

Иррациональные уравнения и неравенства



Иррациональные уравнения

Определение. Уравнения, содержащие переменную под знаком корня, называются *иррациональными*.

$$\sqrt[3]{x^3 - x} = x + 1; \quad 2\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} = 3$$

$$\sqrt{5 - x} + \sqrt{25 - x^2} = 0$$



Подходы к решению

иррациональных уравнений

! Иррациональные уравнения решаются с помощью перехода к рациональным уравнениям или системам.

1. Возведение обеих частей уравнения в степень.

$$f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow f^{2n+1}(x) = g^{2n+1}(x), \quad n \in \mathbb{N}$$

$$f(x) = g(x) \quad \Rightarrow f^{2n}(x) = g^{2n}(x), \quad n \in \mathbb{N}$$

При возведении **в четную степень** возможно появление **посторонних корней**. Поэтому обязательно нужно выполнить проверку, подставляя полученные корни в исходное уравнение.

Подходы к решению иррациональных уравнений

Пример 1.

$$\sqrt[3]{x^3 - x} = x^3 + 1 = (x + 1)^3 \quad \Leftrightarrow$$

$$3x^2 + 4x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow x_1 = -\frac{1}{3}, \quad x_2 = -1.$$

Ответ: $\{-\frac{1}{3}; -1\}$.



Подходы к решению

иррациональных уравнений

Пример 2.

$$\sqrt{x} = x - 2 \Rightarrow x = (x - 2)^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \quad x_1 = 4, x_2 = 1.$$

– **Проверка:** $x_1 = 4, \sqrt{4} = 4 - 2$ – верно;

$$x_2 = 1, \quad \sqrt{1} = 1 - 2 \text{ – ложно;}$$

значит $x = 1$ – посторонний корень.

или

$$\text{– ОДЗ: } \begin{cases} x \geq 0 \\ x - 2 \geq 0 \end{cases} \quad x \geq 2, \text{ т.е. } x \in [2; +\infty).$$

значит $x = 1$ – посторонний корень, так как $1 \notin [2; +\infty)$.

Ответ: 4.

Подходы к решению

иррациональных уравнений

2. Введение одной или нескольких новых переменных.

Пример 3. $2\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} = 3$

Пусть $y = \sqrt[3]{x}$

Тогда $2y^2 + y - 3 = 0 \quad y_1 \Leftrightarrow 1, y_2 = -1,5.$

Значит $\sqrt[3]{x} = 1$ или $\sqrt[3]{x} = -1,5 \Leftrightarrow x = 1$ или $x = -\frac{27}{8}$

Ответ: $\{1; -\frac{27}{8}\}$.



Подходы к решению

иррациональных уравнений

Пример 4. $\sqrt[3]{x+34} - \sqrt[3]{x-3} = 1$

Пусть $u = \sqrt[3]{x+34}$, $v = \sqrt[3]{x-3}$

Тогда исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} u - v = 1 \\ u^3 = x + 34 \\ v^3 = x - 3 \end{cases} \quad \text{Вычтем из второго третье уравнение:}$$

$$\begin{cases} u - v = 1 \\ u^3 - v^3 = 37 \end{cases} \quad \begin{cases} u = v + 1 \\ (v+1)^3 - v^3 = 37 \end{cases} \quad \begin{cases} u = v + 1 \\ v^2 + v - 12 = 0 \end{cases}$$

Тогда $v_1 = 3$, $v_2 = -4$.

Значит, $x - 3 = 3^3$ или $x - 3 = (-4)^3$ $x = 30$ или $x = -61$.

Ответ: $\{-61; 30\}$.



Подходы к решению

иррациональных уравнений

3. Предварительный анализ ОДЗ и вида уравнения.

Пример 5.

$$\sqrt{x-1} = \sqrt[8]{3-5x}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x-1 \geq 0 & x \geq 1 \\ 3-5x \geq 0 & x \leq 0,6 \end{cases} \iff x \in \emptyset$$

Ответ: *нет корней.*

Подходы к решению

иррациональных уравнений

Пример 6. $\sqrt{5-x} + \sqrt{25-x^2} = 0$

$$\sqrt{5-x} \geq 0 \text{ или } \sqrt{25-x^2} \geq 0$$

(как арифметические корни).

Значит их сумма равна нулю, только если

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{5-x} = 0 \\ \sqrt{25-x^2} = 5 \end{array} \right. \Leftrightarrow x = 5$$

Ответ: **5**.

Иррациональные неравенства

Определение. *Иррациональные неравенства* – это неравенства, содержащие переменную под знаком корня.

$$\sqrt{x^3 + 26} > x + 2; \quad \sqrt{5 - y} \leq 3;$$

$$\sqrt{x^2 + 4x - 5} - 2x + 3 > 0.$$



Подходы к решению иррациональных неравенств

Иррациональные неравенства решаются с помощью перехода к равносильным рациональным неравенствам или их системам.

	Исходное неравенство	Равносильное неравенство или система
1	$f(x) > g(x)$	$f^{2n+1}(x) > g^{2n+1}(x), n \in N$
2	$f(x) > g(x) \geq 0$	$\left\{ \begin{array}{l} f^{2n}(x) > g^{2n}(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) \geq 0 \end{array} \right.$

Подходы к решению

иррациональных неравенств

	Исходное неравенство	Равносильное неравенство или система
3	$\sqrt{f(x)} < g(x)$	$\left\{ \begin{array}{l} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g^2(x) \end{array} \right.$
4	$\sqrt{f(x)} \leq g(x)$	$\left\{ \begin{array}{l} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq g^2(x) \end{array} \right.$
5	$\sqrt{f(x)} > g(x)$	$\left\{ \begin{array}{l} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{array} \right.$

Подходы к решению иррациональных неравенств

	Исходное неравенство	Равносильное неравенство или система
1	$\sqrt{f(x)} \geq a, \quad a \geq 0$	$f(x) \geq a^2$
2	$\sqrt{f(x)} \geq a, \quad a < 0$	$f(x) \geq 0$
3	$\sqrt{f(x)} \leq a, \quad a \geq 0$	$\left\{ \begin{array}{l} f(x) \geq 0 \\ f(x) \leq a^2 \end{array} \right.$
4	$\sqrt{f(x)} < a, \quad a \leq 0$	<i>Нет решений</i> ($x \in \emptyset$)

Решение иррациональных неравенств

Пример 1. $\sqrt[3]{x^3 + 26} > x + 2$

$$x^3 + 26 > (x + 2)^3 \quad x^2 + 2x - 3 < 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(x - 1)(x + 3) < 0 \quad x \Rightarrow (-3; 1).$$

Пример 2. $\sqrt{5 - y} \leq 3$

$$\begin{array}{l} 5 - y \geq 0 \\ 5 - y \leq 3 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} y \leq 5 \\ y \geq 4 \end{array} \right\} y \in [-4; 5]$$

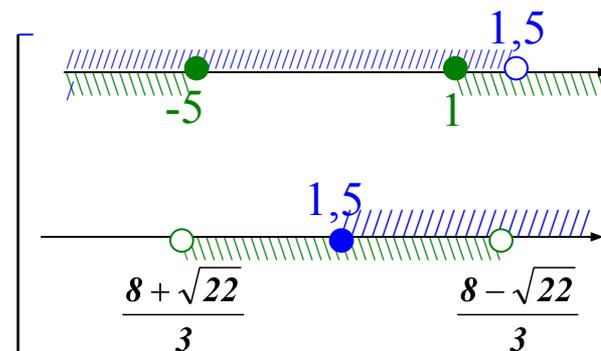
Решение иррациональных неравенств

Пример 3.

$$\sqrt{x^2 + 4x - 5} - 2x + 3 > 0 \iff \sqrt{x^2 + 4x - 5} > 2x - 3$$

$$\iff \begin{cases} 2x - 3 < 0 & x < 1,5 \\ x^2 + 4x - 5 \geq 0 & (x - 1)(x + 5) \geq 0 \\ 2x - 3 \geq 0 & x \geq 1,5 \\ x^2 + 4x - 5 > (2x - 3)^2 & 3x^2 - 16x + 14 < 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x < 1,5 \\ (x - 1)(x + 5) \geq 0 \\ x \geq 1,5 \\ \left(x - \frac{8 + \sqrt{22}}{3}\right) \left(x - \frac{8 - \sqrt{22}}{3}\right) < 0 \end{cases}$$



$$\iff x \in (-\infty; -5] \cup \left[1; \frac{8 + \sqrt{22}}{3}\right)$$

