость линейной относительной деформации;  
 $\varepsilon_{xy}$ ;  $\varepsilon_{xz}$  – скорости угловой деформации, представляющие собой

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}; \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right); \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right).$$

Физический (кинематический) смысл  $\frac{\partial u_x}{\partial x}$

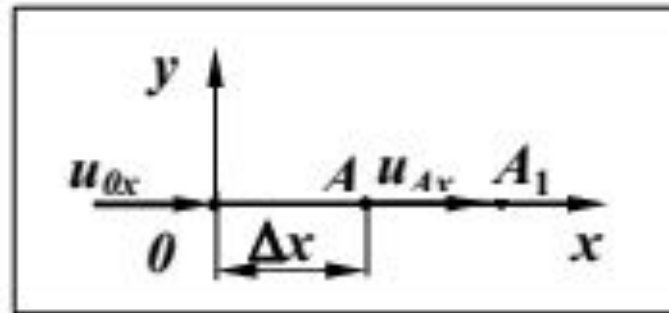


Рисунок 2.7 – Схема к определению скорости линейной деформации

В системе координат, связанной с точкой  $O$  жидкости, за время  $dt$  точка  $A$  переместится и займет положение  $A_1$ . Тогда удлинение отрезка  $AA_1 = (u_{Ax} - u_{Ox})dt$  и, так как для бесконечно малого отрезка  $OA$

$$u_{Ax} = u_{Ox} + \frac{\partial u_x}{\partial x} OA, \text{ то } AA_1 = \frac{\partial u_x}{\partial x} OA dt$$

Скорость относительного удлинения отрезка  $OA$  или *скорость линейной деформации* вдоль оси  $x$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{AA_1}{OA dt} = \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

По аналогии можно записать

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}; \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Тогда уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости, представленное в виде

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = 0$$

свидетельствует о неизменности объема элемента жидкости при его линейной деформации

*б) – Кинематический смысл  $\partial u_x/\partial y$  и  $\partial u_y/\partial x$*

Пусть за время  $dt$  точка  $A$  переместится в  $A_1$ ,  $B - B_1$ ,  $C - C_1$  (рис. 2.8). Воспользовавшись рядом Тейлора, можно записать

$$u_{Ax} = u_{0x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \theta A, \quad u_{Cx} = u_{0x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \theta C.$$

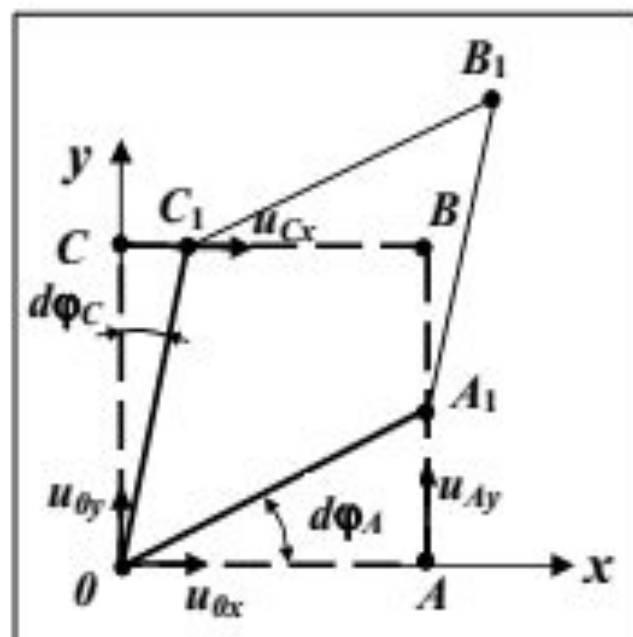


Рисунок 2.8 – Схема к определению угловой деформации и угловой скорости

Тогда

$$AA_1 = (u_{Ay} - u_{Oy}) dt = \frac{\partial u_y}{\partial x} OA dt, \quad CC_1 = (u_{Cx} - u_{Ox}) dt = \frac{\partial u_x}{\partial y} OC dt.$$

В результате относительного движения ребра  $OA_1$  и  $OC_1$  повернутся соответственно на бесконечно малые углы

$$d\varphi_A \approx \operatorname{tg} d\varphi_A = AA_1/OA = \left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\right) dt;$$

$$d\varphi_C \approx \operatorname{tg} d\varphi_C = CC_1/OC = \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) dt,$$

т. е. частные производные  $du_x/dy$  и  $du_y/dx$  равны *угловым скоростям вращения* линий  $OA$  и  $OC$ , причем  $OC$  вращается по часовой стрелке, а  $OA$  – против.

Поэтому, если принять, что  $\omega_C = d\varphi_C/dt$ , то  $\omega_A = -d\varphi_A/dt$ .

Скорость вращения жидкости в точке  $\theta$  относительно оси  $Z$  можно вычислить, как среднее арифметическое  $\omega_A$  и  $\omega_C$ , т.е.

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right). \quad (2.21)$$

По аналогии нетрудно найти

$$\omega_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial z} \right); \quad (2.22)$$

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial y} \right). \quad (2.23)$$

В свою очередь общая относительная деформация сдвига частицы  $d\varphi_{\text{деф}}$  или деформация скашивания прямого угла  $A\theta C$  в  $A_1\theta C_1$  под действием тангенциальных напряжений  $\tau_{yx}$  и  $\tau_{xy}$  будет равна сумме этих углов, т.е.

$$d\varphi_{\text{деф}} = d\varphi_A + d\varphi_C = (\partial u_y / \partial x + \partial u_x / \partial y) dt.$$

**Скоростью угловой деформации** в плоскости  $x - y$  называется величина

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \frac{d\varphi_{\text{деф}}}{dt}.$$

Т. е.

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right). \quad (2.24)$$



По аналогии можно записать

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right); \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right)$$

Таким образом имеем

$$du_{\text{деф } y} = \varepsilon_{yx} dx + \varepsilon_{yy} dy + \varepsilon_{yz} dz; \quad du_{\text{деф } z} = \varepsilon_{zx} dx + \varepsilon_{zy} dy + \varepsilon_{zz} dz$$

Матрица, составленная из девяти компонентов скоростей линейных и угловых деформаций называется тензором скоростей деформаций  $S$ .

$$S = \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix}$$

# СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ЖИДКИЙ ОБЪЕМ

Внешние силы, действующие на жидкий объем и определяющие его движение, разделяются на **массовые (объемные) и поверхностные.**

Массовые силы  $R_m$  приложены ко всем жидким частицам, составляющим жидкий объем. К ним относятся силы тяжести и силы инерции.

Напряжением или плотностью, или удельной (единичной) массовой силой ( $\text{м/с}^2$ ,  $\text{Н/кг}$ ) называют

$$\vec{f} = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{\Delta R_m}{\Delta m}; \quad \vec{f} = \vec{a}$$

$$\vec{f} = f_x \vec{i} + f_y \vec{j} + f_z \vec{k}; \quad f_z = -g$$

Поверхностные силы  $R_s$  представляют воздействие внешней среды на поверхность выделенного объема. Это воздействие распределено по поверхности непрерывно.

Выберем на плоскости  $S$ , рассекающей некоторую массу жидкости на части 1 и 2 (рис. 3.1), элементарную площадку  $\Delta S$ , на которой лежит точка  $A(x, y, z)$ . Отбросим часть 2 и заменим ее действие на площадку  $\Delta S$  части 1 равнодействующей поверхностных сил  $\Delta R_s$ . В общем случае величина  $\Delta R_s$  зависит от ориентации площадки  $\Delta S$  и направлена к ней под острым углом  $\gamma$ . Ориентация площадки  $\Delta S$  определяется единичным вектором внешней нормали  $n$ .

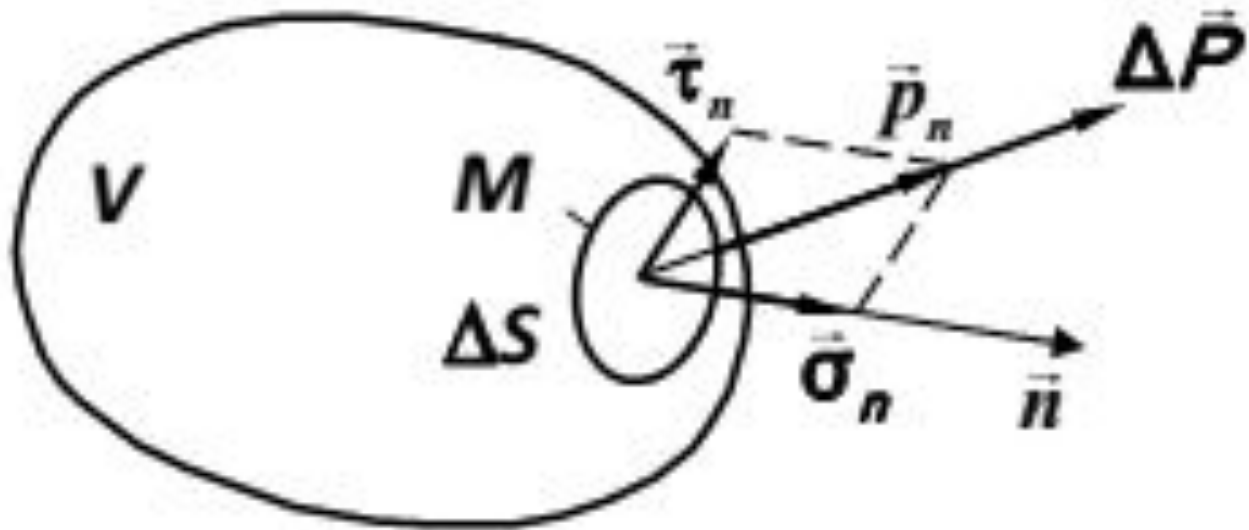


Рисунок 3.1 – Схема к определению напряжения в точке сплошной среды

Нормальная составляющая  $\Delta R_n$  поверхностной силы  $\Delta R_s$  действует по нормали к поверхности  $\Delta S$ , противоположно  $n$ . Сила трения или тангенциальная составляющая  $\Delta R_t$  действует в плоскости  $\Delta S$ .

Плотность поверхностных сил на площадке с нормалью  $n$  называется напряжением и определяется выражением

$$p_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta R_S}{\Delta S}; \quad [p_n] = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} =$$

При этом различают следующие напряжения.

$$p_n = p_{nn} n + p_{n\tau} \tau$$

Компоненты напряжения на площадках, нормальных к координатным осям, называются основными. Так, например, напряжение на площадке с нормалью, совпадающей с направлением оси  $x$ , может быть выражено через основные компоненты напряжения в виде

$$p_x = \sigma_x i + \tau_{xy} j + \tau_{xz} k$$

Первый индекс указывает направление нормали к площадке, второй – ось, на которую спроектировано напряжение .  
Компонент напряжения, считается положительным, если его направление и направление внешней нормали к площадке совпадают (или оба направления не совпадают) с направлениями осей координат. На рисунке 3.2 показаны положительные направления компонентов напряжения при плоском напряжении.

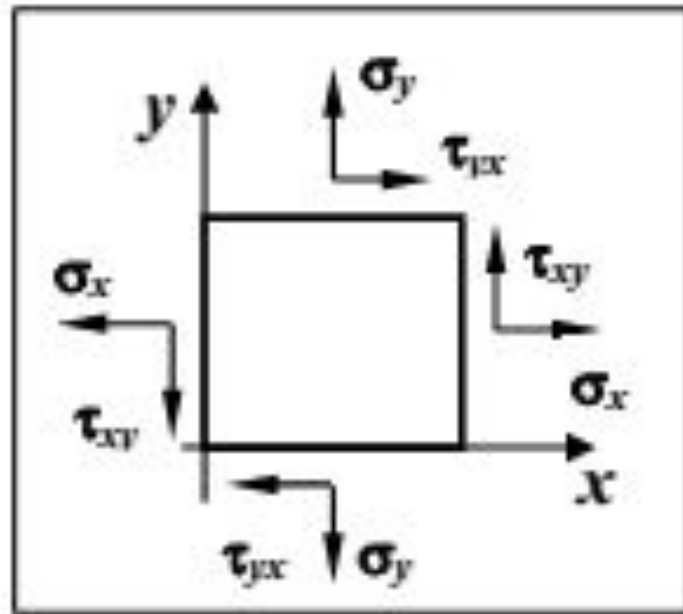


Рисунок 3.2 – Положительные направления основных компонентов напряжений

Итак, существует всего девять основных компонентов напряжений. Обычно их представляют в виде матрицы:

$$P^T = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} \quad (3.1)$$

и называют *тензором напряжений*.

Тензор напряжений *симметричен относительно главной диагонали* (примем без доказательства), т. е.

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz},$$

и независимо от ориентации координатных осей

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \text{const.}$$

Установим взаимосвязь напряжения  $\vec{p}_n$  с основными компонентами напряжений. Для этого применим второй закон Ньютона к элементарной массе жидкости, имеющей форму тетраэдра (рис. 3.3) с ребрами  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ :

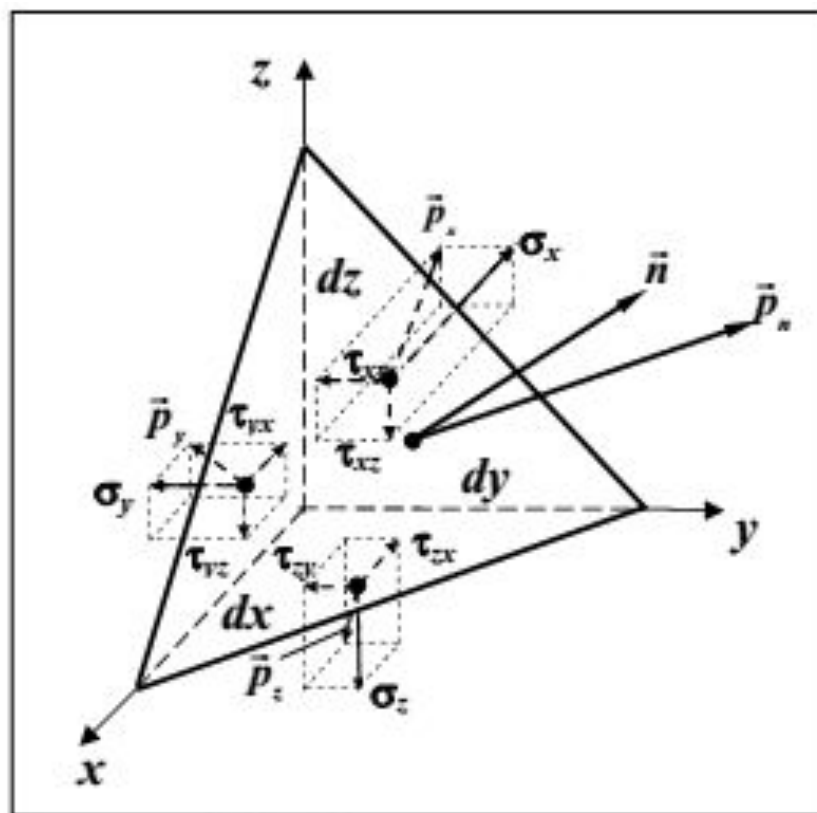


Рисунок 3.3 – К определению взаимосвязи напряжения  $\vec{p}_n$  с основными компонентами напряжений



$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{R} = \vec{R}_m + \vec{R}_s, \quad (3.2)$$

где  $\vec{K}$  – количество движения;

$\vec{R}$  – главный вектор внешних сил представлен в виде суммы массовых  $\vec{R}_m$  и поверхностных  $\vec{R}_s$  сил.

Массовые силы  $\vec{R}_m$  этого равенства и количество движения  $\vec{K}$  пропорциональны массе жидкости, т. е. величине  $1/6\rho dx dy dz$ . Поверхностные силы, например, на площадке  $dS_x$  нормальной к оси  $x$

$$\vec{P}_x = \vec{p}_x \frac{1}{2} dy dz$$

на порядок больше массовых. Следовательно, в уравнении (3.2) можно пренебречь слагаемыми, пропорциональными массе элементарного тетраэдра.

Тогда получим  $\vec{R}_x = 0$  или

$$\vec{p}_n dS_n + \vec{p}_x dS_x + \vec{p}_y dS_y + \vec{p}_z dS_z = 0.$$

Разделив это выражение почленно на  $dS_n$ , и учитывая, что

$$\frac{dS_x}{dS_n} = \cos(x, n); \quad \frac{dS_y}{dS_n} = \cos(y, n); \quad \frac{dS_z}{dS_n} = \cos(z, n),$$

получим

$$\bar{p}_n + \bar{p}_x \cos(x, n) + \bar{p}_y \cos(y, n) + \bar{p}_z \cos(z, n) = 0,$$

или в проекциях на координатные оси

$$\left. \begin{aligned} p_{nx} &= \sigma_x \cos(x, n) + \tau_{xy} \cos(y, n) + \tau_{xz} \cos(z, n) \\ p_{ny} &= \tau_{yx} \cos(x, n) + \sigma_y \cos(y, n) + \tau_{yz} \cos(z, n) \\ p_{nz} &= \tau_{zx} \cos(x, n) + \tau_{zy} \cos(y, n) + \sigma_z \cos(z, n) \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

*Давлением в движущейся жидкости называется величина*

$$p = -\frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z), \quad (3.4)$$

т. е. среднеарифметическое значение сжимающих нормальных основных компонентов напряжений.

## Давление в покоящейся жидкости

$$p = -p_n = -\sigma_x = -\sigma_y = -\sigma_z$$

# Закон внутреннего трения в обобщенной форме – это эмпирический закон

Устанавливает взаимосвязь между компонентами тензоров скоростей деформаций  $S$  и напряжений  $T$ .

Если  $T$  представить в виде

$$T = T_0 + T_1$$

$$T_0 = - \begin{vmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{vmatrix} \quad T_1 = \begin{vmatrix} \sigma_x + p & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y + p & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_x + p \end{vmatrix}$$

то простейшая форма связи между матрицами  $S$  и  $T_1$  для ньютоновской жидкости – это прямая пропорциональность

$$T_1 = 2\mu S$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -p + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x}; & \tau_{xy} &= \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right); \\ \sigma_y &= -p + 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y}; & \tau_{yz} &= \mu \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right); \\ \sigma_z &= -p + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}; & \tau_{zx} &= \mu \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right). \end{aligned} \right\}$$

# Уравнение движения в напряжениях

Воспользовавшись теоремой об изменении количества движения к движущейся массе жидкости, заключенной в произвольном объеме, с учетом теоремы Остроградского-Гаусса, получим

$$\int_V \rho \frac{d\vec{u}}{dt} dV = \int_V \left( \rho \vec{F} + \text{Div} \vec{p}_n \right) dV$$

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = \rho \vec{F} + \text{Div} \vec{p}_n$$

$$\text{Div} \vec{p}_n = \frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z}$$

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{du_x}{dt} &= \rho X + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \\ \rho \frac{du_y}{dt} &= \rho Y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \\ \rho \frac{du_z}{dt} &= \rho Z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \end{aligned} \right\}$$



# Уравнение движения вязкой несжимаемой жидкости (уравнение Навье—Стокса)

$$\left. \begin{aligned} \frac{du_x}{dt} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u_x \\ \frac{du_y}{dt} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 u_y \\ \frac{du_z}{dt} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 u_z \end{aligned} \right\}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \nabla^2 \vec{u}$$

$$\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k} \quad \vec{F} = X \vec{i} + Y \vec{j} + Z \vec{k}$$

$$\text{grad} p = \frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k}$$

# Уравнение энергии

Изменение энергии  $E$  жидкости в случае отсутствия теплообмена с окружающей средой  $dQ = 0$  возможно лишь за счет работы внешних сил, т. е.

$$dE = dA = Ndt$$

или иначе

$$\frac{dE}{dt} = N$$

Для гомогенной жидкости, не изменяющей своего агрегатного состояния, можно записать

$$E = \int_V \frac{u^2}{2} \rho dV + \int_V c_p T \rho dV$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \left( \rho \frac{u^2}{2} + \rho c_p T \right) dV = \int_V \left( u \frac{du}{dt} + c_p \frac{dT}{dt} \right) \rho dV$$

$$N = N_m + N_s$$

$$N_m = \int_V u F \rho dV$$

$$N_s = \int_V u p ds = \int_V \left[ \frac{\partial (u p_x)}{\partial x} + \frac{\partial (u p_y)}{\partial y} + \frac{\partial (u p_z)}{\partial z} \right] dV$$

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} + u \left( \rho \frac{du}{dt} - F\rho - \frac{\partial p_x}{\partial x} - \frac{\partial p_y}{\partial y} - \frac{\partial p_z}{\partial z} \right) - p_x \frac{\partial u_x}{\partial x} - p_y \frac{\partial u_y}{\partial y} - p_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \sigma_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial u_y}{\partial x} + \tau_{xz} \frac{\partial u_z}{\partial x} + \tau_{yx} \frac{\partial u_x}{\partial y} +$$

$$+ \sigma_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + \tau_{yz} \frac{\partial u_z}{\partial y} + \tau_{zx} \frac{\partial u_x}{\partial z} + \tau_{zy} \frac{\partial u_y}{\partial z} + \sigma_z \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \mu D$$

$$D = 2 \left[ \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 \right] +$$
$$+ \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right)^2$$

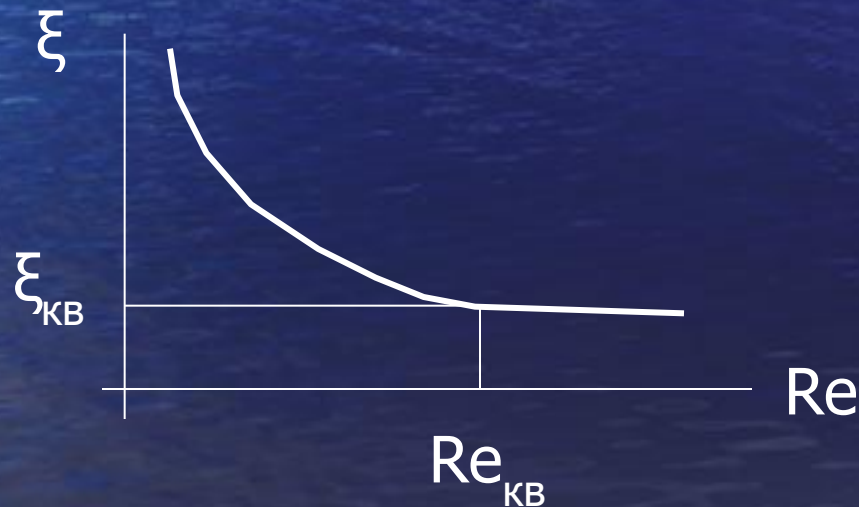
$$D = 2 \left( \varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + \varepsilon_{zz}^2 \right) + 4 \left( \varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yz}^2 \right)$$

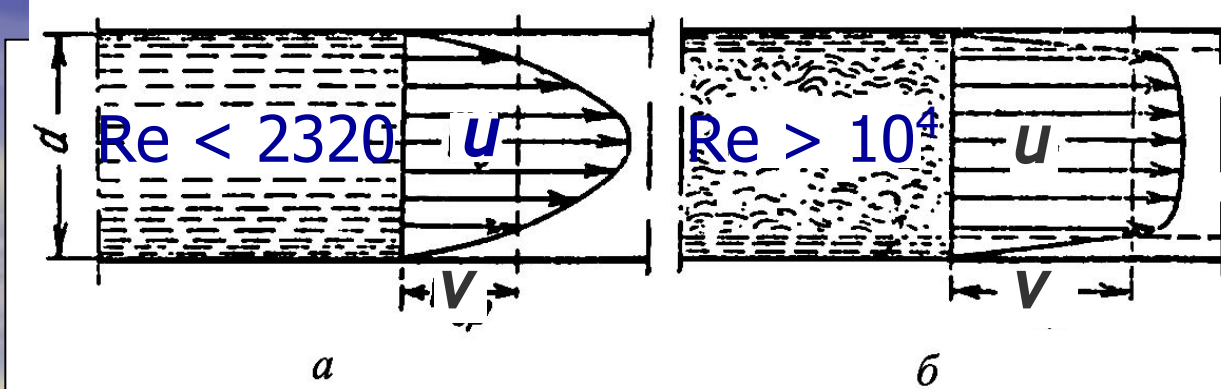
# Потери энергии на сопротивлениях и по длине трубопровода

$$h_w = \frac{1}{\rho g Q} \int_V \rho c_p \frac{dT}{dt} dV = \frac{1}{\rho g Q} \int_V \mu D dV$$

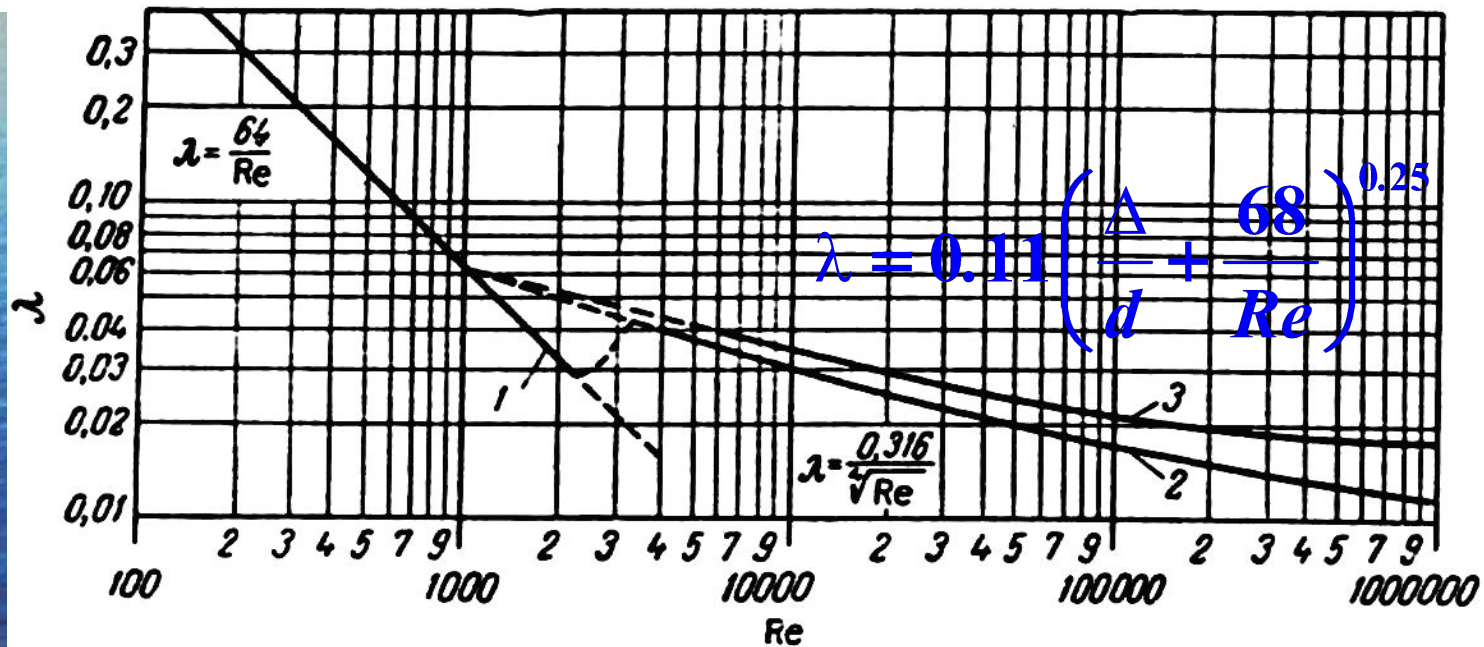
$$h_w = h_{MC} + h_l; h_{MC} = \xi \frac{v^2}{2g}; h_l = \lambda \frac{l}{d_0} \frac{v^2}{2g}; d_0 = \frac{4S}{\Pi}.$$

$$\xi = \xi(\text{геометрических размеров, Re}) \Rightarrow \xi = \xi_{KB} + \frac{A}{Re}$$





Распределение скоростей при ламинарном (а) и турбулентном (б) движении жидкости в трубе



Зависимость  $\lambda$  от критерия  $Re$ :

1 – гладкие и шероховатые трубы; 2 – гладкие трубы); 3 – шероховатые трубы



# ГИДРОСТАТИКА

$$\vec{F} = \frac{1}{\rho} \text{grad} p$$

$$\left. \begin{aligned} f_x &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ f_y &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ f_z &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \right\}$$

$$f_x dx + f_y dy + f_z dz = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right)$$

Если  $\rho = \text{const}$ , то

$$f_x dx + f_y dy + f_z dz = d \left( \frac{p}{\rho} \right) \quad a)$$

т. е. правая часть представляет собой полный дифференциал. В связи с этим можно утверждать, что это уравнение имеет решение всегда, т. е. жидкость может находиться в равновесии, если и левая часть уравнения представляет собой полный дифференциал некоторой функции  $\Phi$ , зависящей от  $x, y, z$ . Так как

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz \quad b)$$

Сравнив  $a)$  и  $b)$  получим условия, при которых жидкость может находиться в равновесии

$$f_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}; f_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}; f_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

$$A = \int_l \vec{F} d\vec{l} = \int_l (f_x \vec{i} + f_y \vec{j} + f_z \vec{k}) (i dx + j dy + k dz) =$$

$$\int_l (f_x dx + f_y dy + f_z dz) = \int_l^2 d\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$$

Поверхность, на которой  $\Phi = \text{const}$  или  $d\Phi=0$ , называется эквипотенциальной или поверхностью уровня. На этой поверхности  $dp=0$  или  $p=\text{const}$  или

$$f_x dx + f_y dy + f_z dz = 0$$

# Равновесие жидкости в гравитационном поле



В этом случае имеем:  $f_z = -g$ ;  $f_x = f_y = 0$ .

Граничные условия:  $z = z_0$ ;  
 $\Rightarrow p = p_0$ .

Уравнение поверхности уровня –  $gdz = 0$  или  
после интегрирования  $z = \text{const}$

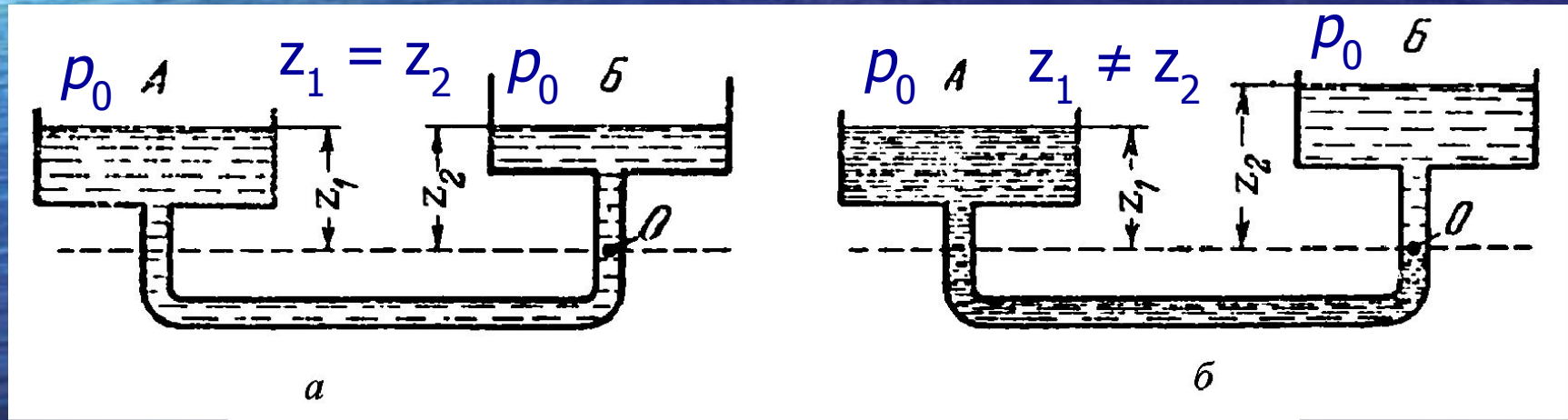
$$\frac{p}{\rho} = -gz + C \Rightarrow z + \frac{p}{\rho g} = \text{const} \quad C = \frac{p_0}{\rho} + gz_0$$

$$p = p_0 + \rho g(z_0 - z) = p_0 + \rho gh$$

$$z + \frac{p}{\rho g} = \text{const} \quad - \text{статический напор}$$

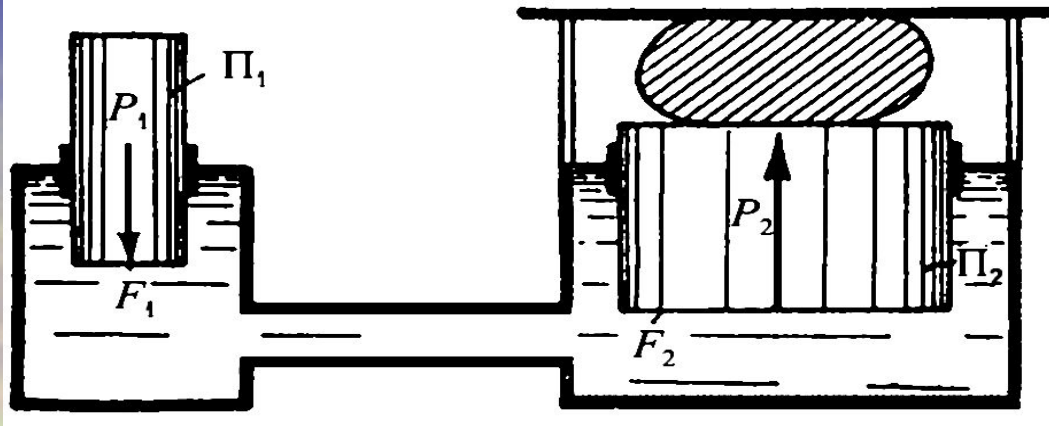
$z = mgz/(mg) = \mathcal{E}_n/(mg)$ , т. е.  $z$  есть отношение потенциальной энергии положения к весу жидкостной частицы с массой  $m$

$p/(\rho g)$  – удельная потенциальная энергия давления



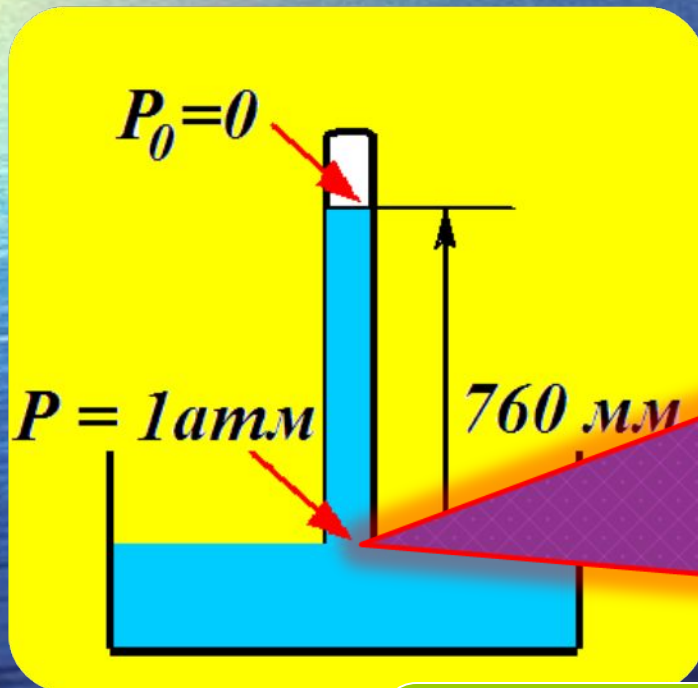
Сообщающиеся сосуды, заполненные жидкостью:  
*a* – одной плотности; *б* – разной плотности

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$$



$$P_2 = P_1 \frac{F_2}{F_1}$$

Схема гидравлического пресса



При изменении атмосферного давления изменяется высота жидкости в трубке. Это позволяет использовать такую трубку в качестве прибора для измерения давления – **ртутного барометра**

Для воды:

$$H = \frac{101325}{1000 \cdot 9,8} = 10,34$$

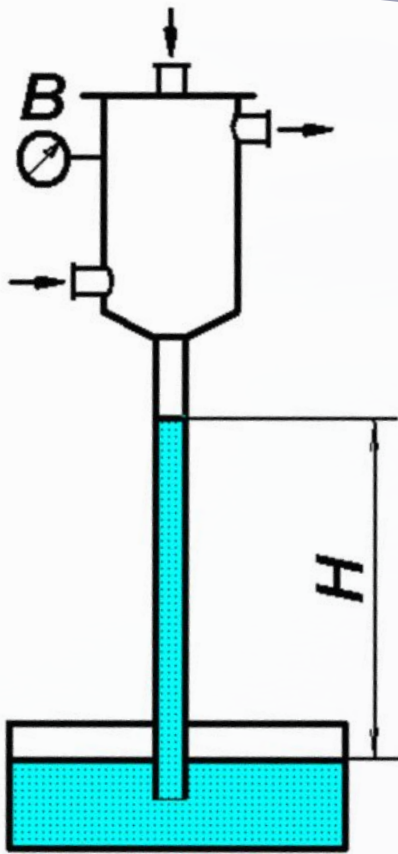
# Задача

Вакуумметр на барометрическом конденсаторе показывает вакуум, равный 600 мм рт.ст. Атмосферное давление 748 мм рт.ст.

Определить:

- а) абсолютное давление в конденсаторе в Па и в кгс/см<sup>2</sup>;
- б) на какую высоту  $H$  поднимается вода в барометрической трубе?

# Решение



- Абсолютное давление в конденсаторе:

$$p = 748 - 600 = 148 \text{ ммрт.ст.} = \\ = 148 \cdot 133,3 = 19700 \text{ Па}$$

$$p = \frac{19700}{9,81 \cdot 10^4} = 0,201 \text{ кгс/см}^2$$

Высоту столба в барометрической трубе найдем из уравнения:

$$p_{\text{атм}} = p + \rho g H$$

- Откуда

$$H = \frac{p_{\text{атм}} - p}{\rho g} = \frac{600 \cdot 133,3}{1000 \cdot 9,81} = 8,16 \text{ м}$$



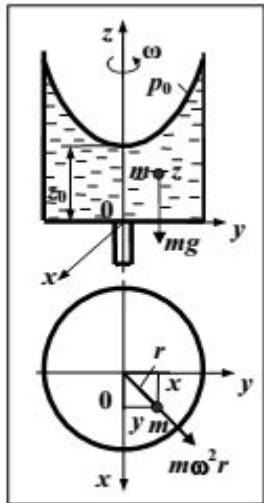
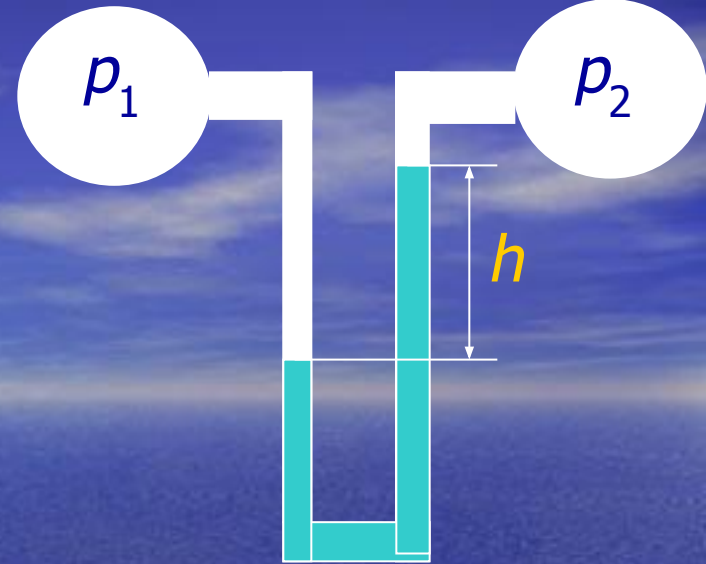
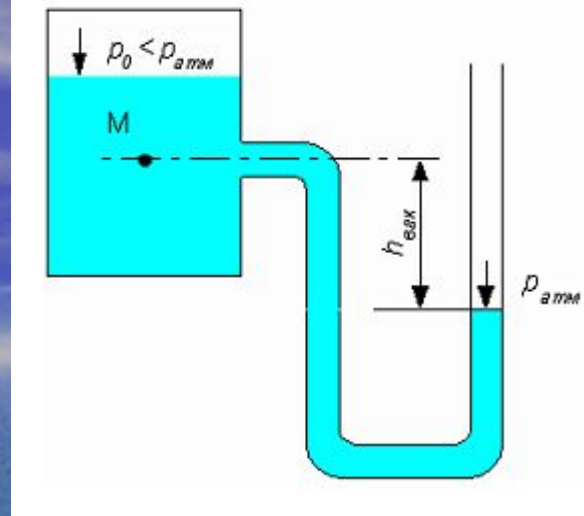
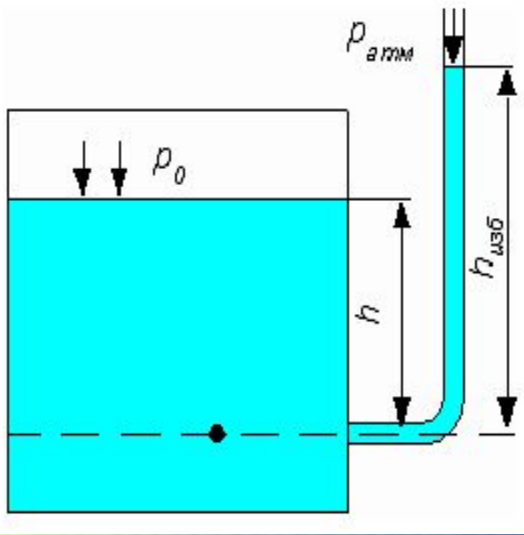
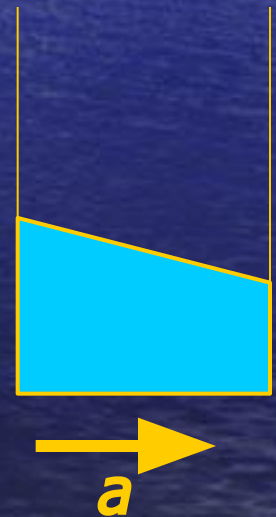
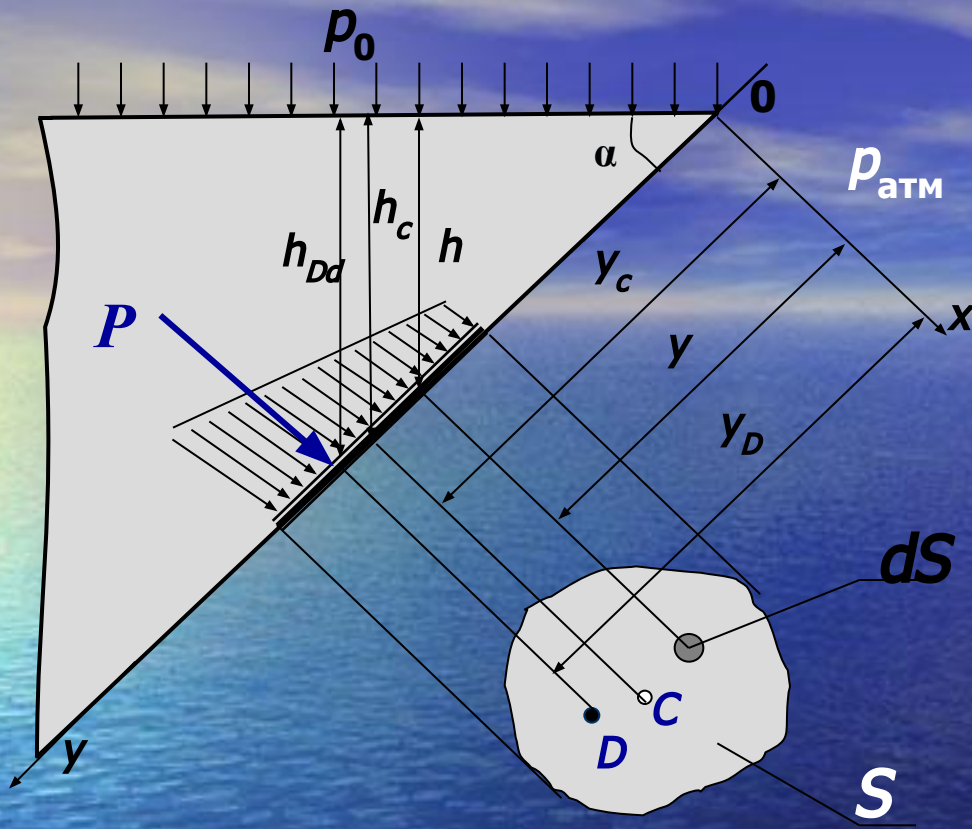


Рисунок 4.7 – Равновесие жидкости в центробежном поле

$$dp = -\rho (adx + gdz)$$



$$dp = \rho (\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - gdz)$$



$$p = (\rho gh + p_0)$$

$$p_0 = p - p_{\text{atm}}$$

$$Py_D = \int_S y dS$$

$$\int_S y^2 dS$$

$$y_D = \frac{\int_S y^2 dS}{y_c S}$$

$$y_D = \frac{y_c^2 S + J_C}{y_c S} = y_c + \frac{J_C}{y_c S}$$

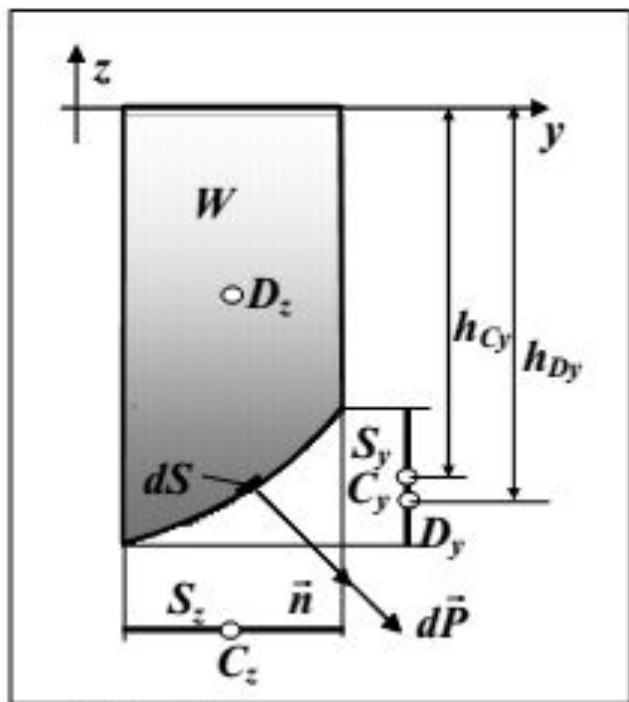


Рисунок 4.8 – Схема определения силы давления на цилиндрическую поверхность тела

$$\vec{P} = \int_S p \vec{n} dS$$

$$P_x = \int_S p \cos(x, n) dS = \int_{S_x} p dS_x$$

$$P_z = \int_S p \cos(z, n) dS = \int_{S_z} p dS_z$$

$$W = \int_{S_z} h dS_z$$

$$P_x = (p_{0и} + \rho g h_c) S_x$$

$$P_z = p_{0и} S_z + \rho g W$$

# Закон Архимеда

Если пронизать тело, погруженное в жидкость, вертикальным цилиндром с основанием  $dS_z$ , то на площадки  $dS_1$  и  $dS_2$ , отсекаемые на поверхности тела (рис. 4.10), действуют соответственно гидростатические силы, вертикальные составляющие которых

$$dP_{1z} = \rho g h_1 S_r \text{ и } dP_{2z} = \rho g h_2 S_r.$$

Результирующая сила направлена вверх и равна

$$dP_z = dP_{2z} - dP_{1z} = \rho g (h_2 - h_1) dS_z = \rho g dW,$$

где  $dW$  – объем тела, отсекаемый элементарным цилиндром.

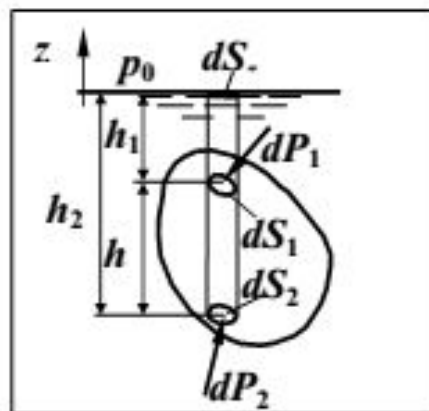


Рисунок 4.10 – К выводу закона Архимеда

Просуммировав силы по всей поверхности тела, найдем, что

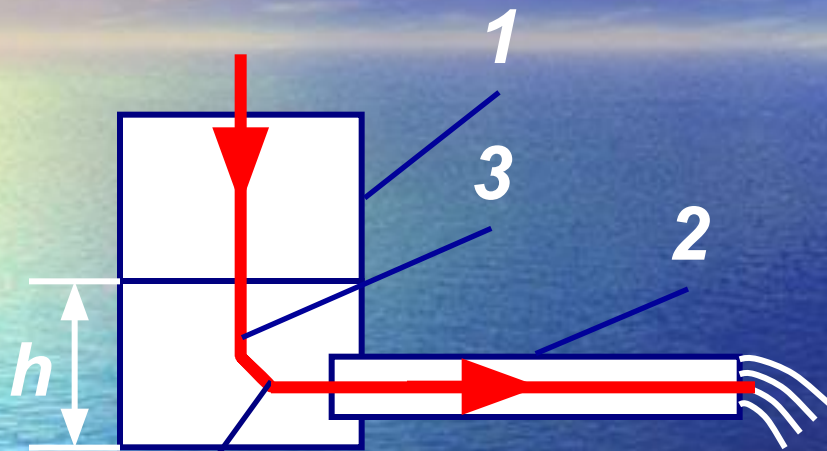
$$P_z = \rho g W,$$

где  $W$  – объем тела, погруженного в жидкость.

# Режимы движения жидкости

Опыт Рейнольдса.  
1883г.

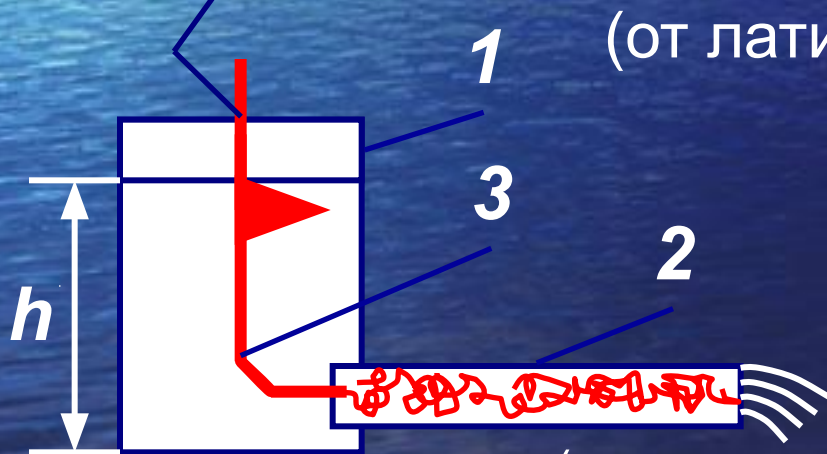
- 1 – сосуд
- 2 - стеклянная труба
- 3 - капиллярная трубка



частицы движутся  
прямолинейно  
и параллельно друг другу

ламинарное движение

(от латинского слова «ламина» — слой)



частицы жидкости движутся  
по хаотическим траекториям

турбулентное движение

(от латинского слова «турбулентус» — вихревой)

$h = \text{const}$

Опыт показывает, что переход от ламинарного течения к турбулентному зависит от массовой скорости жидкости  $\rho U$ , диаметра трубы  $d$  и вязкости жидкости  $\mu$ .

*Критерий Рейнольдса:*

$$Re_{кр} = 2300$$

$$Re = \frac{vd\rho}{\mu} = \frac{vd}{\nu}$$

$Re < 2300$  – устойчивый ламинарный режим

$2300 < Re < 10000$  – неустойчиво турбулентный режим

$Re > 10000$  – устойчиво турбулентный режим

# Уравнение турбулентного течения несжимаемой жидкости (уравнение Рейнольдса)

$$u_x = \bar{u}_x + u'_x$$

$$\sigma_x = \bar{\sigma}_x + \sigma'_x$$

$$u_y = \bar{u}_y + u'_y$$

$$\tau_{xy} = \bar{\tau}_{xy} + \tau'_{xy}$$

$$u_z = \bar{u}_z + u'_z$$

$$\tau_{xz} = \bar{\tau}_{xz} + \tau'_{xz}$$

$$a = \bar{a} + a'; \quad b = \bar{b} + b'; \quad \overline{a + b} = \bar{a} + \bar{b}; \quad \overline{\bar{a}} = \bar{a}; \quad \overline{a'} = 0; \quad \overline{a'b'} = 0; \quad \overline{\frac{\partial a}{\partial x}} = \frac{\partial \bar{a}}{\partial x}$$

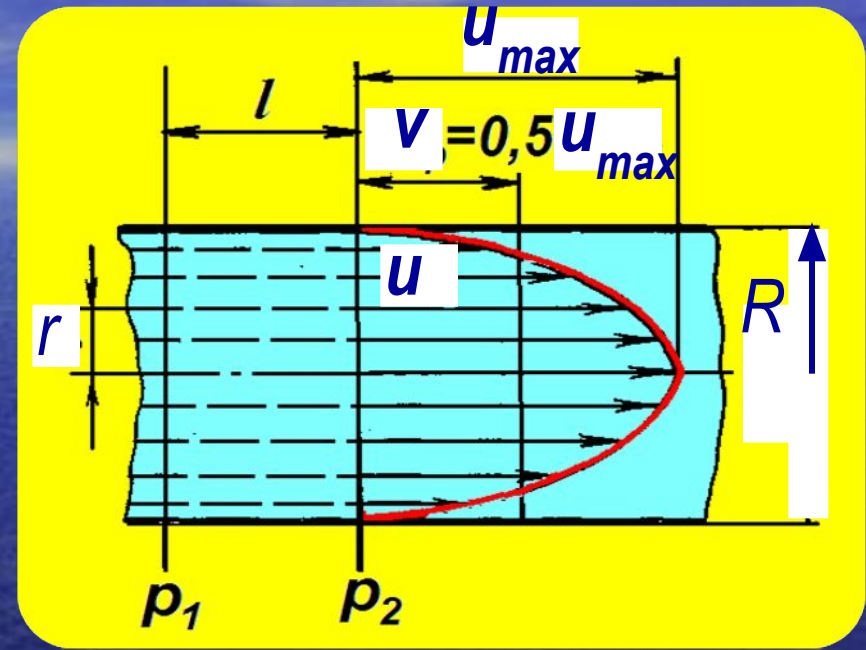
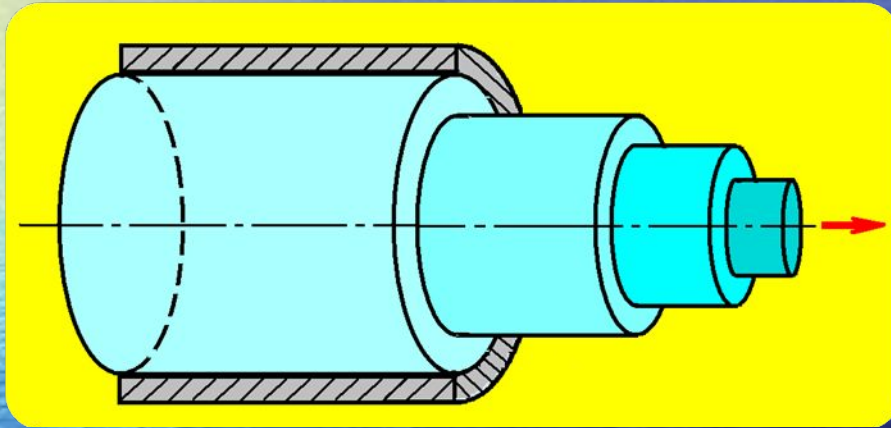
$$\frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial (u_x^2)}{\partial x} + \frac{\partial (u_x u_y)}{\partial y} + \frac{\partial (u_x u_z)}{\partial z}$$

$$\rho \frac{d\bar{u}_x}{dt} = \rho X + \frac{\partial}{\partial x} \left( \bar{\sigma}_x - \rho \overline{u'_x u'_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \bar{\tau}_{xy} - \rho \overline{u'_x u'_y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \bar{\tau}_{xz} - \rho \overline{u'_x u'_z} \right)$$

$$T' = \begin{vmatrix} \overline{\rho u'_x u'_x} & \overline{\rho u'_x u'_y} & \overline{\rho u'_x u'_z} \\ \overline{\rho u'_y u'_x} & \overline{\rho u'_y u'_y} & \overline{\rho u'_y u'_z} \\ \overline{\rho u'_z u'_x} & \overline{\rho u'_z u'_y} & \overline{\rho u'_z u'_z} \end{vmatrix}$$



# Распределение скоростей по сечению потока при ламинарном режиме



$$P_1 - P_2 = (p_1 - p_2) \pi r^2$$

$$F = -\mu S \frac{du}{dy}$$

$p_1$  и  $p_2$  – гидростатические давления в сечениях трубы на расстоянии  $l$

$u$  – скорость движения жидкости на расстоянии  $r$  от оси трубы

$S = 2\pi r l$  – наружная поверхность цилиндра

$\mu$  – вязкость жидкости

# Распределение скоростей по сечению потока при ламинарном режиме

Сумма проекций всех сил на ось потока равна нулю

$$(p_1 - p_2)\pi r^2 = -\mu 2\pi r l \frac{du}{dr}$$

После сокращения и разделения переменных

$$\frac{p_1 - p_2}{2\mu l} r dr = -du$$

Интегрируя с учетом граничных условий, получим

$$u = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} (R^2 - r^2)$$

# Распределение скоростей по сечению потока при ламинарном режиме

Скорость имеет максимальное значение на оси трубы

$$u_{\max} = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} R^2$$

$$u = u_{\max} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right)$$

- параболическое

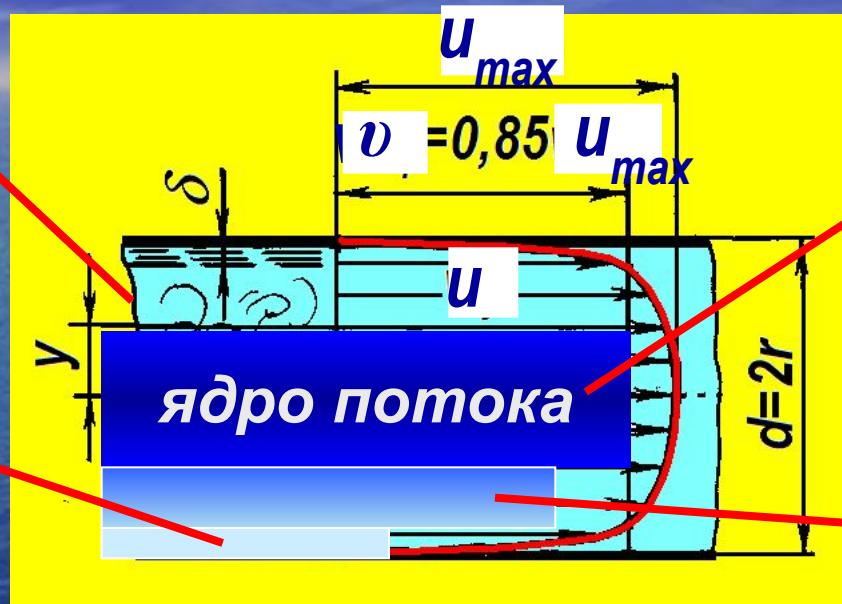
распределение скоростей в сечении трубопровода при ламинарном движении

При ламинарном режиме средняя скорость жидкости равна половине скорости на оси трубы

$$v = 0,5u_{\max}$$

# Распределение скоростей по сечению потока при турбулентном режиме

пульсация скоростей, перемешивание жидкости  
 ламинарный пограничный слой



в ядре потока скорости частиц одинаковы  
 переходная зона

При  $Re \ll 100000$

$$\delta = 62,8 d Re^{-0,875}$$

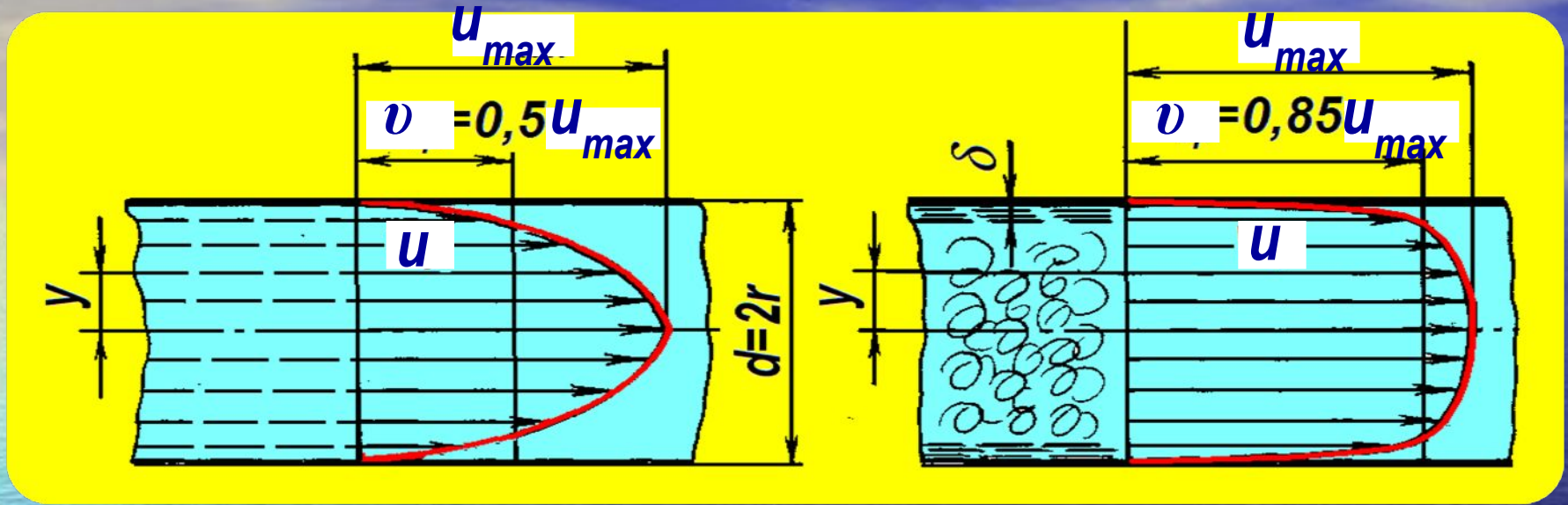
$$\frac{u}{u_{max}} = \left( \frac{r - y}{r} \right)^m$$

$$, m = f(Re)$$

$$\frac{v}{u_{max}} = 0,75 \div 0,90$$

$$v \approx 0,85 u_{max}$$

# Распределение скоростей по сечению потока при ламинарном и турбулентном режимах



Характерное распределение скоростей для каждого режима движения жидкости устанавливается на протяжении некоторого участка трубопровода, называемого начальным, длину которого рассчитывают по формулам:

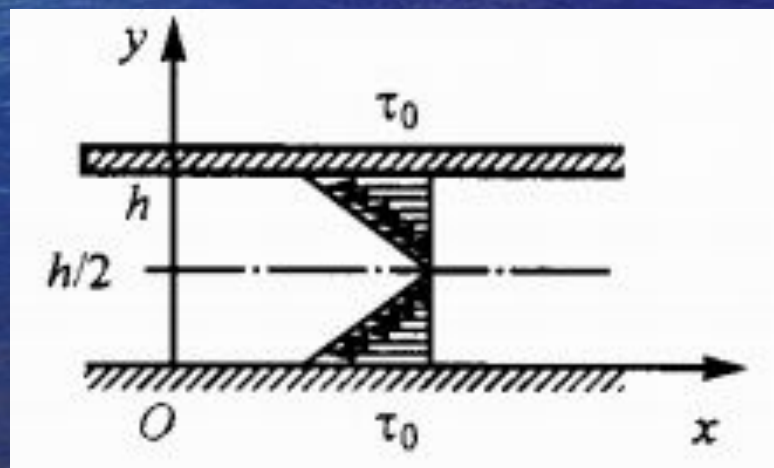
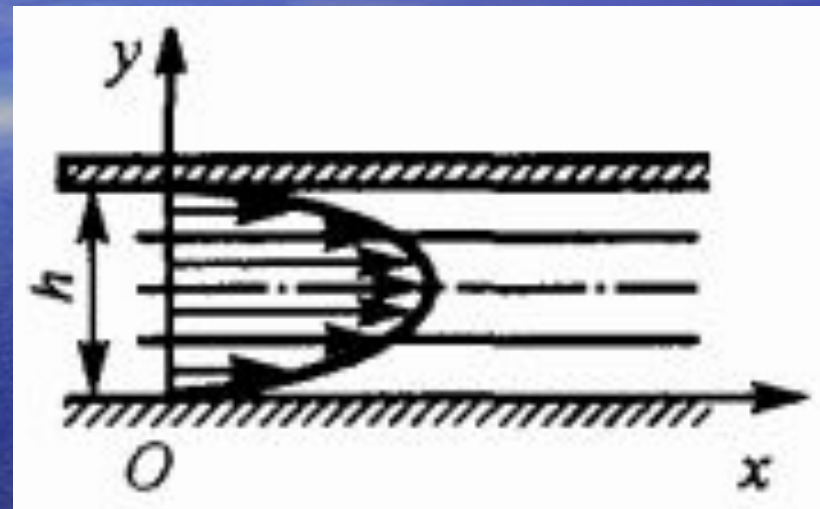
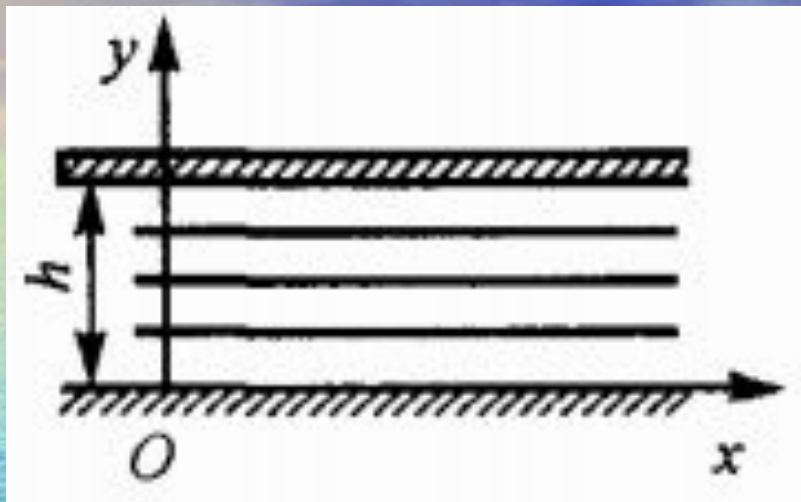
$$l_{нач} = 0,028dRe$$

для ламинарного режима

$$l_{нач} = 0,639dRe^{0,25}$$

для турбулентного режима

# Равномерное ламинарное течение в плоском канале



$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = 0;$$
$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0.$$

$$u = \frac{y^2}{2\mu} \frac{dp}{dx} + C_1 y + C_2,$$

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y(y - h) + u_0 \frac{y}{h}$$

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y(y - h)$$

$$u_m = -\frac{h^2}{8\mu} \frac{dp}{dx}.$$

$$\frac{u}{u_m} = 4 \left( 1 - \frac{y}{h} \right) \frac{y}{h}.$$

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} = \frac{1}{2} \frac{dp}{dx} (2y - h)$$

$$\tau = \tau_0 \left( 2 \frac{y}{h} - 1 \right)$$

$$q = \int_0^h u dy = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} \int_0^h y(y - h) dy = \frac{h^3}{12\mu} \frac{dp}{dx}$$

$$v = \frac{q}{h} = \frac{h^2}{12\mu} \frac{dp}{dx}$$

$$u_m = -\frac{h^2}{8\mu} \frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{v}{u_m} = \frac{2}{3}$$

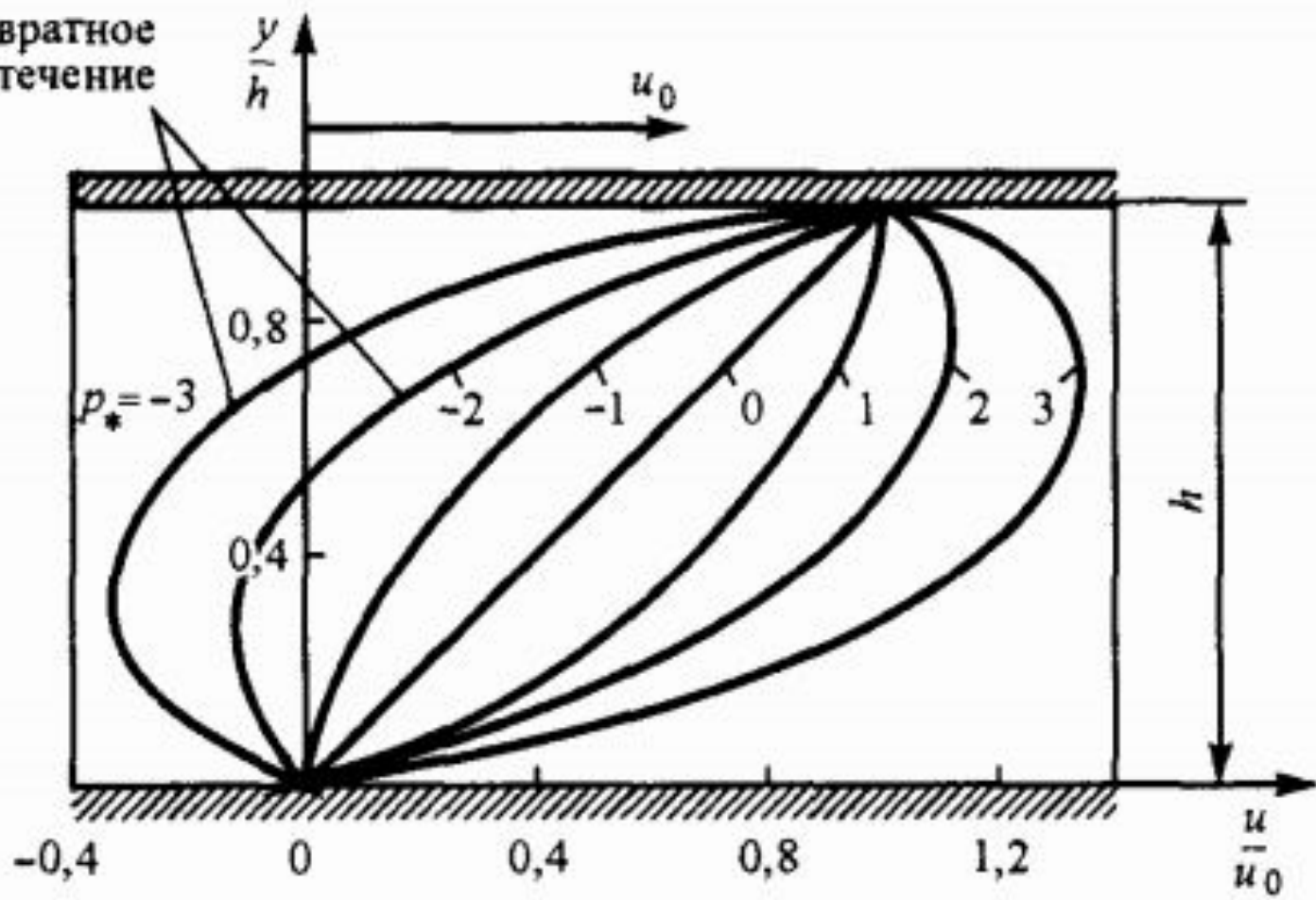
$$p_1 - p_2 = \frac{12\mu v}{h^2} l$$

$$p_1 - p_2 = \lambda_K \frac{l}{h} \rho \frac{v^2}{2}$$

$$\lambda_K = \frac{24}{\text{Re}}$$

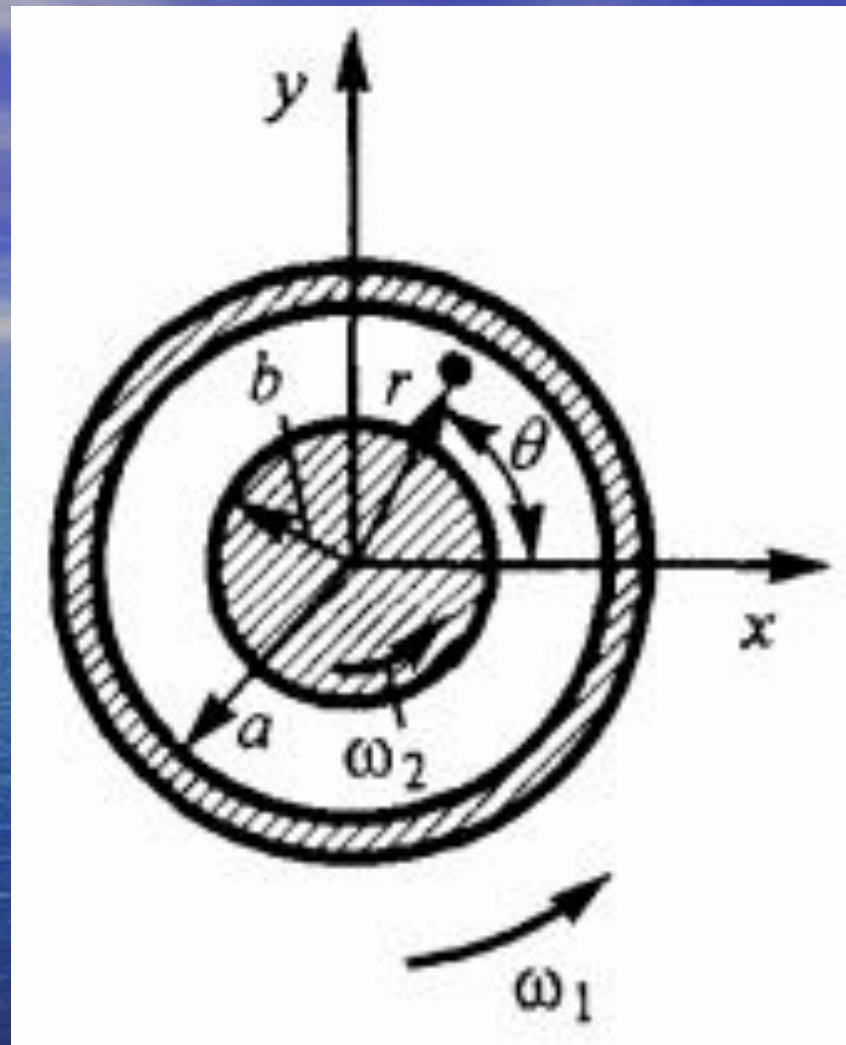


Возвратное течение



Распределение скоростей в ламинарном

потоке между параллельными стенками при  $u_0 \neq 0$  и  $\frac{dp}{dx} \neq 0$



$$M_{\text{тр}} = -2\mu\pi l \frac{a^2}{\delta} u \approx -\mu \frac{2\pi b^2 l}{\delta} u$$

$$u = \omega_2 b$$

# Элементы теории подобия

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЙ  
ПРОЦЕСС

математическая модель

решение системы сложных  
дифференциальных  
уравнений известными  
математическими  
методами

*общий случай,  
но не всегда возможен*

экспериментальная модель

получение эмпирических  
уравнений

*частный случай,  
применим не для всех  
аналогичных явлений*

**ТЕОРИЯ  
ПОДОБИЯ**

# Элементы теории подобия

Два процесса подобны, если описываются тождественными уравнениями с тождественными граничными условиями и протекают в геометрически подобной обстановке.

Зная условия подобия, можно исследовать модельный аппарат, машину, а потом перенести результаты испытаний на реальный проектируемый объект. Для выявления условий гидромеханического подобия уравнение Навье—Стокса преобразуется к безразмерному виду.

$L$  – масштаб длины;  $\tilde{x} = x/L$ ;  $\tilde{y} = y/L$ ;  $\tilde{z} = z/L$

$U$  – масштаб скорости;  $\tilde{u}_x = u_x/U$ ;  $\tilde{u}_y = u_y/U$ ;  $\tilde{u}_z = u_z/U$

$T$  – масштаб времени;  $\tilde{t} = t/U$

$g$  – масштаб массовых сил;  $\tilde{X} = X/g$ ;  $\tilde{Y} = Y/g$ ;  $\tilde{Z} = Z/g$

$\Delta p_0$  – масштаб давлений;  $\tilde{p} = p/\Delta p_0$

$$\text{Sh} \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u}_x \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial \tilde{x}} + \tilde{u}_y \frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial \tilde{y}} + \tilde{u}_z \frac{\partial \tilde{u}_z}{\partial \tilde{z}} = \frac{1}{\text{Fr}} \tilde{X} - \text{Eu} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \tilde{u}_x$$

$$\text{Sh} = \frac{L}{UT}; \text{Fr} = \frac{U^2}{gL}; \text{Eu} = \frac{\Delta p_0}{\rho U^2}; \text{Re} = \frac{UL}{\nu}$$

$$\text{Sh} = \frac{F_{\text{и.л}}}{F_{\text{и.к}}}; \text{Fr} = \frac{F_{\text{и.к}}}{F_m}; \text{Eu} = \frac{F_p}{F_{\text{и.к}}}; \text{Re} = \frac{F_{\text{и.к}}}{F_{\text{тр}}}$$

Полную модель для объекта не всегда удастся получить. Воспользовавшись индексами: о – объект; м – модель, рассмотрим пример:

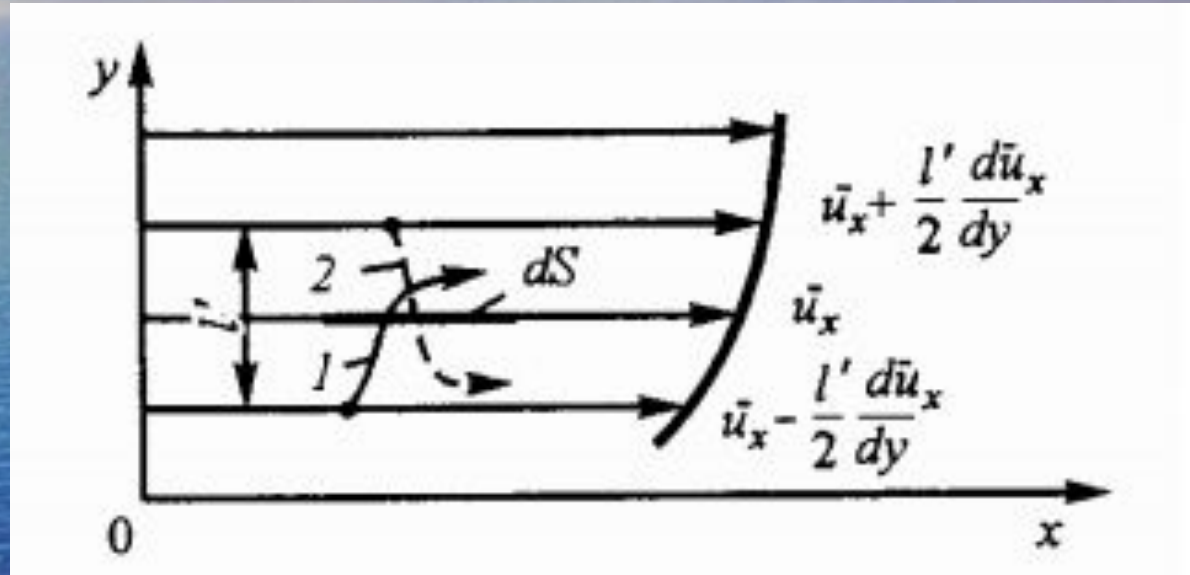
Пусть  $L_0/L_m = 10^2$ . Тогда из равенства чисел Фруда  $U_0^2/(gL_0) = U_m^2/(gL_m)$  следует, что  $U_0/U_m = (L_0/L_m)^{0,5} = 10$ ; а из равенства чисел Рейнольдса

$$\frac{U_0 L_0}{\nu_0} = \frac{U_m L_m}{\nu_m}; \quad \frac{\nu_0}{\nu_m} = \frac{U_0 L_0}{U_m L_m} = 10^3$$

Т. е. испытания модели надо проводить в среде, вязкость которой значительно ниже вязкости среды объекта, что не всегда удастся реализовать

# Турбулентное течение

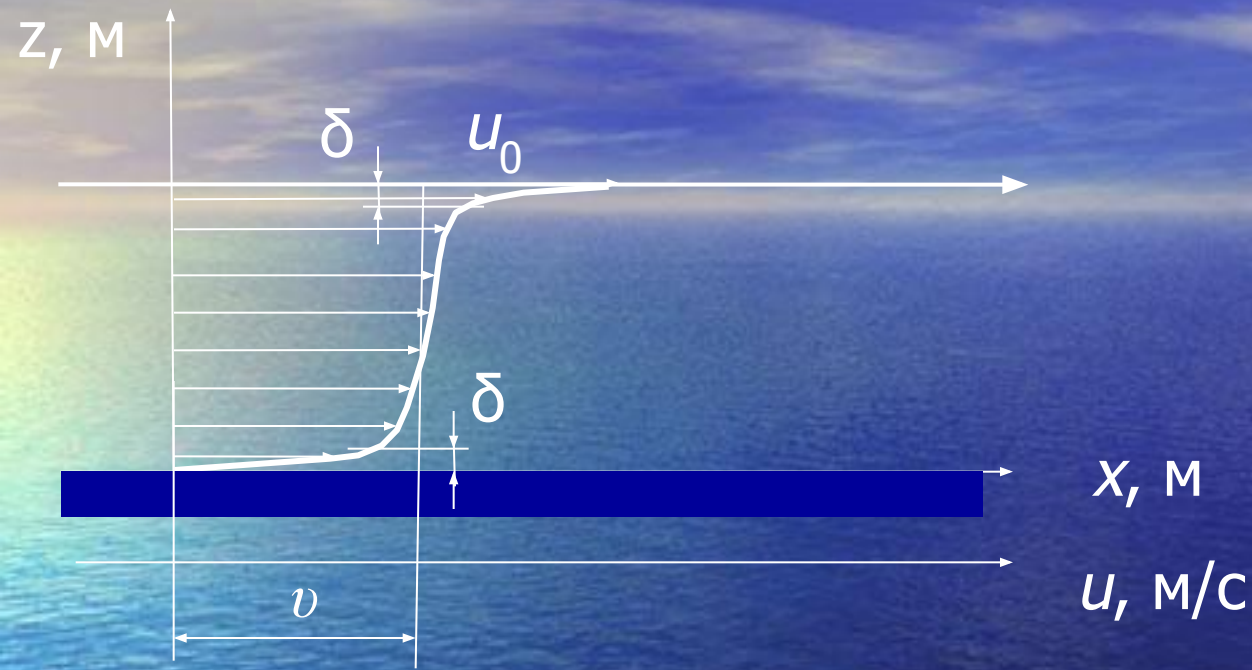
$$-\overline{\rho u'_x u'_y} = \mu_T \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y}.$$



**Схема механизма возникновения турбулентной вязкости**

$$\tau_T dS = \rho u'_y \left[ \left( \bar{u}_x + \frac{l'}{2} \frac{d\bar{u}_x}{dy} \right) - \left( \bar{u}_x - \frac{l'}{2} \frac{d\bar{u}_x}{dy} \right) \right] dS.$$

# Турбулентное безнапорное течение Куэтта



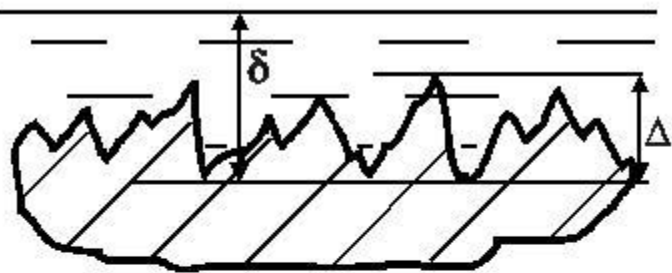
Наличие пульсационного перемешивания жидкости приводит к выравниванию скоростей в средней части потока

С целью получения аналитических выражений для профиля скоростей поток представляется в виде:

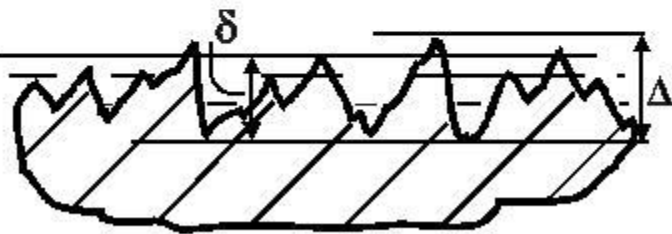


**ламинарного пристенного слоя** толщиной  $\delta$ , в котором предполагается отсутствие турбулентности, и

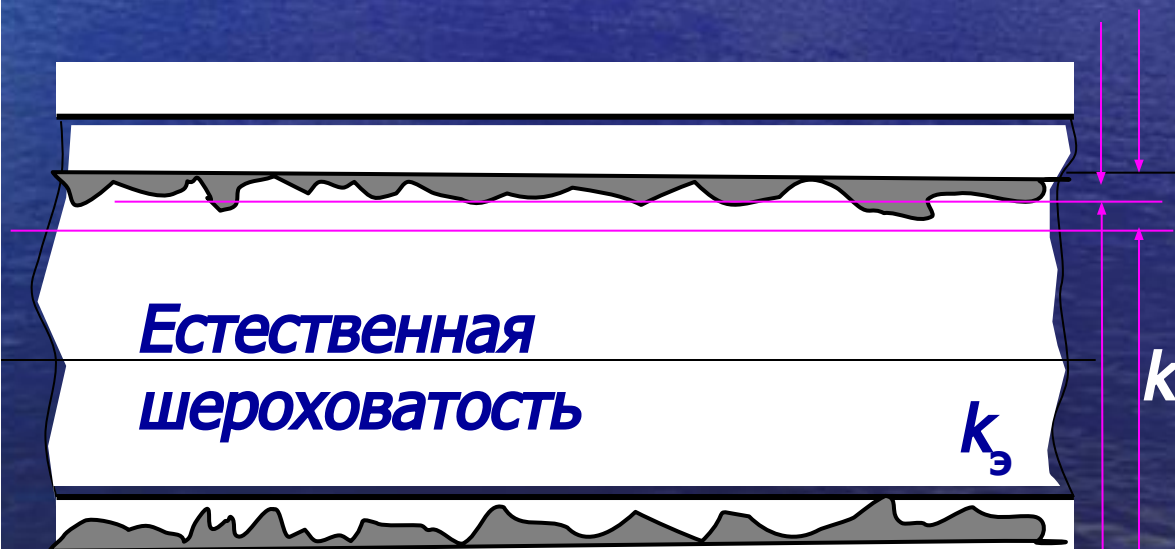
**турбулентного ядра**, в котором вязкость жидкости  $= 0$ . Если  $\delta > \Delta$ , то каналы называются гидравлически гладкими, если  $\delta < \Delta$ , то каналы – гидравлически шероховатые, где  $\Delta$  – высота микронеровностей на поверхности канала.



гидравлически гладкая труба



гидравлически шероховатая труба



**Естественная  
шероховатость**

$k_{\text{э}}$

$k$

При установившемся течении Куэтта:

$$\frac{d\bar{u}_x}{dt} = 0; \quad f_x = 0; \quad \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\sigma}_x - \rho \overline{u'_x u'_x}) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\tau}_{xy} - \rho \overline{u'_x u'_y}) = 0.$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z} - \rho \overline{u'_x u'_z} \right) = 0 \Rightarrow \mu \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z} - \rho \overline{u'_x u'_z} = C_{\text{шт}} \Rightarrow \tau_0 - \tau_0 = \tau$$

**Профиль скоростей в ламинарном слое.**

Поскольку в нем отсутствует турбулентность, т. е.  $\overline{\rho u'_x u'_z} = 0$ ,

то

$$\mu \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z} = \tau_0$$

Граничные условия: при  $z = 0$   $\bar{u}_x = 0$

Интегрируя, получим  $\bar{u}_x = \frac{\tau_0 z}{\mu} \Rightarrow \frac{\bar{u}_x}{u_*} = \frac{u_* z}{\nu}$

**Профиль скоростей в турбулентном ядре потока.** Приняв  $\mu = 0$ , т. е. предположив, что вязкостные напряжения в потоке малы по сравнению с турбулентными  $\tau_{\text{л}} = 0$ , получим

$$-\rho \overline{u'_x u'_z} = \tau_{\theta} = \tau \quad \text{первое допущение о постоянстве } T$$

для решения данной задачи необходимо иметь одну дополнительную зависимость, связывающую турбулентное напряжение  $T_{\text{T}}$  с уже имеющимися параметрами течения. Одной из первых моделей, устанавливающих такую связь является модель Прандтля (1929 г.)

Если ввести понятие турбулентной вязкости  $\nu_{\text{T}}$ , то

$$\tau_{\text{T}} = \rho \nu_{\text{T}} \frac{d\bar{u}_x}{dz} \quad \text{a)}$$

то исходя из аналогии с вязкостью газа можно записать

$$\nu_T = l u_*, \quad b)$$

где  $l$  — длина пути перемешивания, т. е. пути, при прохождении которого жидкостная частица теряет индивидуальность, смешиваясь с остальным потоком;  $u_*$  — среднее значение пульсационной скорости, называемой динамической скоростью

Согласно гипотезе Прандтля

$$l = \alpha z, \quad c) \quad \text{второе допущение о прямой пропорциональности}$$

где  $\alpha$  — коэффициент пропорциональности,  $\alpha < 1$ .

$$u_* = \left( -\overline{u'_x u'_z} \right)^{1/2}$$

Поскольку в ядре потока

$$-\overline{u'_x u'_z} = \tau_T / \rho = \tau_0 / \rho, \text{ то } \Rightarrow u_* = \sqrt{\tau_0 / \rho} \quad d)$$

Подставляя  $d)$ ,  $c)$ ,  $b)$  в  $a)$  получим

$$u_*^2 = \alpha z u_* \frac{d\bar{u}_x}{dz}$$

После интегрирования будем иметь

$$\bar{u}_x = \frac{u_*}{\alpha} \ln z + C \quad e)$$

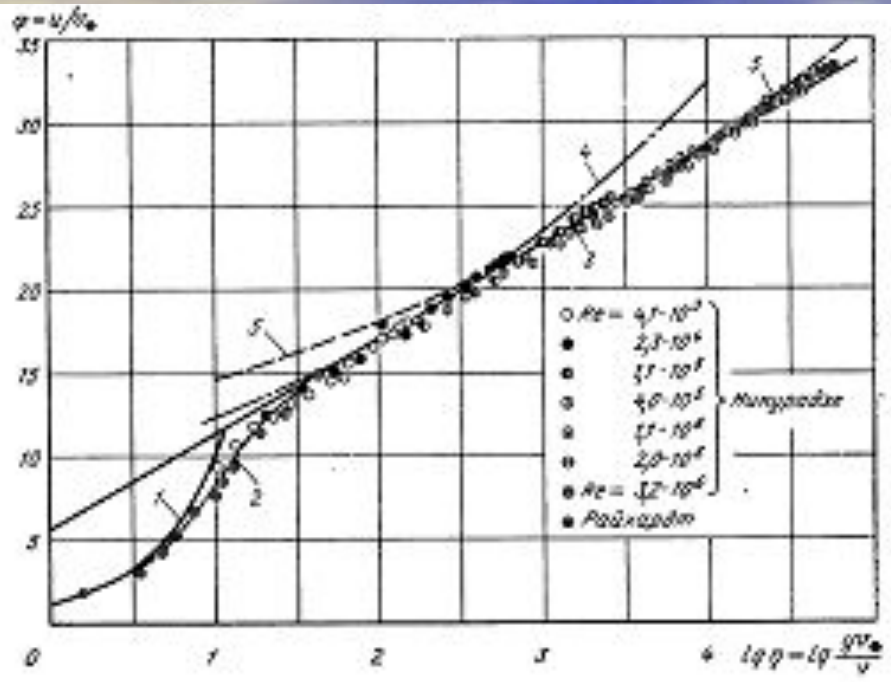
Постоянная  $C$  определяется из условия равенства скоростей на границе ламинарного слоя и ядра потока. При  $z = \delta$

$$C = \frac{u_*^2}{\nu} \delta - \frac{u_*}{\alpha} \ln \delta$$

Тогда

$$\frac{\bar{u}_x}{u_*} = \frac{u_* \delta}{\nu} + \frac{1}{\alpha} \ln \frac{z}{\delta}$$

Универсальный  
профиль  
распределения  
скоростей



1 —  $\frac{\bar{u}_x}{u_*} = \frac{u_* z}{\nu}$

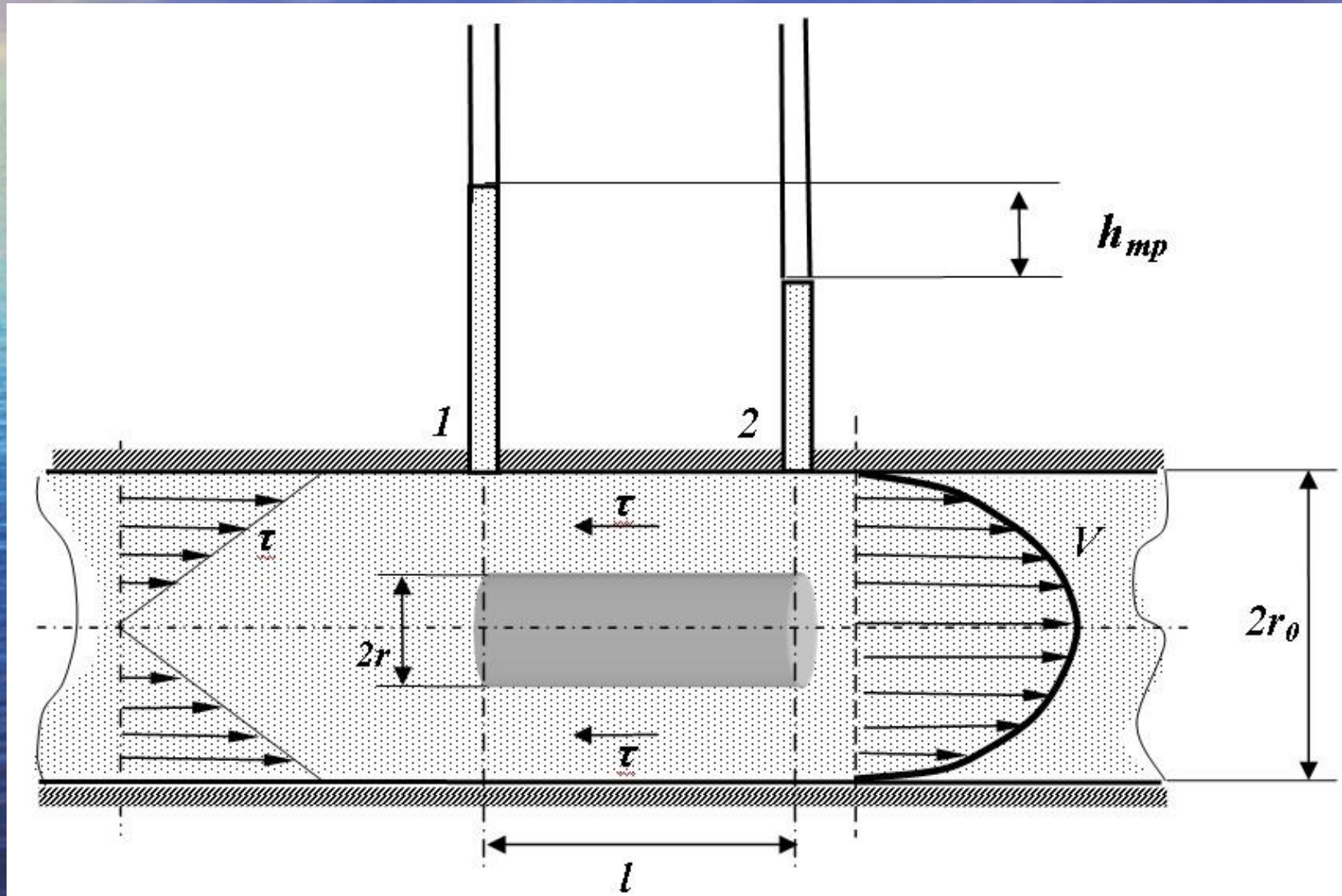
3 —  $\frac{\bar{u}_x}{u_*} = 5,5 + 2,5 \ln \frac{u_* z}{\nu}$

4, 5 —  $\frac{\bar{u}_x}{u_*} = C \left( \frac{u_* z}{\nu} \right)^n$   $\left( \begin{array}{l} 4 - C = 8,74; n = 1/7 \\ 5 - C = 11,5; n = 1/10 \end{array} \right)$

Точные измерения профиля осредненных скоростей в потоке позволили найти  $\alpha = 0,4$ ;  $u_* \delta / \nu = 11,6$ . С учетом этого получим

$$\frac{\bar{u}_x}{u_*} = 5,5 + 2,5 \ln \frac{u_* z}{\nu}$$

Следует отметить, что ни одно из рассмотренных допущений не согласуется с реальностью. Так, например, рассматривая графическую интерпретацию ламинарного течения в трубе будем иметь



Равномерное движение цилиндрического элемента жидкости радиусом  $r$  и длиной  $L$  возможно, если

$$\Delta p = \frac{2L}{r} \tau$$

а равномерное движение всей жидкости в трубе длиной  $L$  и радиусом  $R$  при

$$\Delta p = \frac{2L}{R} \tau_0 \quad f)$$

Поскольку  $\Delta p = \text{const}$ , то

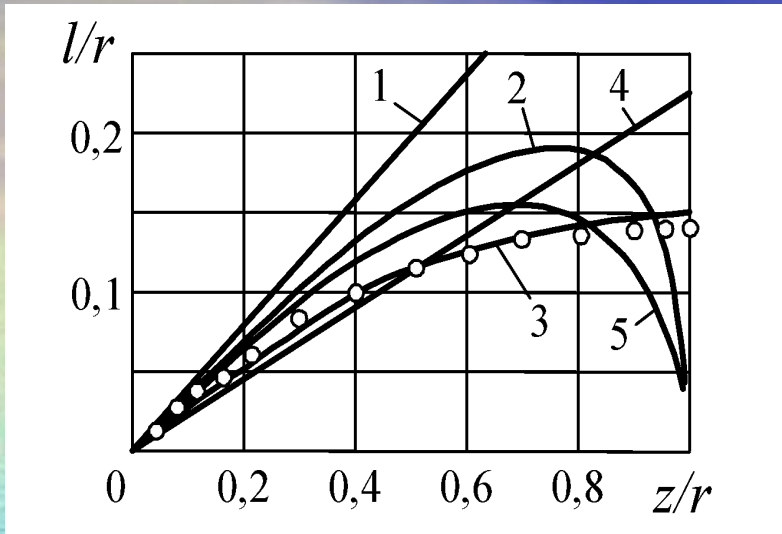
$$\tau = \tau_0 \frac{r}{R} \Rightarrow (r = R - z) \Rightarrow \tau = \tau_0 \left(1 - \frac{z}{R}\right)$$

Кроме этого из уравнения  $f)$  с учетом формулы Дарси-Вейсбаха следует

$$\tau_0 = \lambda \frac{\rho v^2}{8} \Rightarrow u_* = v \sqrt{\frac{\lambda}{8}} \quad g)$$



В соответствии с результатами экспериментов, длина пути перемешивания  $\ell$  достигает максимума на оси трубы.



1 – гипотеза Прандтля; 2 – гипотеза Кармана; 3 – кривая Альтшуля; 4 – кривая Конакова; 5 – кривая Саткевича

## Сопротивление гидравлически гладких и шероховатых труб при турбулентном режиме течения жидкости

Для расчета падения давления по длине горизонтальной трубы применяется уравнение Дарси—Вейсбаха, в котором неизвестными величинами являются средняя скорость  $v$  и коэффициент гидравлического трения  $\lambda$ .

# Алгоритм определения этих величин

Воспользовавшись универсальным профилем скоростей находят среднюю скорость

$$\frac{v}{u_*} = 1,75 + 2,5 \ln \frac{u_* r_0}{\nu},$$

а далее из уравнения *g)* после преобразований

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \lg(\text{Re} \sqrt{\lambda}) - 0,8 \Rightarrow \lambda = \frac{0,3164}{\text{Re}^{0,25}} \quad \text{формула Блазиуса}$$

Гидравлически гладкие трубы характеризуются неравенством

$\Delta < \delta$  или  $\frac{u_* \Delta}{\nu} < \frac{u_* \delta}{\nu} = 11,6$ , что соответствует условию

$$\text{Re} < 20 \frac{d}{\Delta}$$

Гидравлически шероховатые трубы характеризуются неравенством  $\Delta > \delta$  или  $\frac{u_* \Delta}{\nu} > 11,6$ , которое можно представить в виде  $Re > 500 \frac{d}{\Delta}$

В этом случае постоянную интегрирования  $C$  в уравнении e) находят из условия:

при  $z = \Delta$   $\bar{u}_x = \frac{u_*^2 \Delta}{\nu} = 11,6 u_*$ , что дает

$$\frac{\bar{u}_x}{u_*} = C_1 + 2,5 \ln \frac{z}{\Delta}$$

Определив среднюю скорость потока  $V$ , получим

$$\frac{V}{u_*} = C_2 + 2,5 \ln \frac{r_0}{\Delta}$$

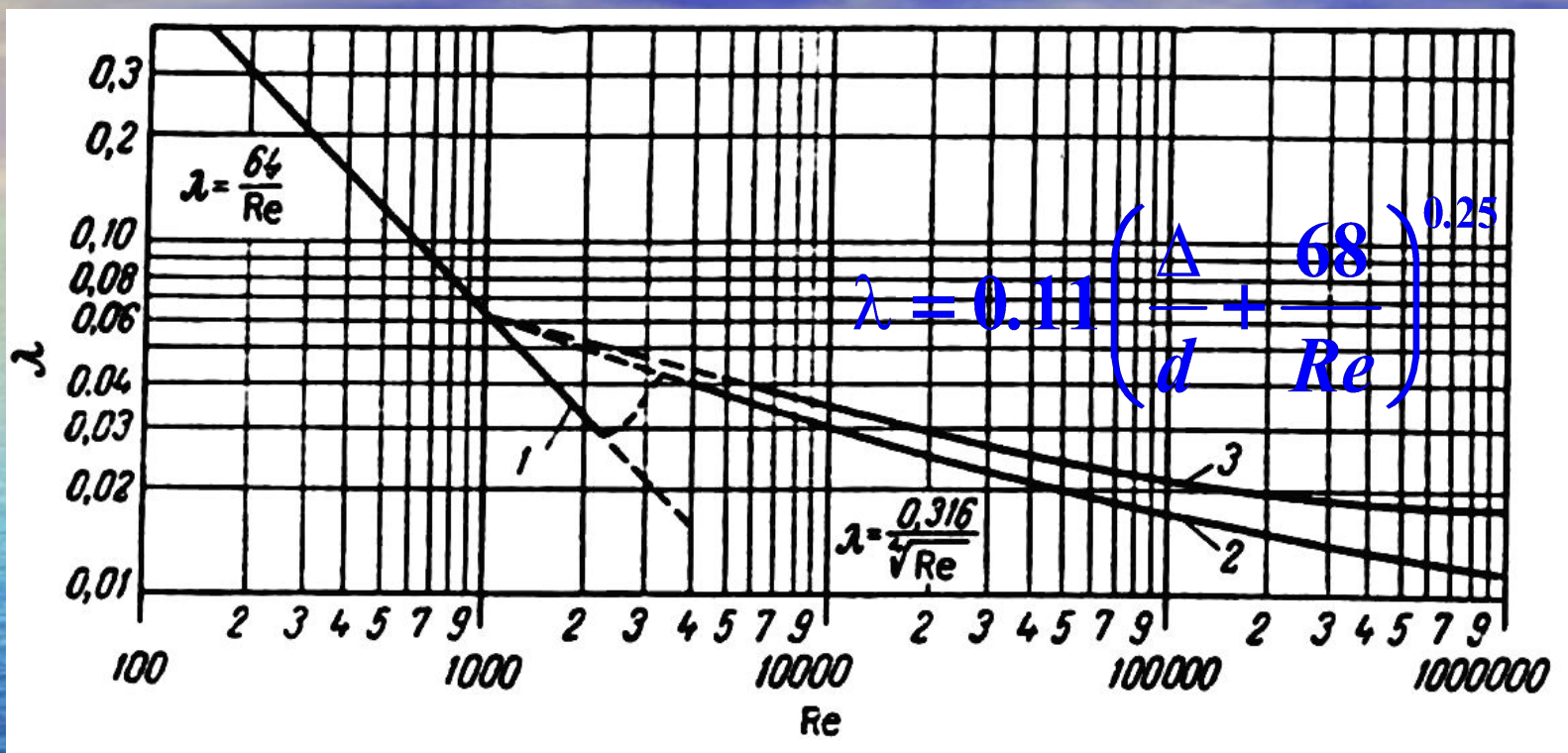
А далее с учетом уравнения g) будем иметь

$$\sqrt{\frac{8}{\lambda}} = C_3 + 2,5 \ln \frac{r_0}{\Delta}$$

Это уравнение хорошо аппроксимируется более простым

$$\lambda = 0,11 \left( \frac{\Delta}{d} \right)^{0,25} \quad \text{формула Шифринсона}$$

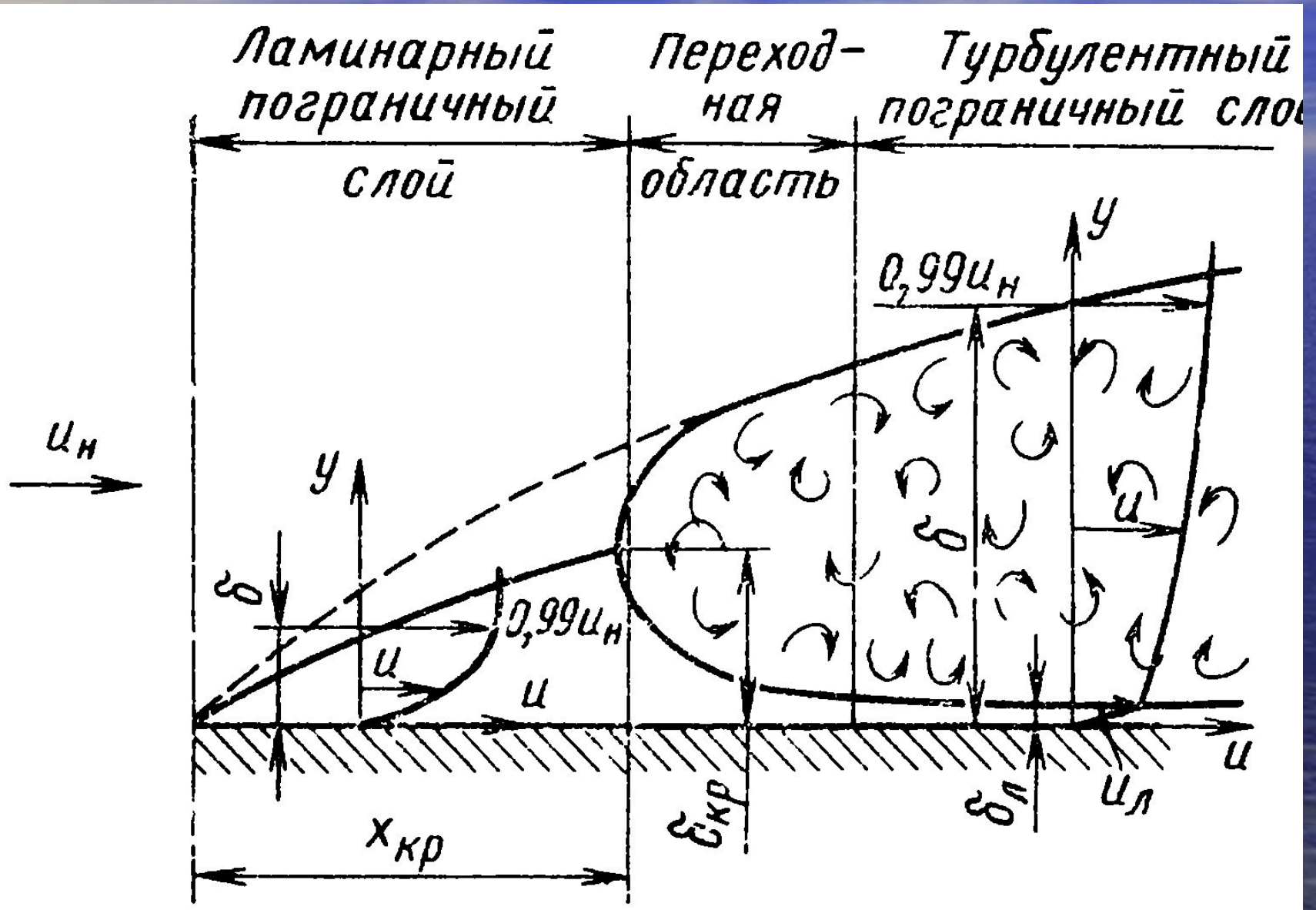
$$\lambda = 0,11 \left( \frac{\Delta}{d} + \frac{68}{\text{Re}} \right)^{0,25} \quad \text{формула Альтшуля}$$



Зависимость  $\lambda$  от критерия  $Re$ :

1 – гладкие и шероховатые трубы; 2 – гладкие трубы; 3 – шероховатые трубы

# Уравнения пограничного слоя



Тонкий пристенный слой переменной толщины  $\delta$ , формирующийся при обтекании плоской пластины с заостренной передней кромкой набегающим равномерным потоком вязкой жидкости, называют пограничным слоем. В этом слое жидкость заторможена за счет вязкостных сил трения, а скорость изменяется от нуля на стенке до значения, близкого к скорости набегающего потока  $U$ .

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \gg \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}$$

На внешней границе очевидно, что  $u_x = U$

$$\frac{p}{\rho g} + \frac{U^2}{2g} = C, \text{ т.е. } \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = -U \frac{dU}{dx}$$

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}$$

# Интегральное соотношение пограничного слоя

$$\frac{d}{dx} \left( U^2 \delta_2 \right) + U \delta_1 \frac{dU}{dx} = \frac{\tau_0}{\rho}$$

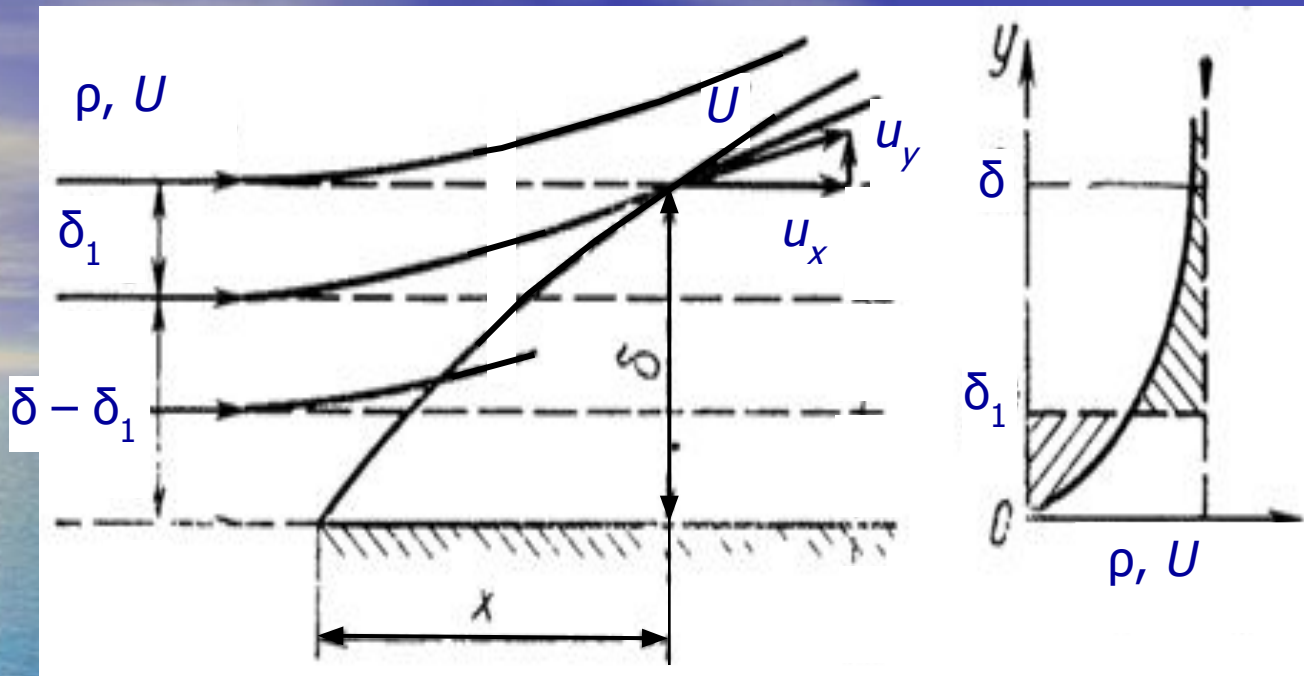
$$\delta_2 = \int_0^{\delta} \frac{u_x}{U} \left( 1 - \frac{u_x}{U} \right) dy$$

толщина потери импульса

$$\delta_1 = \int_0^{\delta} \left( 1 - \frac{u_x}{U} \right) dy$$

толщина вытеснения, определяющая насколько смещаются линии тока основного потока из-за уменьшения скоростей в пограничном слое или иначе это толщина слоя, в каждом сечении которого расход невозмущенного потока  $\delta_1 U$  равен расходу, вытесненному из пограничного слоя к соответствующему сечению





$$u_x \gg u_y \Rightarrow \partial p / \partial y = 0$$

При  $U = \text{const}$  и ширине пластины  $B$  будем иметь

$$\frac{d\delta_2}{dx} = \frac{\tau_0}{\rho U^2} \Rightarrow \rho U^2 \delta_{2p} = \int_0^l \tau_0 dx \Rightarrow \rho U^2 \delta_2 B = F$$

# ОДНОМЕРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

одномерными называют потоки, в которых гидродинамические величины (скорость, давление) зависят только от одной геометрической координаты. Если реальные потоки жидкости в каналах различной формы характеризовать средней расходной скоростью и давлением на оси потока, то такой поток можно считать одномерным

## Уравнение Бернулли для потока вязкой жидкости

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} = \frac{v_2}{g} \int_l \frac{\partial p}{\partial t} dt + z_2 + \frac{v_2^2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} + h_w$$

$$h_w = \frac{1}{\rho g Q_V} \int_V \rho c_p \frac{dT}{dt} dV = \frac{1}{\rho g Q_V} \int \mu D dV$$

$$h_w = h_{MC} + h_l; h_{MC} = \xi \frac{v^2}{2g}; h_l = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}; d = \frac{4S}{\Pi}.$$

## Уравнение Бернулли для сети с насосом

Если выполняется условие

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} < z_2 + \frac{v_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}$$

то для обеспечения подачи жидкости необходимо сообщить ей энергию внешним источником, или насосом.

Удельная энергия, сообщаемая жидкости насосом, называется полезным напором и обозначается  $H$ , м. Уравнение баланса энергий в этом случае имеет вид

$$H + z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{v_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_w$$

Это уравнение позволяет для заданной схемы трубопроводов рассчитывать  $H$ , а следовательно, подобрать насос. Поскольку слагаемые

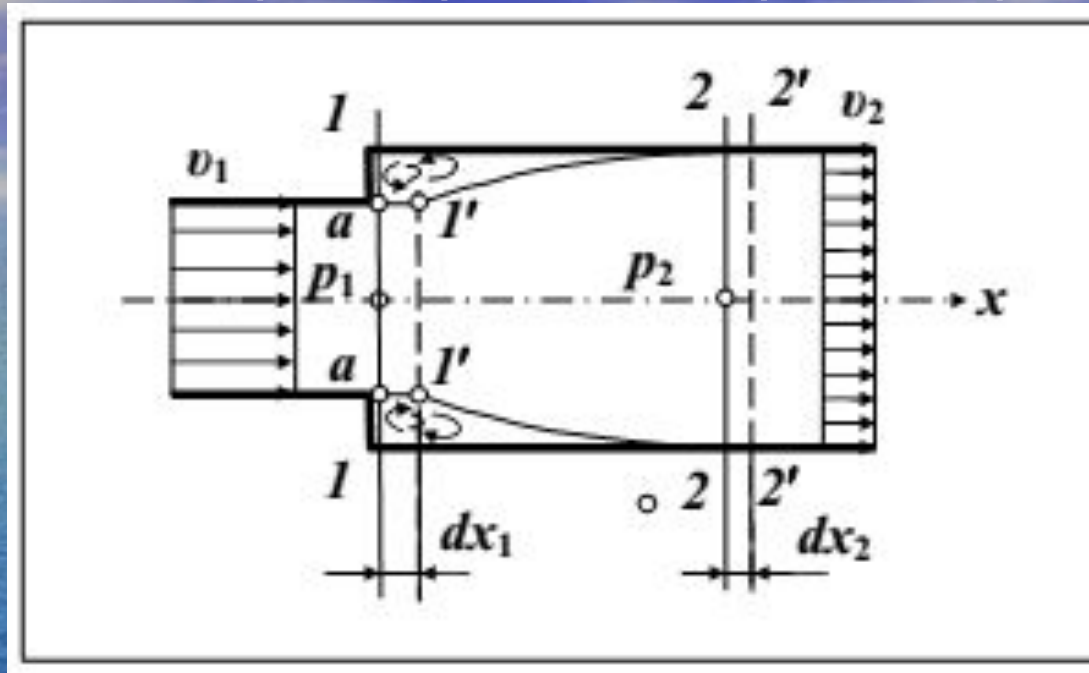
$$\alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} - \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} + h_w = f(Q),$$

то

$$H = z_2 - z_1 + \frac{p_2 - p_1}{\rho g} + f(Q) = H + \quad \begin{array}{l} \text{Уравнение} \\ \text{характеристики} \\ \text{сети} \end{array}$$

# Виды местных сопротивлений

Внезапное расширение. Теорема Борда - Карно



Расчетная схема к определению потерь при внезапном расширении

Из уравнения Бернулли следует 
$$h_{в\ p} = \frac{p_1 - p_2}{\rho g} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g}$$

Выигрыш в давлении определим, воспользовавшись теоремой об изменении количества движения жидкости

$$\frac{dK_x}{dt} = R_{px} \Rightarrow \frac{dK_x}{dt} = \rho Q (v_2 - v_1); \Rightarrow \frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g}$$
$$R_{px} = (p_1 - p_2) S_2.$$

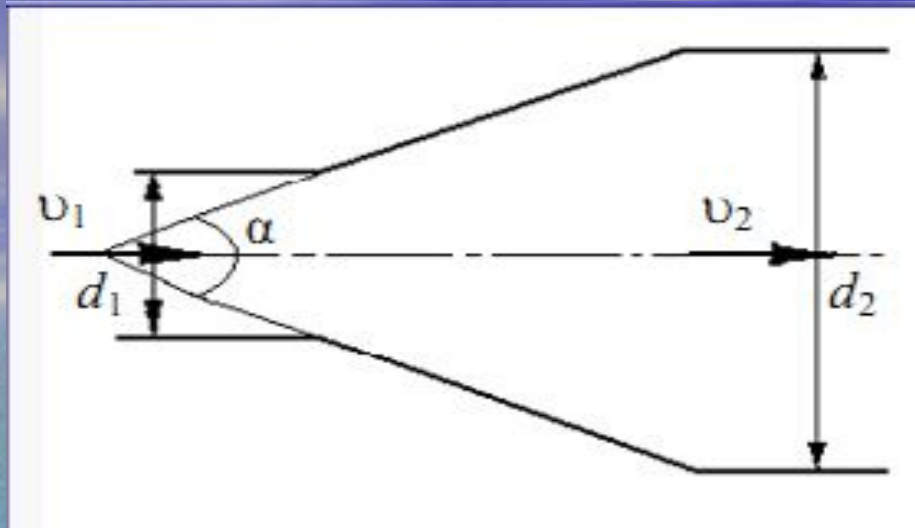
Тогда

$$h_{вп} = \frac{(v_2 - v_1)^2}{2g} = \zeta_1 \frac{v_1^2}{2g} = \zeta_2 \frac{v_2^2}{2g}$$

С учетом уравнения неразрывности  $v_1 S_1 = v_2 S_2$ , получим

$$\zeta_1 = \left( \frac{S_1}{S_2} - 1 \right)^2 \quad \zeta_2 = \left( 1 - \frac{S_2}{S_1} \right)^2$$

## Постепенное расширение

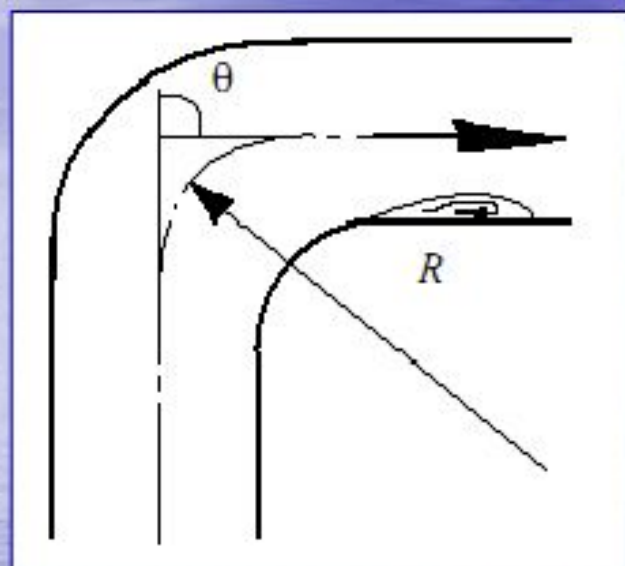


Потерю напора в диффузоре можно условно рассматривать как сумму потерь на трение и расширение. При небольших углах  $\alpha$  возрастают потери по длине, а сопротивление на расширение становится минимальным. При больших углах  $\alpha$  наоборот: возрастает сопротивление на расширение. Коэффициент сопротивления диффузора можно определить по следующей формуле

$$\xi_{\text{диф}} = \frac{\lambda}{8 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$$

$$h_{\text{диф}} = \xi_{\text{диф}} \frac{v_1^2}{2g}$$

## **Поворот трубы (колесо)**

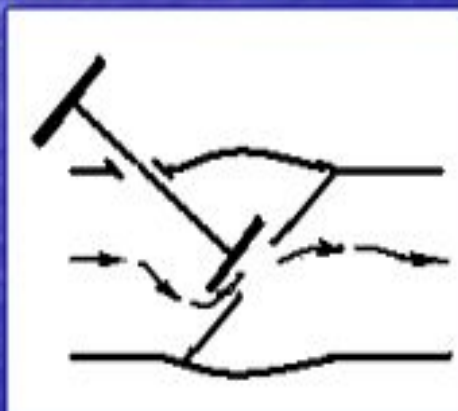


Величина коэффициента местного сопротивления зависит от угла поворота  $\theta$ , радиуса поворота  $R$ , формы поперечного сечения и приводится в справочниках. Для круглого сечения трубы при  $\theta = 90^\circ$ , коэффициент сопротивления можно определить по формуле

$$\xi_{\text{кол}} = 0,05 + 0,2 \frac{d}{R}$$

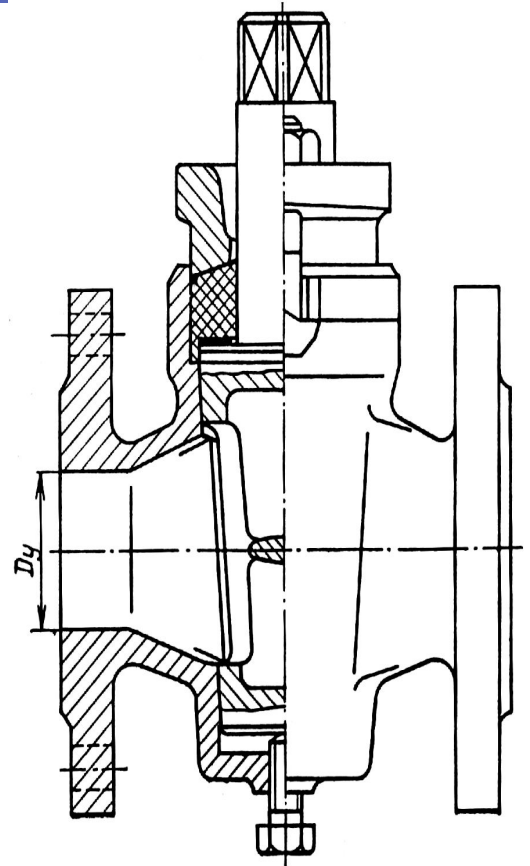
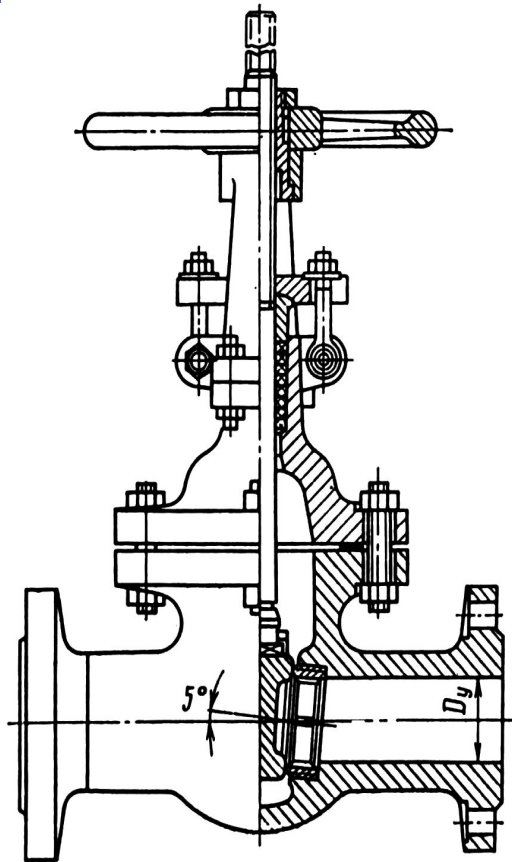
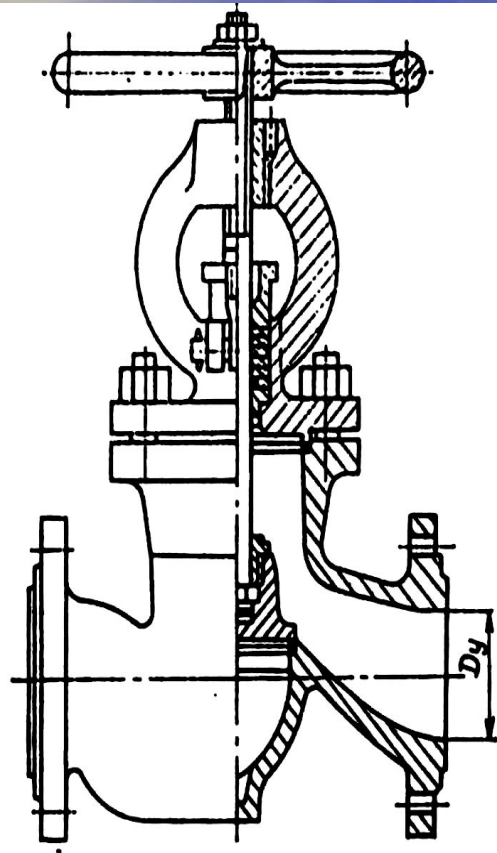
## **Другие виды местных сопротивлений**

Для ориентировочных расчетов можно пользоваться следующими коэффициентами местного сопротивления:



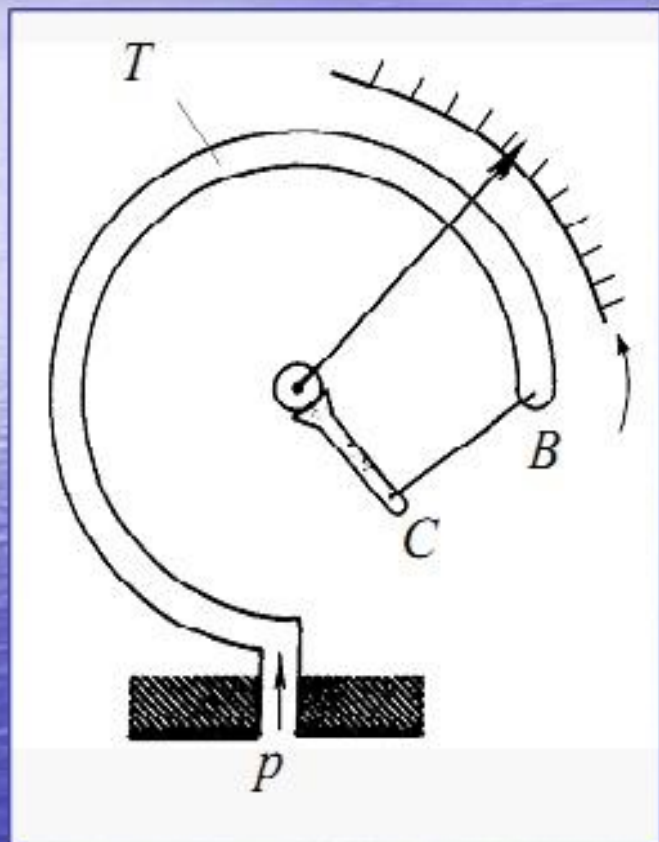
- задвижка при полном открытии – 0,15;
- вход в трубу при острых кромках – 0,5;
- вентиль с косым затвором при полном открытии (рис. 4.18) – 3;
- симметричный тройник – 1,5.





# Измерительные приборы, используемые при проведении экспериментальных работ

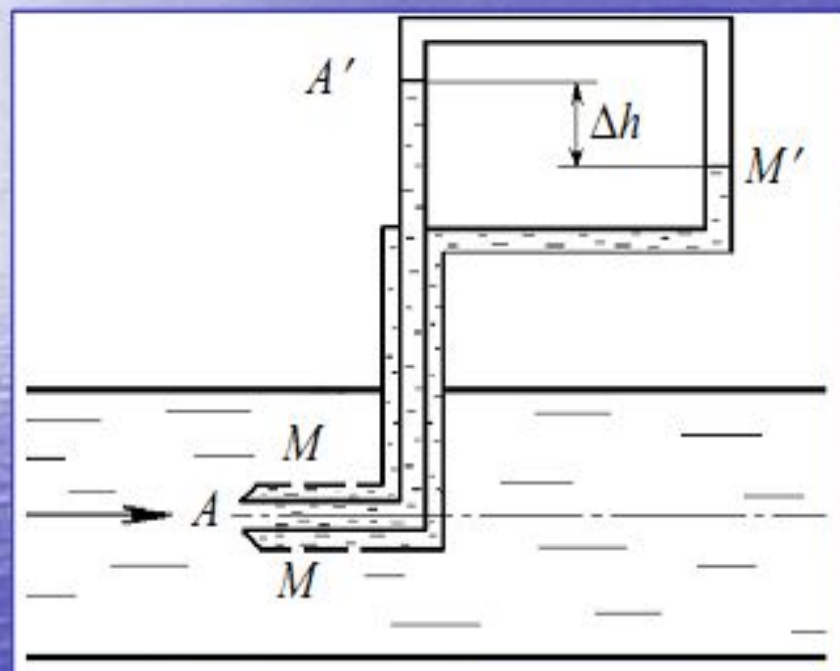
## 2. Механические манометры.



Манометр состоит из согнутой металлической трубки **T**, один конец которой соединен с резервуаром, в котором измеряется давление. Конец трубки **B** соединен с рычагом **BC**, который поворачивает стрелку. При повороте стрелки она указывает величину давления. При избыточном давлении в трубке **T** свободный ее конец **B** начинает распрямляться и приводит в движение стрелку, которая показывает величину давления. Такие манометры отличаются прочностью.

## 5. Трубка Пито–Прандтля.

**Трубка Пито–Прандтля** позволяет одновременно определить величину динамического и статического давления в определенной точке потока.



Разность давления в точках  $A'$  и  $M'$  будет

$$\Delta p = \rho g h$$

Разность давления  $\Delta p$  зависит от динамического давления на входе в трубку Пито–Прандтля, что следует из уравнения Бернулли для точек  $A$  и  $M$ :

$$p_M = p_A + \frac{\rho v^2}{2}$$

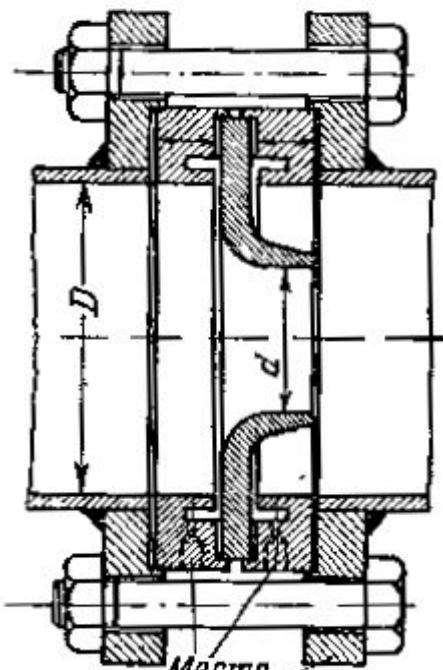
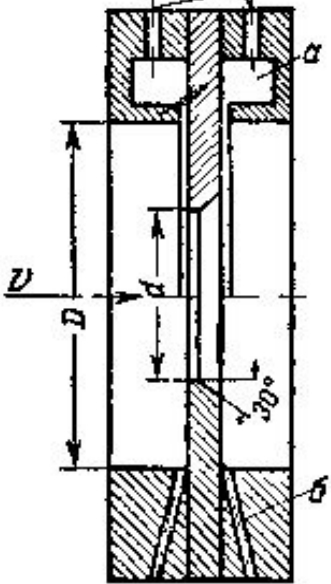
где  $v$  – скорость потока на входе в трубку Пито–Прандтля. Таким образом,

$$\Delta p = \frac{\rho v^2}{2}$$

откуда получаем

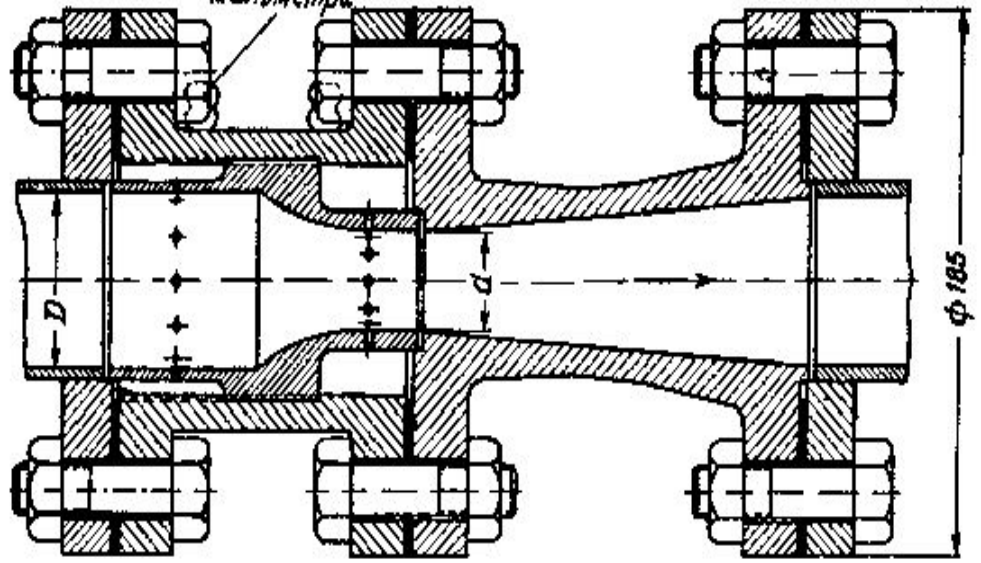
$$v = \sqrt{2gh}.$$

Присоединение  
дифференциального  
манометра

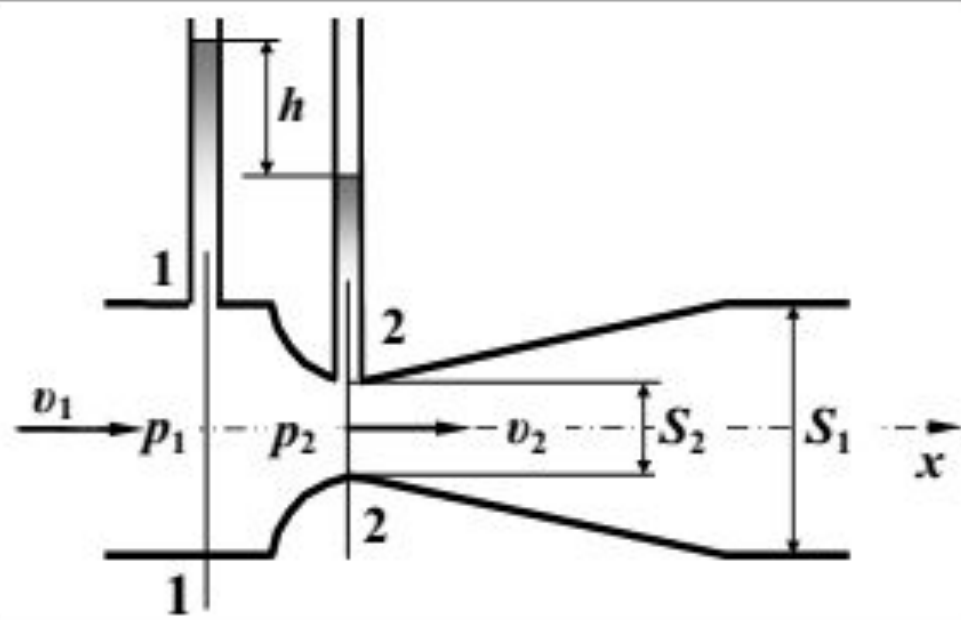


Место  
присоединения дифференциального  
манометра

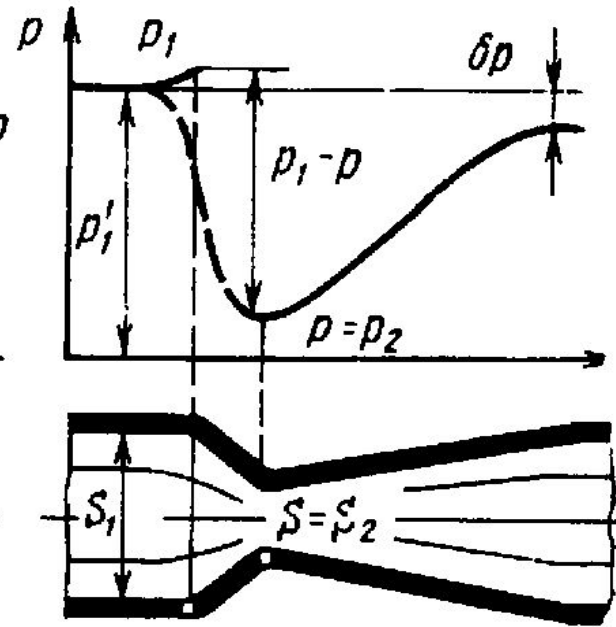
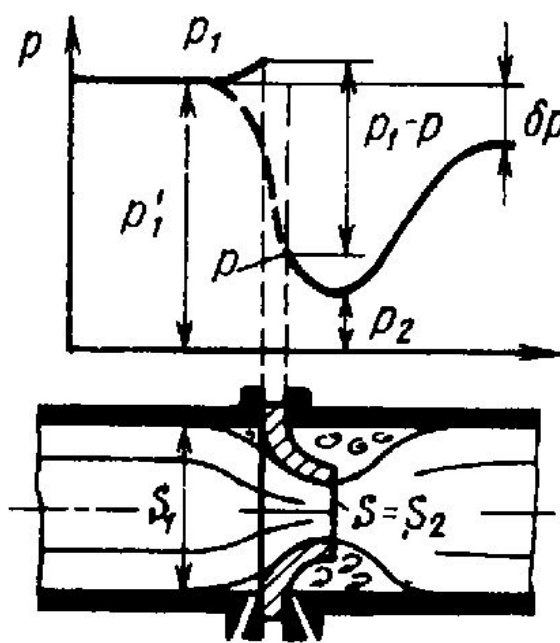
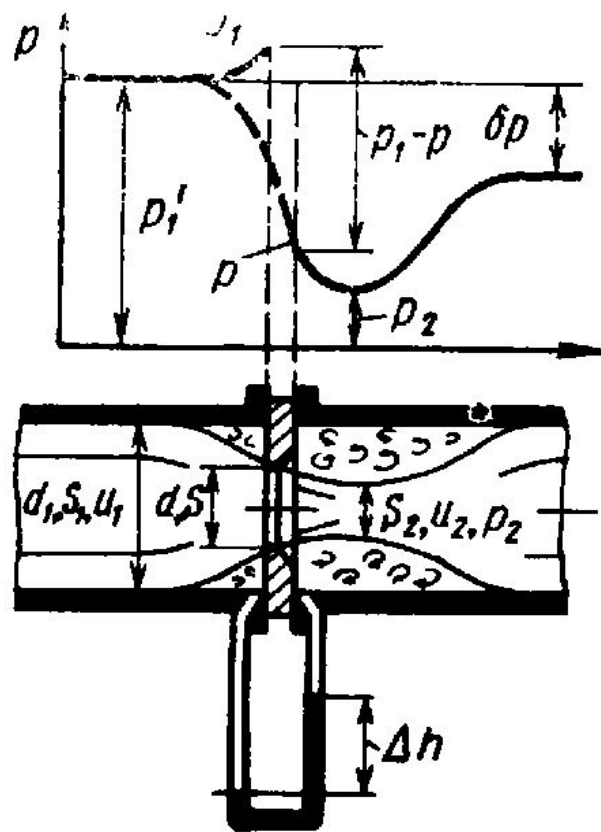
Присоединение  
дифференциального  
манометра



Фиг. 16-3. Расходомерная труба Вентури.



$$v_1 = \sqrt{\frac{2gh}{(\alpha_2 + \zeta) \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - \alpha_1}}$$



**Ротаметр** (рис. 7.12) – это расходомер, выполненный из стеклянной конической трубки, внутри которой находится поплавков. При расходе жидкости  $Q$  поплавков устанавливается по высоте  $a$ . Установим вид зависимости  $Q = f(a)$ . Запишем условие равновесия вертикальных составляющих сил, действующих на поплавков

$$-\rho_{\text{п}} g V_{\text{п}} + \rho_{\text{ж}} g V_{\text{п}} + (p_1 - p_2) S_{\text{п}} = 0$$

где  $V_{\text{п}}$  – объем поплавка;  $\rho_{\text{п}}$  – плотность материала поплавка;  $S_{\text{п}}$  – площадь сечения поплавка.

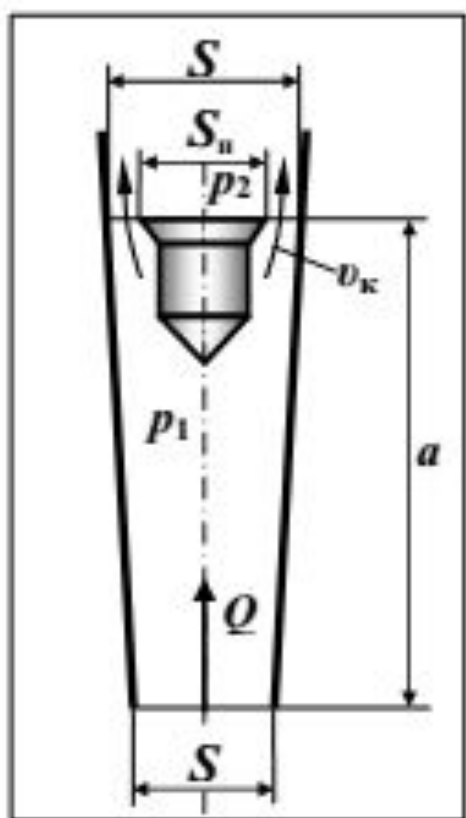


Рисунок 7.12 – Ротаметр

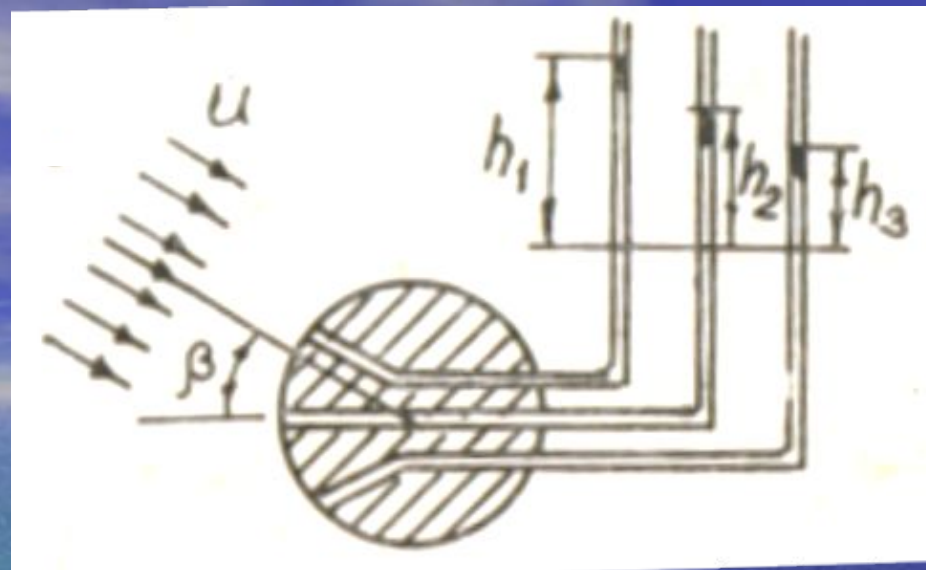
Поскольку величины двух первых слагаемых не зависят от расхода, то для прибора  $p_1 - p_2 = \text{const}$ . Следовательно, гидравлические потери, возникающие при обтекании поплавка,

$$h_w = \frac{p_k - p_2}{\rho g} = \zeta \frac{v_k^2}{2g}$$

Поскольку площадь кольцевого канала  $S_k = S - S_{\text{п}}$ , то скорость жидкости  $v_k = Q/(S - S_{\text{п}}) = \text{const}$ .

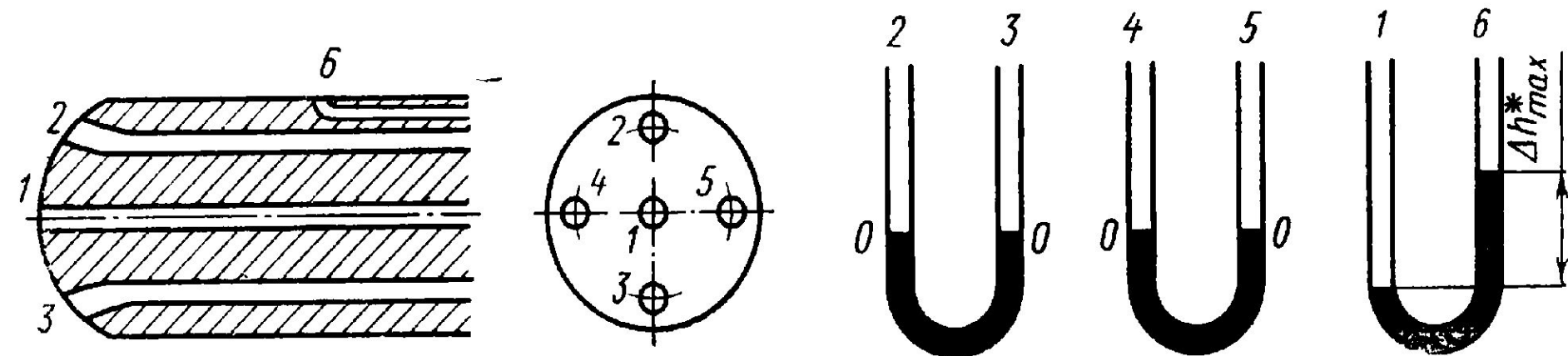
При выполнении условия  $S = S_0 + ka$  ( $k$  – коэффициент пропорциональности) окончательно получим

$$Q = v_k (S_0 - S_{\text{п}} + ka).$$



плоский зонд

Измерив перепады уровней  $h_2 - h_1$  и  $h_2 - h_3$ , каждый из которых зависит от значения скорости  $u$  и угла  $\beta$  набегающего потока, получаем возможность нахождения  $u$  и  $\beta$





## Истечение жидкости

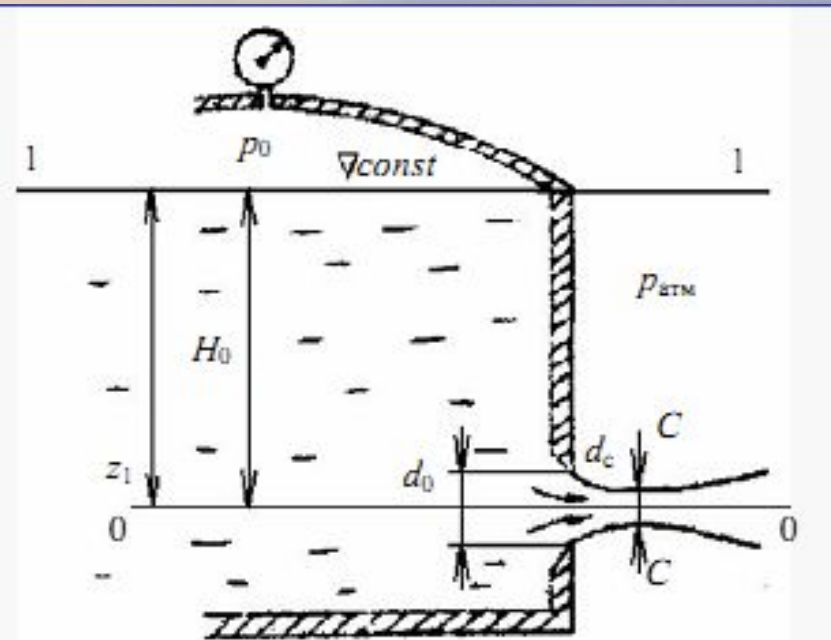
При истечении жидкости через отверстие или насадки из сосуда под давлением  $p_0$  для расчета скоростей и расходов используются зависимости

$$v = \varphi \sqrt{2gH}; \Rightarrow \varphi = v/v_T;$$

$$Q = \mu S_{\theta} \sqrt{2gH}; \Rightarrow \mu = Q/Q$$

# Истечение жидкостей из отверстия в тонкой стенке

Отверстием в тонкой стенке называется отверстие, толщина стенок которого составляет не более  $1/4$  диаметра.



Степень сжатия струи оценивается коэффициентом сжатия струи

$$\varepsilon = S_c / S_0 .$$

Уравнение Бернулли для сечений 1 – 1 и C – C запишется в виде

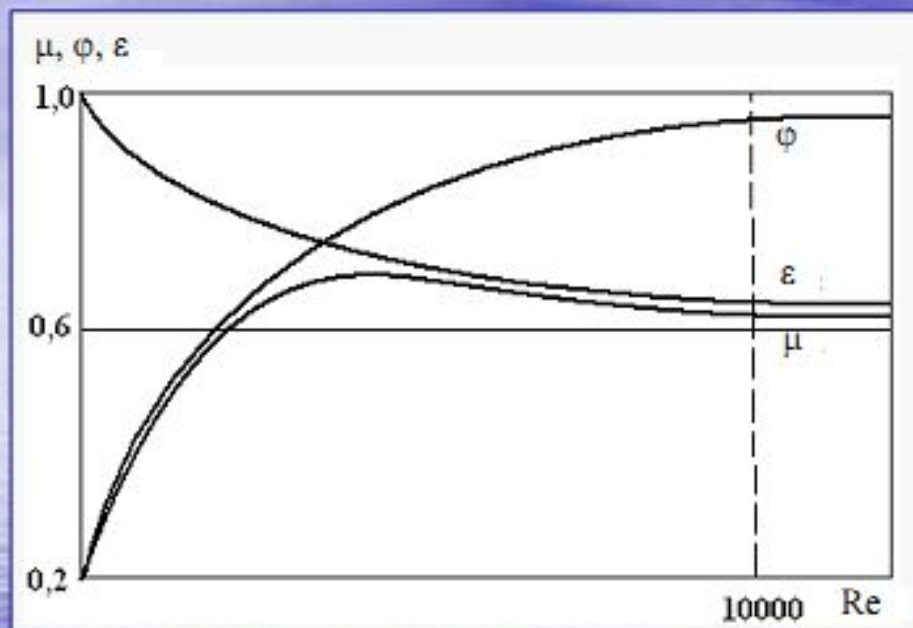
$$H_0 + \frac{p_0}{\rho g} = \frac{p_c}{\rho g} + \frac{\alpha v_c^2}{2g} + \zeta_{\text{сж}} \frac{v_c^2}{2g}$$

$$v_c = \frac{1}{\sqrt{\alpha + \zeta_{\text{сж}}}} \sqrt{2gH} = \varphi \sqrt{2gH}$$

$$\varphi = 1 / \sqrt{\alpha + \zeta}$$

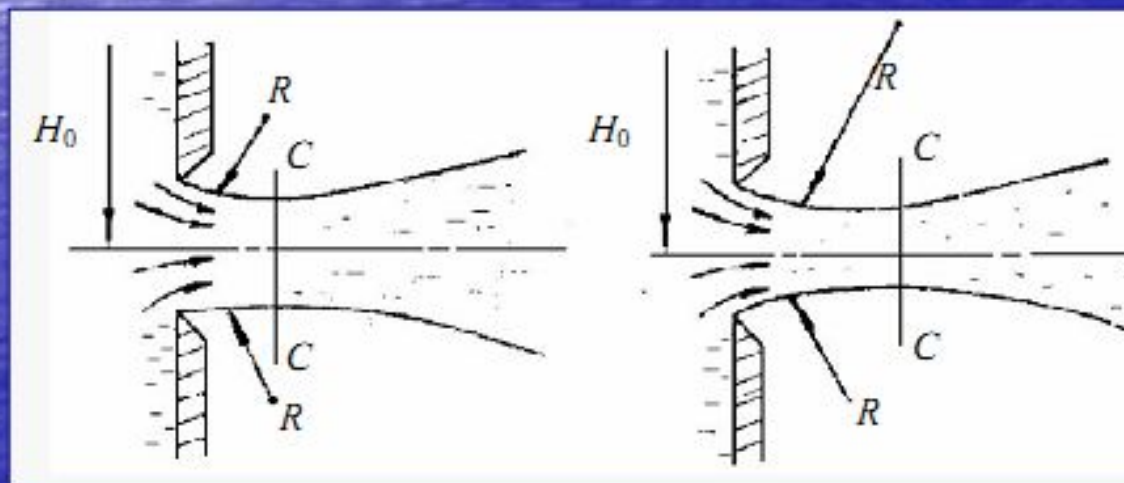
Поскольку  $Q = v_c S_c = \varepsilon S_0 \varphi \sqrt{2gH}$ , то  $\mu = \varphi \varepsilon$ .

# Зависимость коэффициентов истечения от числа Рейнольдса



При истечении вязких жидкостей (например, дизельного топлива через форсунки) или при истечении с небольшими скоростями маловязких жидкостей (при малых числах Рейнольдса) будет проявляться зависимость величин коэффициентов истечения  $\mu$ ,  $\phi$ ,  $\epsilon$  от  $Re$

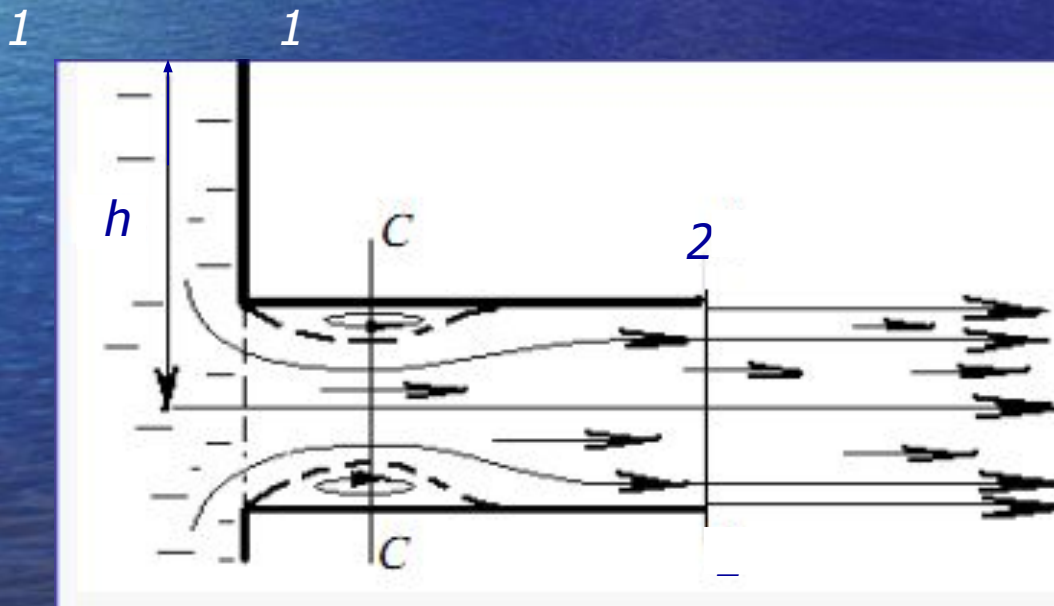
Коэффициент сжатия уменьшается вследствие увеличения радиусов кривизны поверхности струи на её участке от кромки до сжатого сечения  $C-C$ . При  $Re \rightarrow \infty$  значения коэффициентов  $\phi$  и  $\epsilon$  приближаются к значениям, соответствующим истечению идеальной жидкости ( $\phi = 1$ ,  $\epsilon = 0,6$ ).



Экспериментально установлено, что при турбулентном режиме истечения  $\phi = 0,62 - 0,64$ ;  $\mu = 0,60 - 0,62$ ; при ламинарном  $\mu$  и  $\phi$  существенно зависят от  $Re$ .

### *Истечение жидкости через цилиндрический насадок*

Насадком называется короткая труба длиной от 3 до 5 его диаметров, присоединенная к отверстию. При расчете насадков потерями напора по длине обычно пренебрегают.



При входе жидкости в патрубок в сечении  $C - C$  происходит сжатие струи до величины  $S_c$ . Далее следует расширение потока до величины  $S_0$ . В уравнении Бернулли, записанном для сечений 1 и 2,  $z_1 = h$ ;  $z_2 = 0$ ;  $v_1 = 0$ ;  $p_1 = p_0$ ;  $p_2 = p_0$ ;  $h_w = h_c + h_{в.р} + h_f$ , где

$$h_c = \zeta_c g_c^2 \quad (2) \quad h_{в.р} = \frac{(v_2 - v_c)^2}{2g}$$

Для коротких насадков  $h_f$  можно пренебречь. С учетом

$$v_c S_c = v_2 S_0, \quad S_c / S_0 = \varepsilon,$$

получим выражения для скорости и расхода. При этом

$$\varphi = 1 / \sqrt{\alpha + 1/\varepsilon^2 + 1/(1-\varepsilon)^2}; \quad \mu = \varphi$$

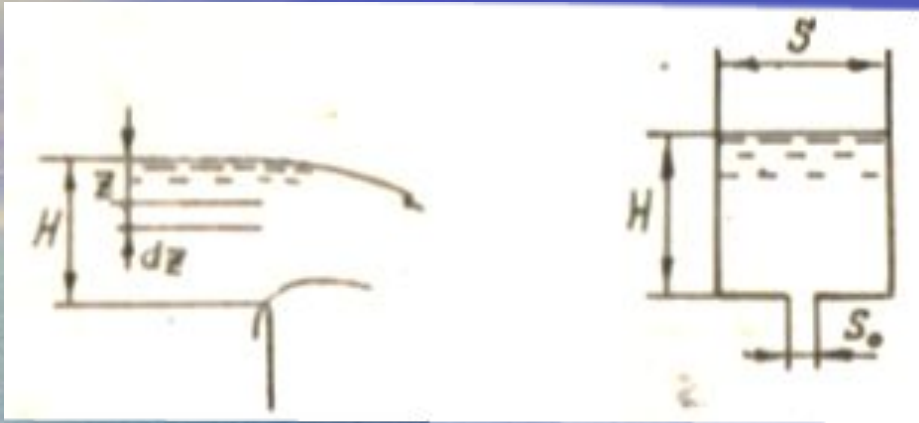
Экспериментально найдено, что при турбулентном истечении  $\mu=0,80 - 0,82$ . Длина патрубков  $l$  принимается обычно равной 3—4 диаметра. Это обеспечивает завершение расширения потока внутри насадка. Если составить уравнение Бернулли для сечений  $c$  и  $2$ , то при  $\alpha=1$  найдем

$$\frac{p_c - p_2}{\rho g} = \frac{v_2^2}{2g} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} < 0,$$

т. е.  $p_c < p_2$ .

Картина истечения между сечениями  $1$  и  $C$  аналогична картине истечения через отверстие, но в насадке жидкость истекает в область пониженного давления. Этим объясняется увеличение расхода  $Q$  по сравнению с отверстием.

# Истечение жидкости через водослив прямоугольного сечения шириной $B$ и опорожнение вертикального цилиндрического сосуда



При  $S_0 \ll S$  течение можно считать установившимся. Пусть в момент времени  $t$  уровень жидкости равен  $H$ .

Расход в слое  $dz$  составит

$$dQ = \mu B \sqrt{2gz} dz$$

Проинтегрировав это выражение по  $z$  от 0 до  $H$ , после преобразований получим

$$Q = mBH^{1.5} \sqrt{2g}$$

где  $m \approx 2/3\mu$

Тогда за  $dt$  вытечет объем

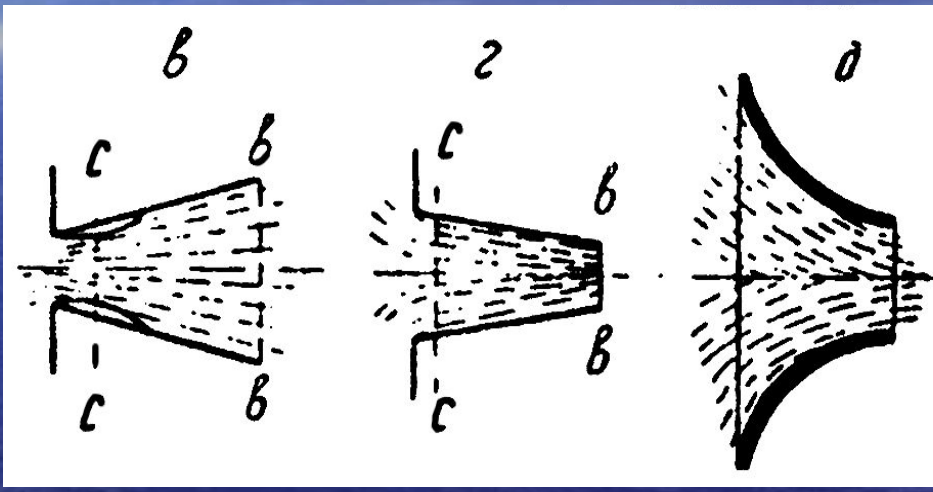
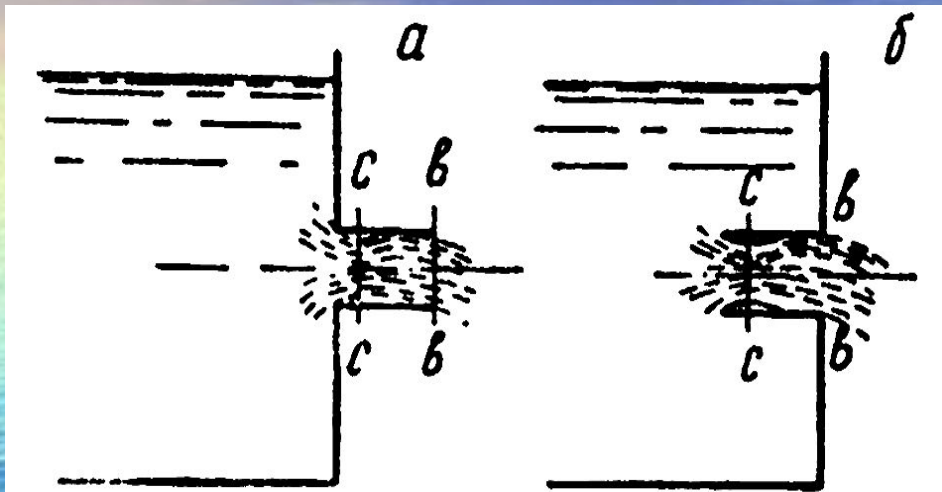
$$dV = Qdt = \mu S_0 \sqrt{2gH} dt$$

и уровень жидкости понизится

$$dH = -\frac{dV}{S} = -\mu \frac{S_0}{S} \sqrt{2gH} dt$$

$t = 2V_0/Q_0$ , где  $V_0 = SH_0$ ;

$$Q_0 = \mu S_0 \sqrt{2gH_0}$$





# Расчет короткого трубопровода

**Коротким** считается трубопровод, в котором потери на местных сопротивлениях превышают 5% от общих потерь. К коротким относятся **системы водоснабжения, водоотведения, горячего водоснабжения внутри зданий**

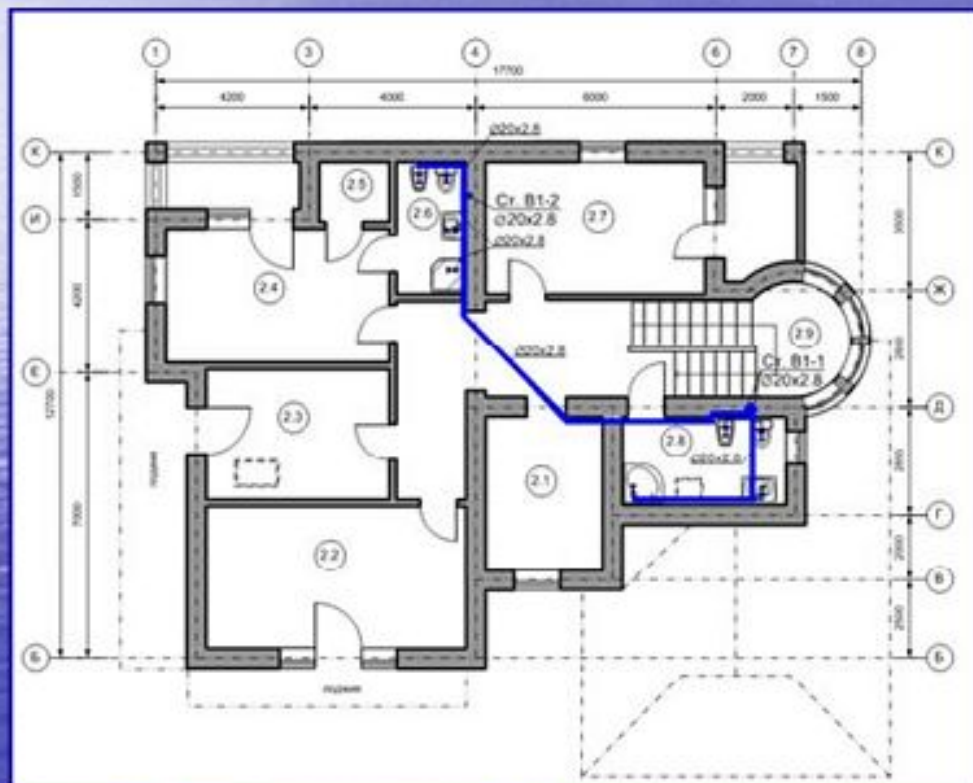


Схема водоснабжения этажа

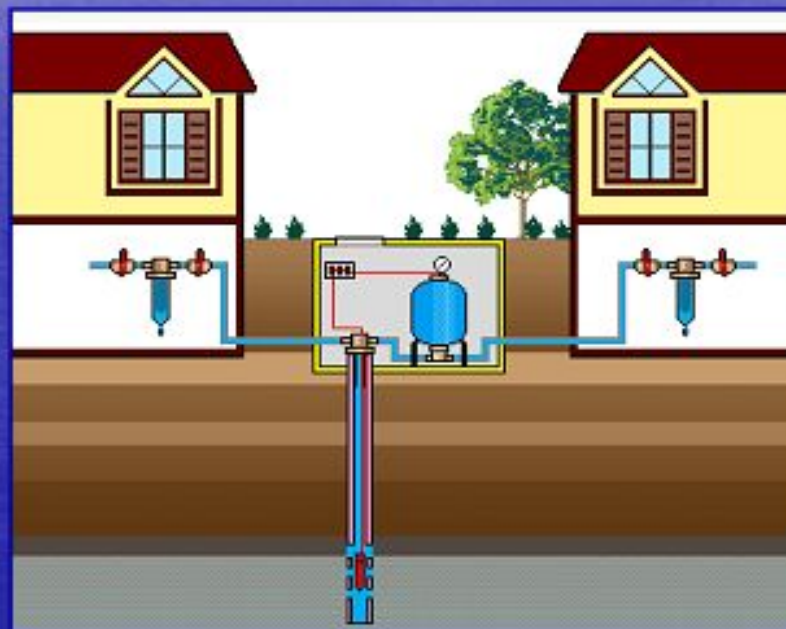


Схема водоснабжения коттеджей

# Расчет короткого трубопровода

Расчет необходимо начать с определения формы записи уравнения Бернулли. Для расчета систем водоснабжения и водоотведения обычно применяется уравнение Бернулли в форме напоров:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_{1cp}^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_{2cp}^2}{2g} + h_w$$

Расчет трубопровода фактически сводится к расчету потерь – местных и по длине. В коротком трубопроводе потери напора по длине определяются по формуле:

$$h_{дл} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v_{cp}^2}{2g}$$

При неизвестном расходе:

– для ламинарного режима коэффициент гидравлического трения определяется по формуле:

$$\lambda = \frac{64}{Re}$$

– для турбулентного режима коэффициент гидравлического трения рассчитывается по формуле:

$$\lambda = 0,11 \cdot \left( \frac{k_э}{d} \right)^{0,25}$$

# Расчет длинных трубопроводов

## Понятие о простом и сложном напорных трубопроводах

При расчете длинных трубопроводов пренебрегают потерями напора на местных сопротивлениях, которые малы и обычно не превышают 5 % от общих потерь.

Преобразуем формулу Дарси, заменив скорость расходом, поделенным на площадь поперечного сечения трубы

$$h_{\text{дл}} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v_{\text{ср}}^2}{2g} = \lambda \frac{l}{d} \frac{Q^2}{2g \left( \frac{\pi d^2}{4} \right)^2} = A Q^2 l$$

$$A = \frac{8\lambda}{g\pi^2 d^5}$$

– удельное сопротивление трубопровода

Величина

$$K = \sqrt{\frac{1}{A}}$$

называется *модулем расхода* и также приводится в справочниках. Тогда

$$h_{\text{дл}} = \frac{Q^2}{K^2} l$$

# Расчет длинных трубопроводов

## Понятие о простом и сложном напорных трубопроводах

При расчете длинных трубопроводов пренебрегают потерями напора на местных сопротивлениях, которые малы и обычно не превышают 5 % от общих потерь.

Преобразуем формулу Дарси, заменив скорость расходом, поделенным на площадь поперечного сечения трубы

$$h_{\text{дл}} = \lambda \frac{l}{d} \frac{v_{\text{ср}}^2}{2g} = \lambda \frac{l}{d} \frac{Q^2}{2g \left( \frac{\pi d^2}{4} \right)^2} = A Q^2 l$$

$$A = \frac{8\lambda}{g\pi^2 d^5}$$

– удельное сопротивление трубопровода

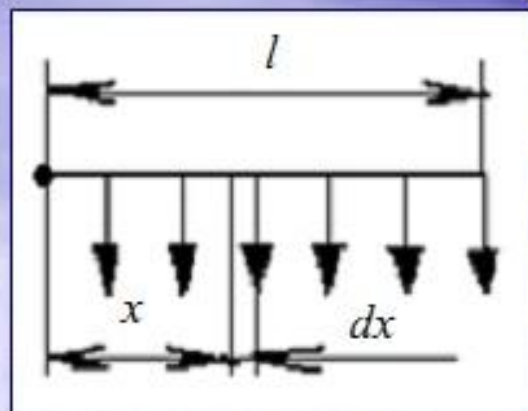
Величина

$$K = \sqrt{\frac{1}{A}}$$

называется *модулем расхода* и также приводится в справочниках. Тогда

$$h_{\text{дл}} = \frac{Q^2}{K^2} l$$

## Расчет трубопроводов, соединенных последовательно и параллельно



**Непрерывная раздача расхода по пути.** К такой схеме приближается работа магистрали водопроводной сети вдоль улицы города при правильной планировке поперечных улиц. Возьмем элементарный участок  $dx$  на расстоянии  $x$  от начала трубопровода. Разбор расхода на 1 м длины –  $q$ . Расход через элементарный участок

$$Q_x = Q - qx$$

Потеря напора на этом участке

$$dh_{\text{дл}} = A Q_x^2 dx = A (Q - qx)^2 dx$$

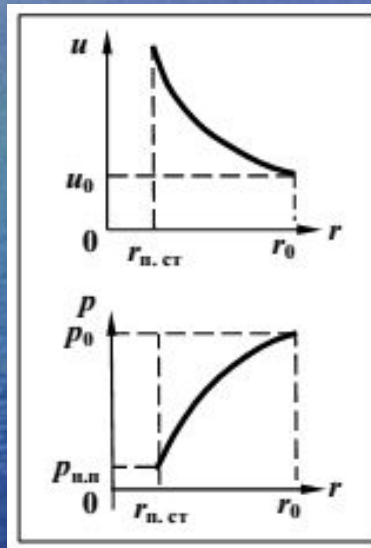
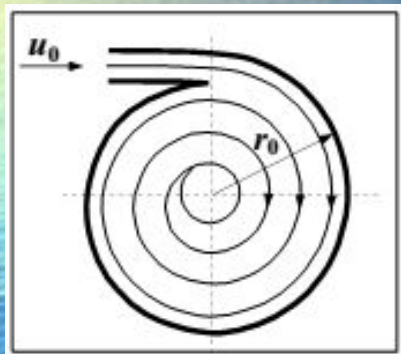
Потеря напора по всей длине трубопровода

$$h_{\text{дл}} = \int_0^l dh_{\text{дл}} = A \int_0^l (Q - qx)^2 dx = A \left( Q^2 l - Qql^2 + \frac{q^2 l^3}{3} \right) = A \left( Q^2 l - Q^2 l + \frac{Q^2 l}{3} \right) = A \frac{Q^2 l}{3}$$

**Вывод:** При равномерной раздаче потеря энергии в трубопроводе в три раза меньше, чем в случае транзитного расхода.

# Поле скоростей и давлений в циклонном устройстве

В отличие от ранее рассмотренного относительного покоя, где вращение внутренним слоям жидкости передавалось за счет сил трения, в циклоне движение центральных слоев происходит за счет перемещения вращательно движущейся жидкости от периферии к центру



При движении жидкости в плоскости  $XU$  координата  $z = \text{const}$  и полный дифференциал уравнения Бернулли можно записать в виде

$$d\left(\frac{p}{\rho}\right) = -u du \quad \text{а)}$$

Поскольку радиальная составляющая скорости  $u_R \ll u$ , то в уравнении движения Эйлера при проектировании его на радиальное направление можно пренебречь слагаемым  $du_R/dt$ . Учитывая, что

$$F|_r = \omega^2 r \quad \text{grad} p|_r = \frac{\partial p}{\partial r} \quad \text{получим} \quad \frac{\partial(p/\rho)}{\partial r} = \omega^2 r$$

$$d\left(\frac{p}{\rho}\right) = \omega^2 r dr \Rightarrow d\left(\frac{p}{\rho}\right) = \frac{u^2}{r} dr \quad b)$$

Из равенства *a)* и *b)*, после интегрирования с начальным условием  $u = u_0$  при  $r = r_0$  получим  $ru = r_0u_0 = C$ , а также

$$p = p_0 - \frac{\rho u_0^2}{2} \left[ \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 - 1 \right]$$

## *Вторичные токи в реальной жидкости*

Вторичными называются течения, возникающие в поперечном сечении каналов из-за наличия вязкости жидкости. В качестве примера рассмотрим течение жидкости в цилиндрическом змеевике, выполненном из трубы диаметром  $d$ . В центре потока из-за наличия плавного поворота создается центробежное поле давлений и  $p_A > p_B$ . В жидкости, примыкающей к стенке, движение отсутствует, т. е. центробежное поле давлений возникнуть не может. Условие отсутствия движения жидкости в поперечном сечении — это равенство давлений при  $r = \text{const}$ , т. е.  $p_A > p_C$ ;  $p_B > p_D$ .

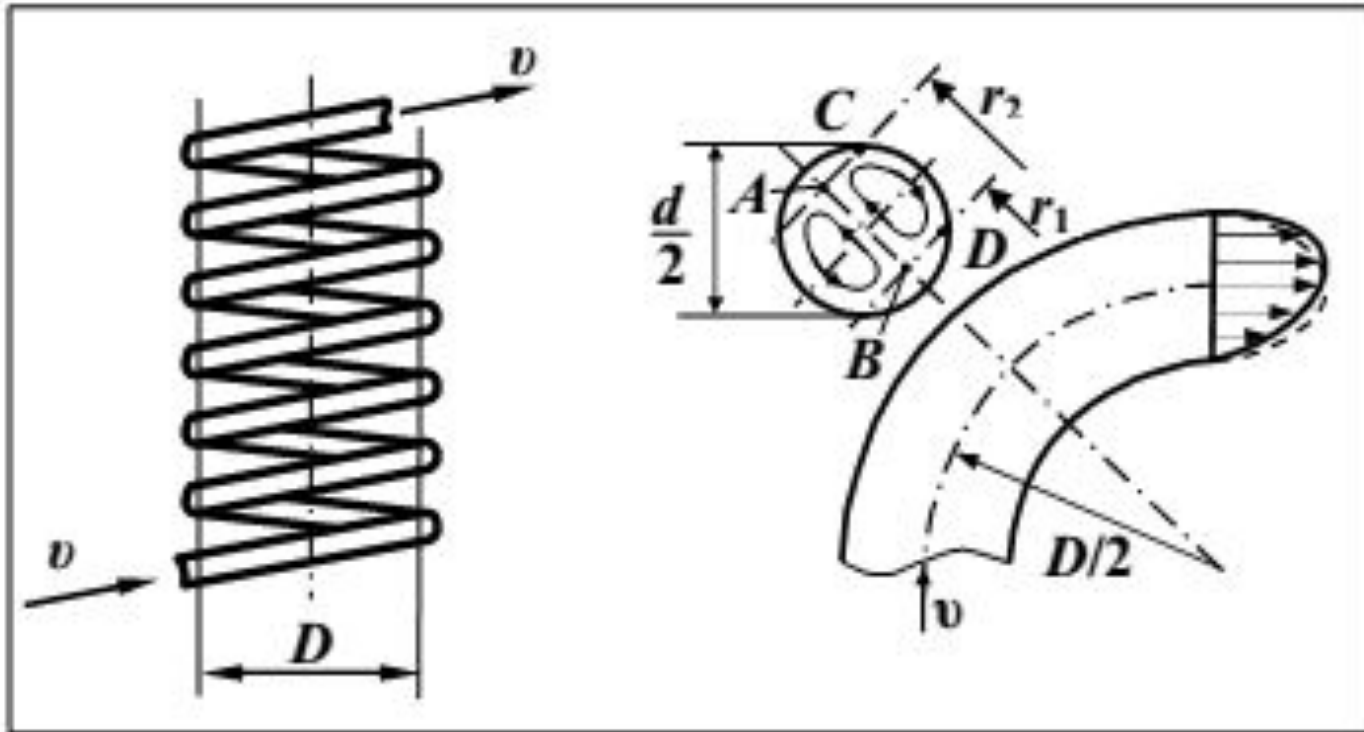
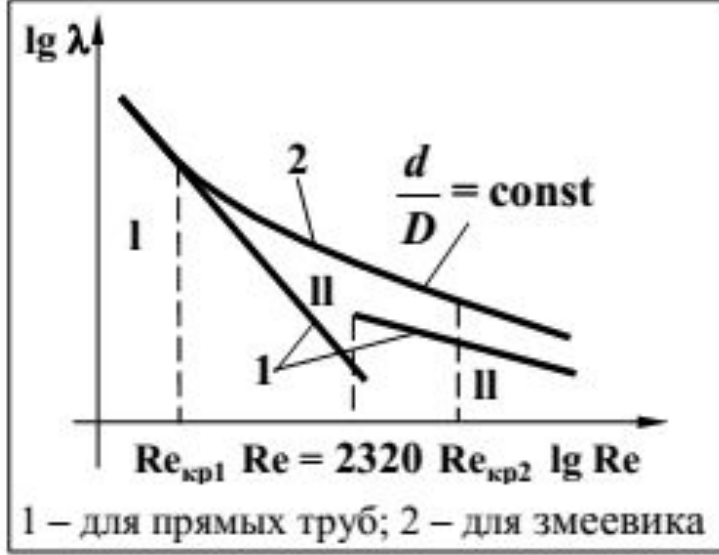


Рисунок 7.20 – Иллюстрация закономерностей течения жидкости в змеевике

Это условие в реальной жидкости невыполнимо, и вблизи стенки возникает движение, направленное к оси змеевика, в ядре потока — от оси змеевика.

Вторичные токи вызывают деформацию профиля скоростей, смещение максимума скоростей. В результате изменяются как сопротивление канала так и характер смены режимов.





1 – для прямых труб; 2 – для змеевика

Рисунок 7.21 – Зависимость  $\lambda$  от  $Re$

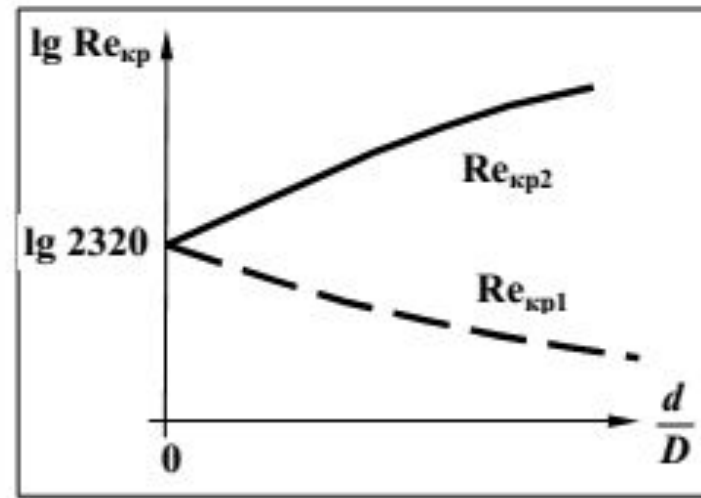
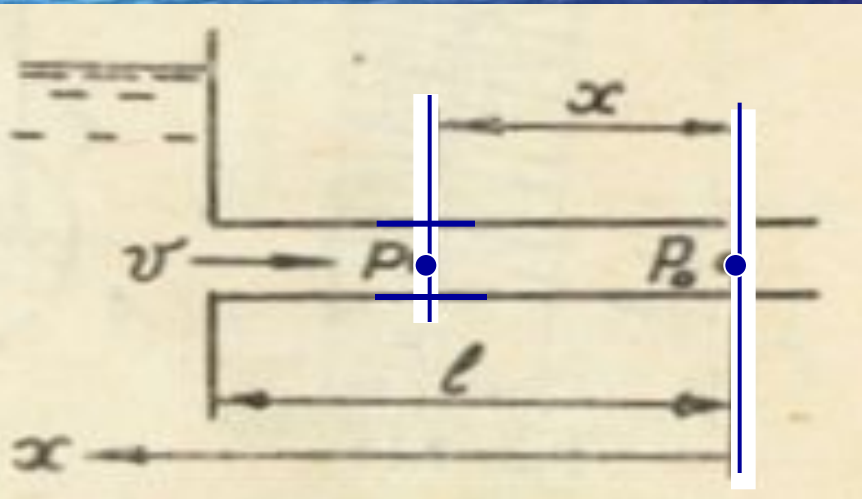


Рисунок 7.22 – Характер смены режимов

$$\lambda_{3M} = \lambda \left( 1 + 3,54 d / D \right)$$

## Гидравлический удар в трубах



Если внезапно остановить движущийся в трубе поток жидкости, то изменение количества движения вызовет возникновение избыточной силы давления жидкости на задвижку

Очевидно, что абсолютно несжимаемая жидкость вызвала бы бесконечное по величине давление при мгновенной остановке в недеформируемом трубопроводе. Однако в результате сжимаемости реальных жидкостей остановка жидкости в трубе даже при мгновенном закрытии заслонки происходит во времени, и волна давления распространяется в среде со скоростью, равной скорости звука  $c$ . Таким образом, остановка жидкости на участке длиной  $x$  произойдет за время  $t = x/c$ . При этом будем иметь  $K = \rho S (l - x) v_0$

$$\left| \frac{dK}{dt} \right| = \frac{K_0 - K}{t} = \frac{\rho S x v_0}{x/c} = \rho S c v_0$$

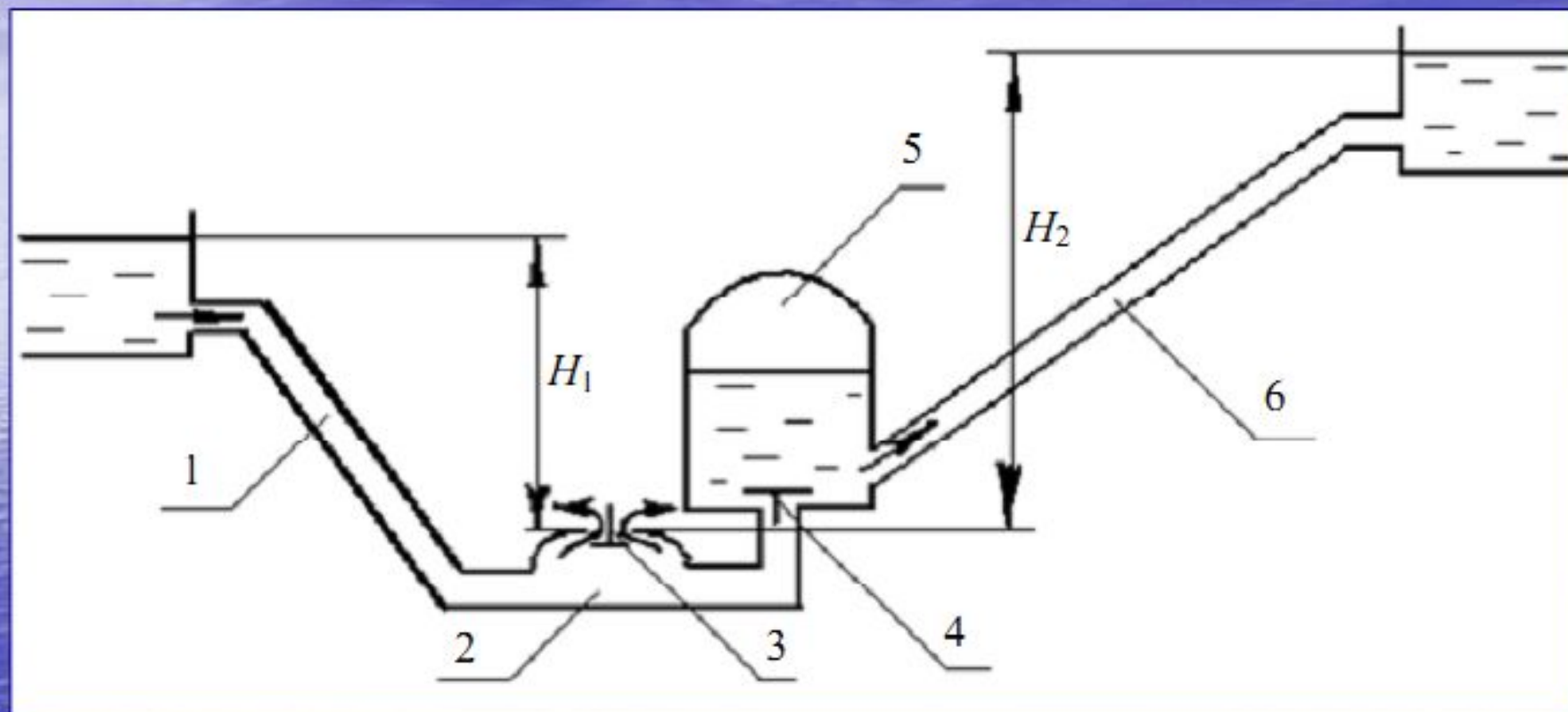
В результате изменения количества движения возникнет

$$R = (p_0 - p) S = \Delta p S \quad \Rightarrow \quad \Delta p = \rho c v_0$$

Для воды  $\Delta p = 10^3 \cdot 1,435 \cdot 10^3 \cdot 1 = 1,435 \cdot 10^6 = 14,4$  ати

# Гидравлический таран

**Гидравлический таран** служит для подачи воды на небольшую высоту без использования насосов.



Таким образом, гидравлический таран затрачивает часть расхода на подъем воды по нагнетательному трубопроводу на высоту, которая может достигать **10  $H_1$** . Обычно теряется половина расхода.