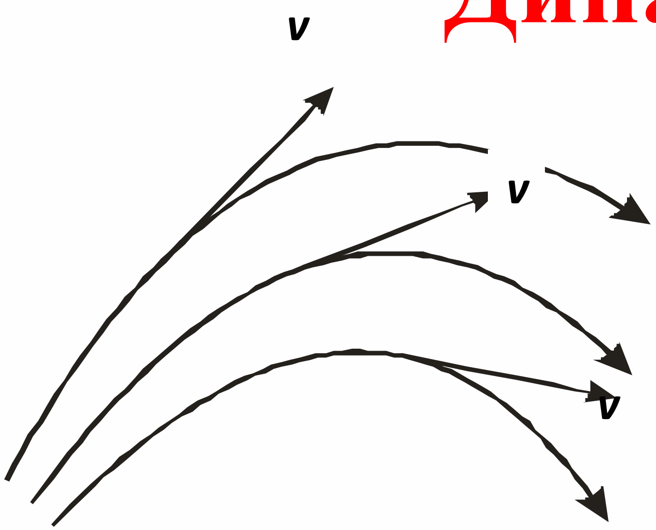
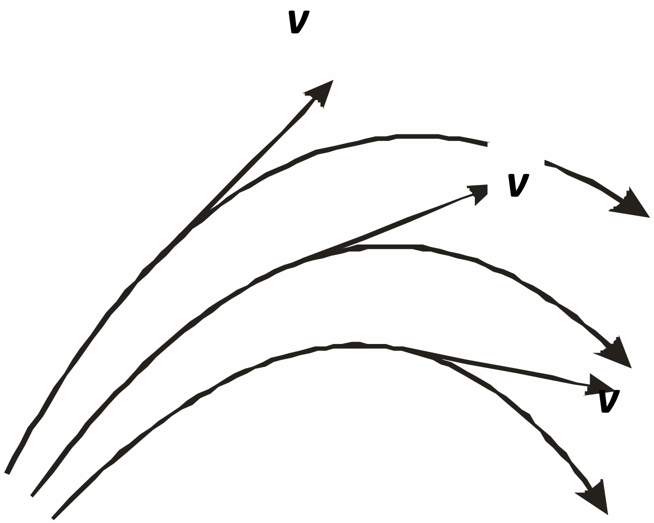
Несжимаемая жидкость. Уравнение Бернулли

Динамика жидкости



При изучение и описание движения жидкостей возможно два подхода. Первый- следить за отдельной частицами например красителя. Второй- следить не **за движением частиц самой жидкости, а за точками пространства** (например, размещая датчики в данных точках) и исследуя в каждой точке скорость ***v***(t), с которой через эту точку проходят частицы жидкости. Такой подход к изучению динамики жидкости называется **методом Эйлера**. Совокупность векторов ***v***(t) для всех точек пространства называется **полем вектора скорости**. Для лучшего визуального представления его изображают с помощью **линий тока**, которые проводят таким образом, чтобы **вектор *v*** в каждой точке был направлен по касательной к соответствующей линии.

Динамика жидкости



Плотность линий (как и в случае представления электрического и магнитного поля) **делают пропорциональной модулю** скорости в данном месте. Если скорость в каждой точке пространства остается постоянной, то течение жидкости называется **стационарным**. При этом линии тока совпадают с траекториями частиц. **Трубкой тока** называют поверхность, образованную линиями тока, проведенными через все точки малого замкнутого контура. Частицы жидкости в процессе течения **не пересекают стенок трубки тока.** Т.е. в идеале если течение имеет сложный характер таких трубок может быть бесконечно много. Мы говорим о идеальном ламинарном течении. Реально конечно есть граничные эффекты и силы вязкого трения

Модель несжимаемой жидкости

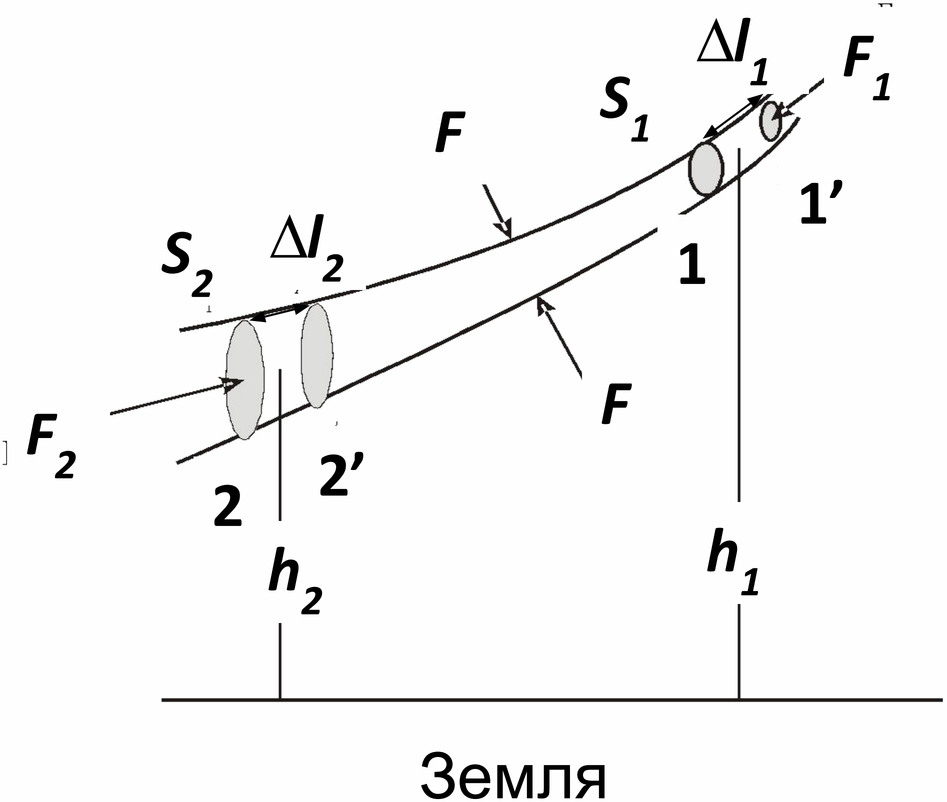
Несжимаемой жидкостью называется однородная жидкость постоянной плотности (плотность постоянна в процессе изучения). Реально через каждое сечение трубки тока за одно и то же время протекают одинаковые объемы идеальной жидкости. Для тонкой трубки тока, когда скорость частиц $\boldsymbol{v}$ в пределах поперечного сечения S постоянна за единицу времени протекает объем $S\boldsymbol{v}$ и можно записать:

$$S\boldsymbol{v} = \mathrm{const}$$

Это простое заключение, отражающее свойство несжимаемой жидкости при стационарном течении по трубке тока называется **теоремой о неразрывности струи.**

Проще: сколько втекло столько и вытекло!

Идеальная несжимаемая жидкость

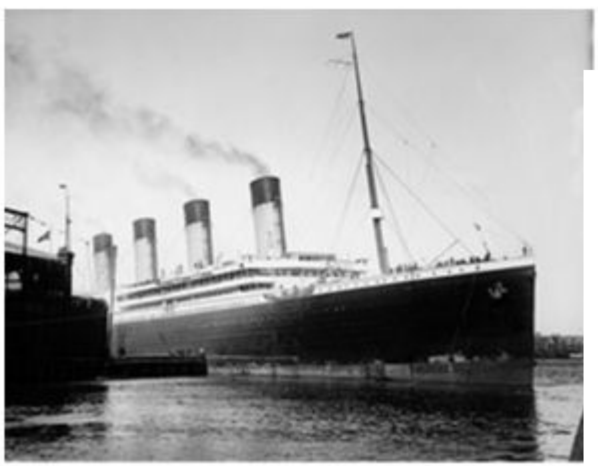


Для жидкостей существует еще одна упрощающая модель – модель идеальной жидкости. **Идеальной** называют жидкость, у которой **внутреннее трение между слоями полностью отсутствует.** Реально оно конечно есть. Т.е. это такая же абстракция как и абсолютно твердое тело и идеальный газ.

Рассмотрим **стационарное течение идеальной несжимаемой** жидкости в однородном силовом поле притяжения Земли. Пусть за Δt объем жидкости между нормальными сечениями 1′ и 2′ сместится вниз ($p_1>p_2$) по трубке тока до сечений 1 и 2 ($\Delta l_1 \neq \Delta l_2$). Была совершена работа! На что израсходована? Какими силами?

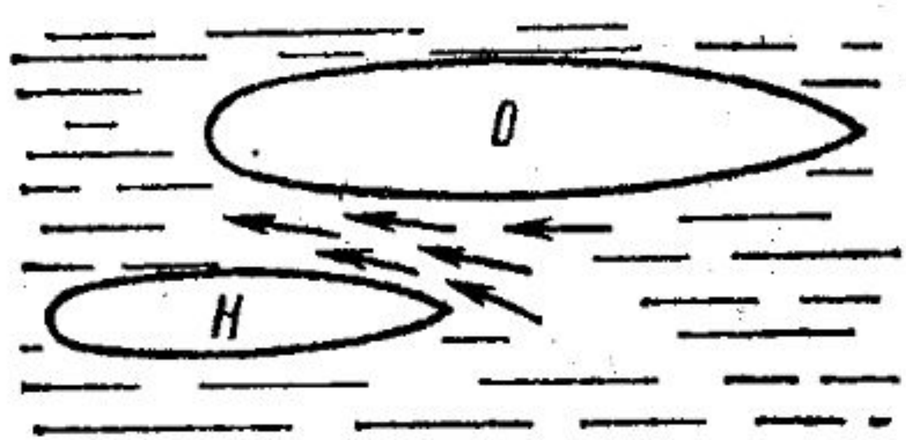
Даниил Бернулли (29.1.1700-17.3.1782), сын Иоганна Бернулли (брат - Якоб Бернулли) . Занимался физиологией и медициной, но больше всего математикой и механикой. В 1725-33 он работал в Петербургской АН сначала на кафедре физиологии, а затем механики. Впоследствии он состоял почётным членом Петербургской АН, опубликовал (с 1728-78) в её изданиях 47 работ. В работах, завершенных написанным в Петербурге трудом "Гидродинамика" (1738), вывел основное уравнение стационарного движения идеальной жидкости, носящее его имя. Даниил Бернулли разрабатывал кинетические представления о газах.После рассмотрения принципа Бернулли

Осенью 1912 г океанский пароход "Олимпик" плыл в открытом море, а почти параллельно ему, на расстоянии сотни метров, проходил с большой скоростью другой корабль, гораздо меньший, броненосный крейсер "Гаук". Когда оба судна заняли положение, изображенное на рисунке, произошло нечто неожиданное: меньшее судно стремительно свернуло с пути, словно повинуясь неведомой силе, повернулось носом к большому кораблю и, не слушаясь руля, двинулось почти прямо на него. "Гаук" врезался носом в бок "Олимпика".Удар был так силен, что "Гаук" проделал в борту "Олимпика" большую пробоину. Случай столкновения двух кораблей рассматривался в морском суде. Капитана корабля "Олимпик" обвинили в том, что он не дал команду пропустить броненосе



Между двумя полосками бумаги продуваем воздух, они сближаются. Скорость воздуха внутри полосок больше, значит давление между листами меньше, чем снаружи.

Парадоксальность результатов такого поведения тел можно объяснить, используя закон Берннули (уравнение Бернулли). Швейцарский ученый Даниил Бернулли длительное время жил в России, именно к этому времени относится создание его главного научного труда - теории гидромеханики. Основная теорема гидродинамики связывает давление жидкости с её скоростью.



- Уравнение Даниила Бернулли, полученное в 1738 г., является фундаментальным уравнением гидродинамики. Оно дает связь между давлением *P*, средней скоростью υ и пьезометрической высотой *z* в различных сечениях потока и выражает закон сохранения энергии движущейся жидкости. С помощью этого уравнения решается большой круг задач.

При переходе от уравнения Бернулли для элементарной струйки идеальной жидкости к уравнению потока реальной жидкости необходимо учитывать неравномерность распределения скоростей по сечению потока и потери энергии жидкости на внутреннее трение, что обусловлено вязкостью жидкости.

В реальной жидкости вязкость создает сопротивление движению жидкости. Это вызывает появление дополнительных потерь напора (энергии потока), которые будем обозначать $h_{\text{пот}}$.

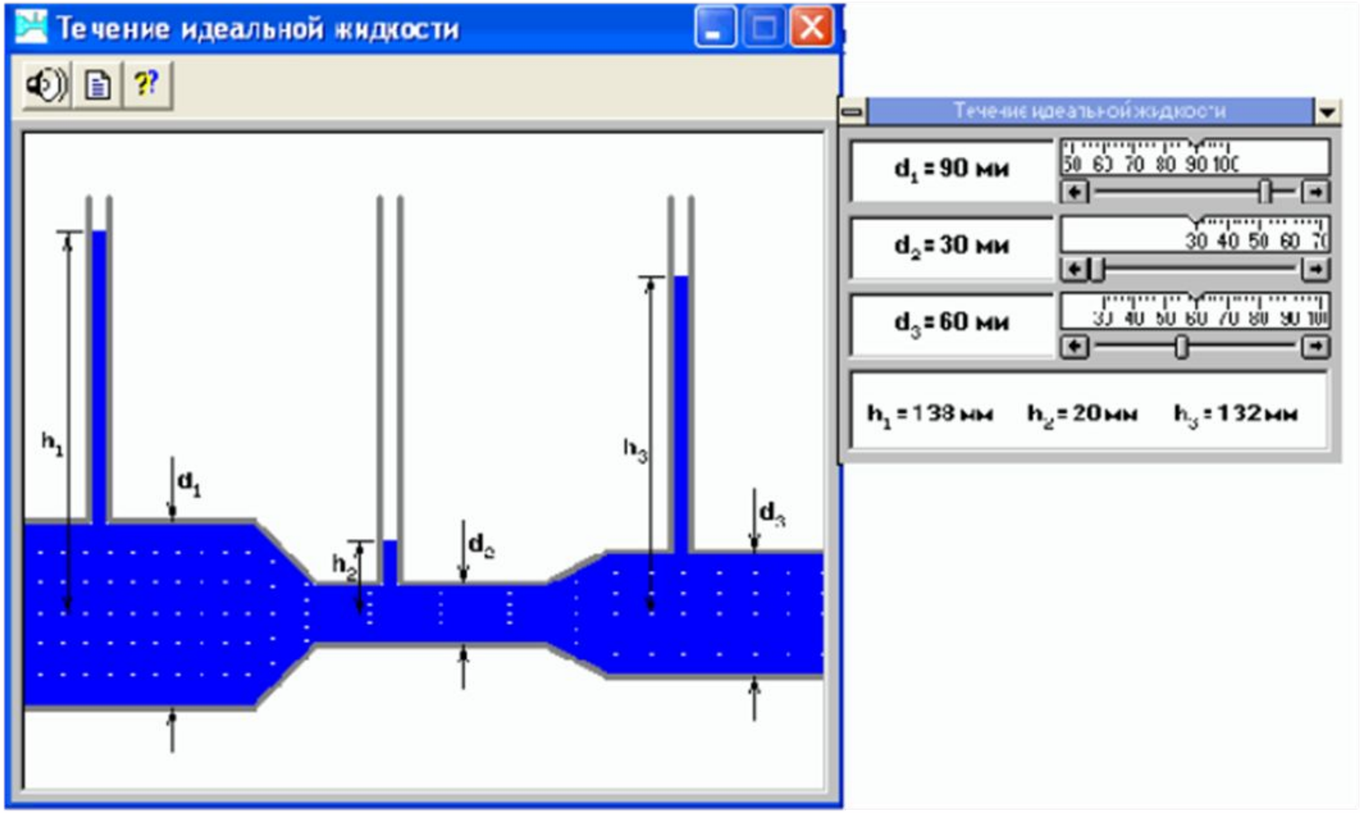
- Распределение скоростей элементарных струек в потоке обычно неизвестно, поэтому в уравнение Бернулли вводят поправочный коэффициент α, учитывающий изменение кинетической энергии вследствие неравномерности распределения скоростей в живом сечении потока. Коэффициент α называется коэффициентом кинетической энергии или коэффициентом Кориолиса и определяется обычно опытным путем. Для установившегося движения жидкости среднее значение коэффициента α принимается равным 1,05–1,11 при турбулентном режиме, при ламинарном режиме α=2.

Уравнение Бернулли для двух сечений потока реальной жидкости имеет вид:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 {V_1}^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 {V_2}^2}{2g} + h_{\text{пот}}$$

В уравнении Бернулли для элементарной струйки реальной жидкости значение коэффициента α = 1.

Уравнение Бернулли для потока реальной жидкости с физической точки зрения представляет уравнение энергетического баланса. Теряемая энергия превращается в тепловую.

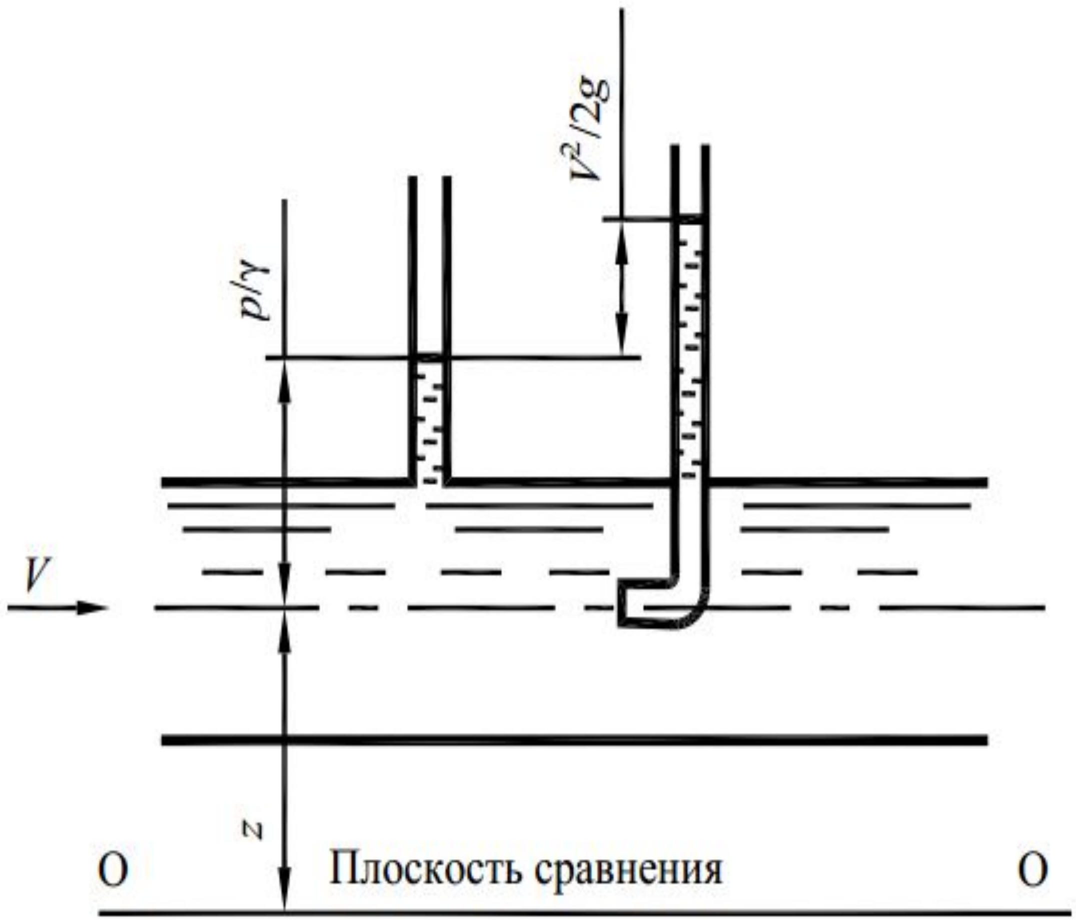


Уравнение Бернулли: давление жидкости (или газа) больше там, где её скорость меньше и наоборот.

Графическое представление уравнения Бернулли

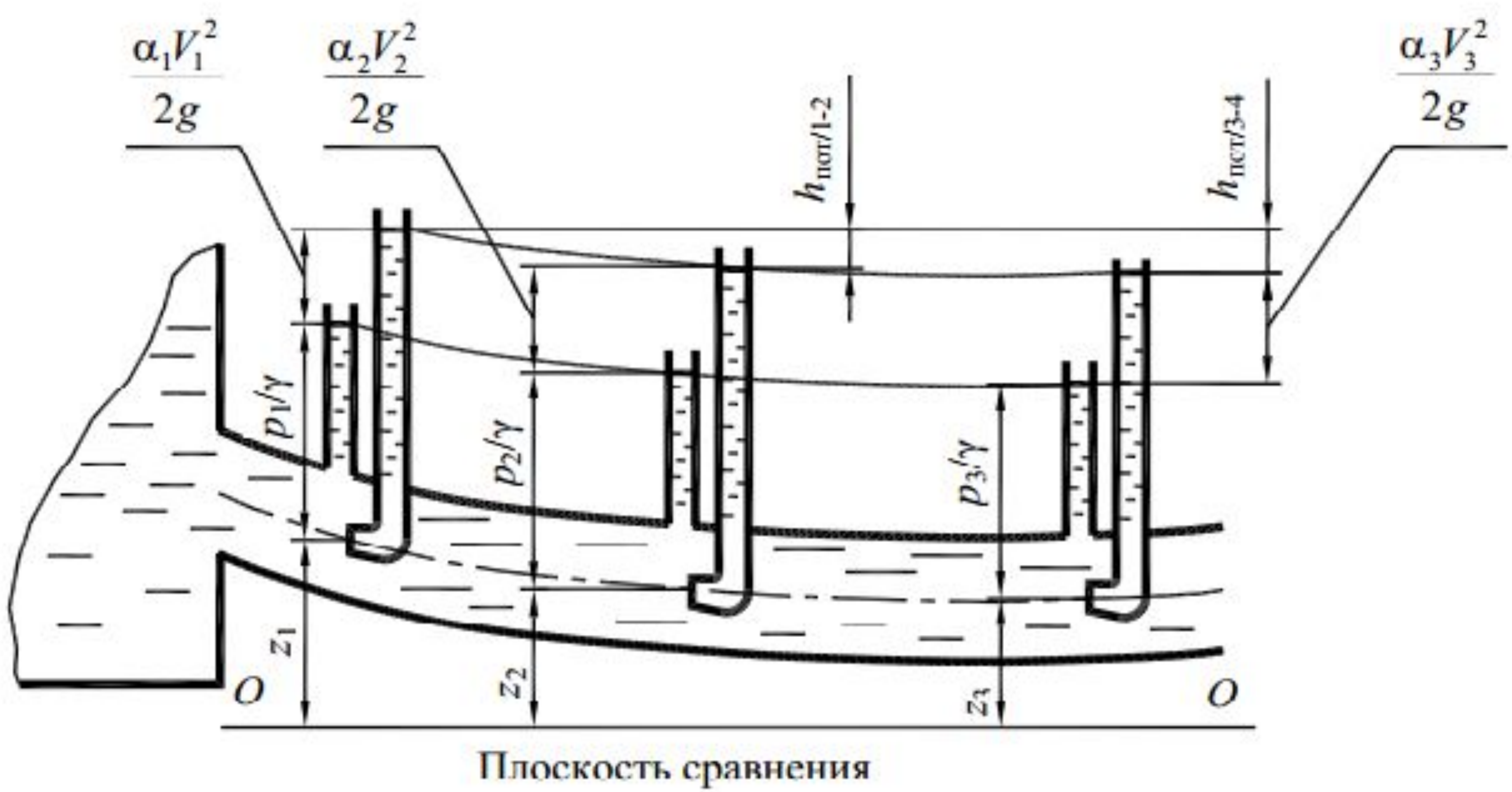
- Предварительно рассмотрим измерительный прибор – трубку Пито. Этот прибор представляет собой открытую с 2-х сторон стеклянную трубку, изогнутую под прямым углом. В нижней части трубка несколько сужена для ослабления удара при входе в нее жидкости. Трубка Пито служит для измерения скорости течения за счет дополнительного давления (по сравнению с давлением в пьезометрической трубке), возникающего вследствие скоростного напора.

  Если в каком-либо сечении потока жидкости установить две трубки – пьезометрическую и трубку Пито, то высота подъема жидкости в трубке Пито будет больше высоты подъема жидкости в пьезометрической трубке на величину скоростного напора $\frac{V^2}{2g}$.



Графически уравнение Бернулли можно представить следующим образом. Рассмотрим поток жидкости, выберем плоскость сравнения, сечения потока. В выбранных сечениях установим пьезометрические трубки и трубки Пито. Все члены уравнения Бернулли будут представлены графически.

Линия, соединяющая уровни жидкости в пьезометрах, называется пьезометрической линией и расположена на расстоянии $z+\frac{p}{V}$ от плоскости сравнения. Эта линия характеризует изменение удельной потенциальной энергии по длине потока. Интенсивность изменения этой энергии характеризуется пьезометрическим уклоном.



- Изменение удельной потенциальной энергии потока, приходящееся на единицу длины, называется пьезометрическим уклоном.

Пьезометрический уклон I_p на участке между сечениями 1 и 2 определяется по формуле:

$$I_p = \frac{\left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma}\right)}{l_{1-2}}$$

l_{1-2} – длина рассматриваемого участка трубопровода.

Величина пьезометрического уклона может быть как положительной, так и отрицательной. Отрицательной будет в том случае, когда поток расширяется.

Соединив уровни жидкости в трубках Пито, получим линию давления,

или напорную линию (гидродинамическую линию, линию полных удельных энергий).

- Изменение полной удельной энергии потока, приходящееся на единицу длины, называется гидравлическим уклоном. Он характеризует величину потерь давления, приходящихся на единицу длины.

Гидравлический уклон l_{1-2} на участке между сечениями 1 и 2 определяется по формуле:

$$i_{1-2} = \frac{h_{\frac{\text{пот}}{1-2}}}{l_{1-2}} = \frac{\left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 {V_1}^2}{2g}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 {V_2}^2}{2g}\right)}{l_{1-2}}$$

где $h_{\frac{\text{пот}}{1-2}}$ – потери напора на участке 1–2.

Гидравлический уклон является всегда величиной положительной.

Рассмотренные уравнения Бернулли применимы только к установившемуся, плавно изменяющемуся движению жидкости.

Практическое применение уравнения Бернулли

Определим потери на трение при движении жидкости в горизонтальной трубе постоянного сечения на участке между сечениями 1 и 2, в которых установим пьезометры.

Движение жидкости в горизонтальной трубе постоянного сечения

- Для этого составляем уравнение Бернулли для двух рассматриваемых сечений трубы:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 {V_1}^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 {V_2}^2}{2g} + h_{\frac{\text{пот}}{1-2}}$$

Из рисунка видно, что $z_1 = z_2$. Так как диаметр трубы не изменяется, и скорости в сечениях будут равны, т. е. $V_1 = V_2$, примем, что $\alpha_1 = \alpha_2$. После

подстановки указанных выражений в уравнение Бернулли, получим:

$$\frac{p_1}{\gamma} = \frac{p_2}{\gamma} + h_{\frac{\text{пот}}{1-2}}$$

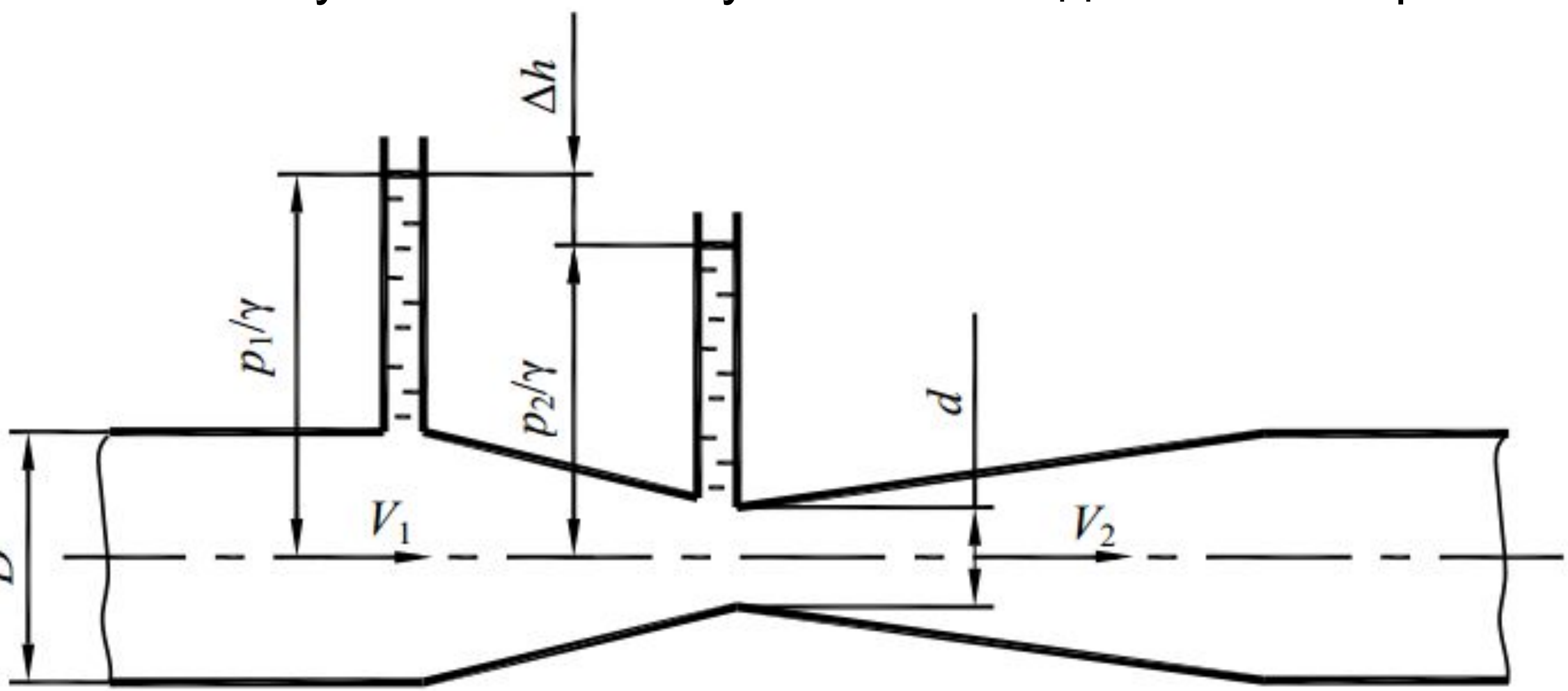
Потери напора на трение определяются по формуле:

$$h_{\frac{\text{пот}}{1-2}} = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \frac{\Delta p}{\gamma}$$

Расходомер Вентури

На основе уравнения Бернулли сконструированы различные устройства, такие как расходомер Вентури, водоструйный насос, карбюратор поршневых двигателей внутреннего сгорания и др.

Рассмотрим расходомер Вентури. Он включает трубопровод диаметром D, на котором устроено сужение диаметром d. В нормальной и суженной частях установлены два пьезометра.



- Примем, что плоскость сравнения проходит через ось трубопровода. Пренебрегая величиной потерь напора hпот и неравномерностью распределения скоростей в потоке (α=1), для двух сечений можно записать уравнение Бернулли в виде

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{{V_1}^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{{V_2}^2}{2g}$$

Отсюда

$$\Delta h = \frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} = \frac{{V_2}^2}{2g} - \frac{{V_1}^2}{2g} = \frac{{V_2}^2 - {V_1}^2}{2g}$$

Согласно уравнению расходов

$$V_2 S_2 = V_1 S_1 \text{ и } V_2 = \frac{V_1 S_1}{V_2}$$

Следовательно,

$$\Delta h = \frac{{V_1}^2}{2g}\left[\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 1\right]$$

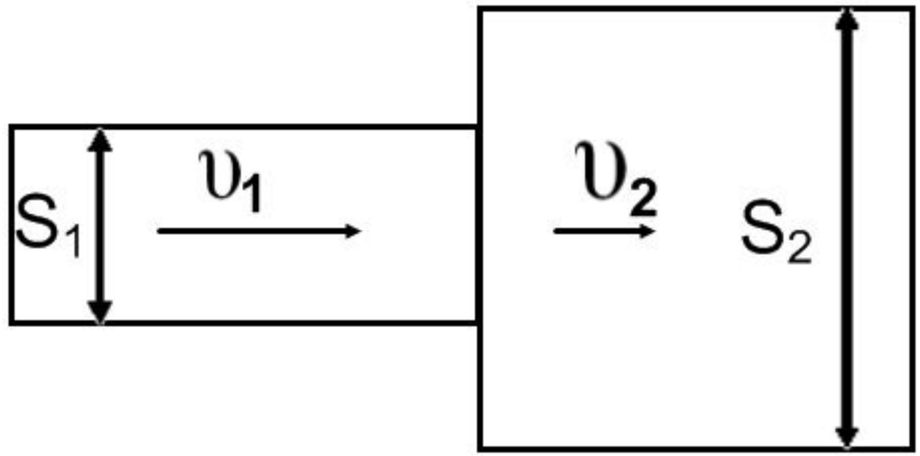
- Отсюда найдем значение скорости жидкости в сечении

$$V_1 = \sqrt{\frac{2g\Delta h}{(S_1/S_2)^2 - 1}}$$

Зная скорость потока жидкости, можно определить расход жидкости по формуле:

$$Q = V_1 S_1$$

Уравнение Бернулли широко используется в технике при расчете гидравлических машин, гидропривода и его элементов, при расчете истечения жидкости из отверстий и насадков и в других случаях.



V1 = S1L1 = S1 *u*1t

V2 = S2L2 = S2 *u* 2t

V1= V2

S1/ S2 = *u* 2 / *u* 1

Принцип неразрывности: сколько вливается жидкости в емкость, столько должно и выливаться, если условия течения не изменяются

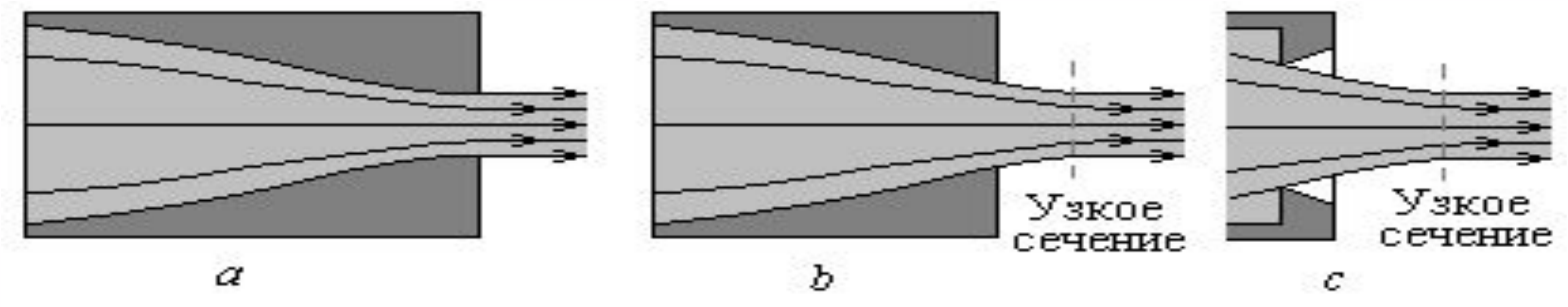
Практическое использование уравнения Бернулли

Основное уравнение гидродинамики—уравнение Бернулли — широко используется в технической лабораторной практике для решения ряда гидравлических задач. Так, например, уравнение Бернулли используется для гидравлических расчетов — напорных трубопроводов, насосных установок, гидравлических турбин, центрифуг, сепараторов и пр. Принцип работы многих измерительных приборов и водоподъемных установок основан также на использовании уравнения Бернулли. Особенно широкое применение из числа таких приборов и установок получили приборы для измерения скоростей и расходов жидкости и водоструйные насосы (эжекторы, инжекторы)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 \geq 2, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0,\ j = 1,2,3$$

Истечение жидкости через отверстия и сопла

Поток жидкости, протекающий через сужающееся сопло, показан на рисунке, a. Общее увеличение скорости при прохождении сужения сглаживает влияние любой неоднородности, которая может существовать в приближающемся потоке, поэтому разумно предположить, что в поперечном сечении истекающей струи распределение скоростей однородно. Так как поперечное сечение рассматриваемой струи равно поперечному сечению сопла, объемный расход жидкости может быть получен перемножением площади сопла на скорость истечения струи. На рис. b, с линии тока жидкости в месте истечения из отверстий не параллельны друг другу, а образуют сужающийся поток, т.е. поперечное сечение струи уменьшается до так называемого узкого сечения. За пределами этого сечения линии тока параллельны. Более того, "вниз" по потоку однородным будет и поле скоростей.



Примеры истечения струй из сопел и отверстий: a - параллельная струя; b - суживающаяся струя из сопла; c - суживающаяся струя из отверстия с острыми кромками

В каждом из трех примеров вытекающий поток показан в виде свободной струи, т.е. струи, которая не смешивается с окружающей жидкостью. Примером может служить истечение воды в воздух. Такие струи обычно сохраняют свою форму на значительном расстоянии, прежде чем распадаются в результате возмущений, вызывающих потерю устойчивости, особенно в случае отсутствия турбулентных пульсаций в потоке до его истечения. В случае, когда поток смешивается с окружающей жидкостью, образуется затопленная струя. Такая струя обычно становится турбулентной на небольшом расстоянии от узкого сечения. Она вовлекает в движение окружающую жидкость и быстро растворяется в ней. Независимо от этого объемный расход так же определяется произведением площади узкого сечения на скорость жидкости в нем.

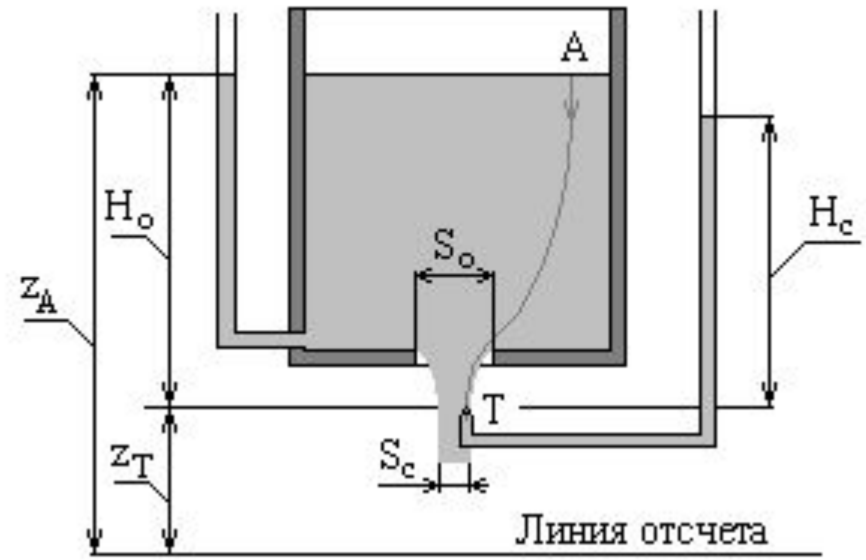


Схема истечения жидкости из отверстия в дне бака

Существенные особенности истечения жидкости из отверстия или сопла, установленного в днище рабочего бака, показаны на рисунке. Обозначим через H0 расстояние между уровнем жидкости в баке и узким сечением струи. Типичная линия тока проходит через точку A поверхности воды в баке, где скорость практически равна нулю, и точку T, расположенную в узком сечении.

Кавитация жидкостей

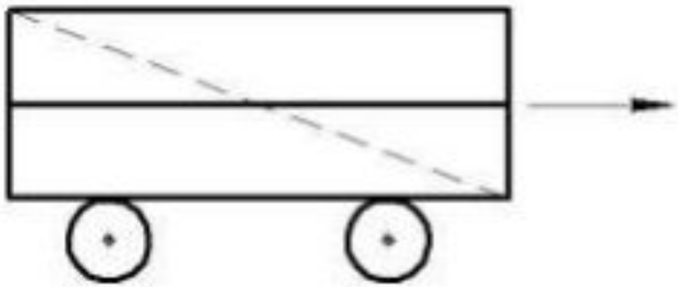
При понижении давления в какой-либо точке потока жидкость вскипает, выделившиеся при этом пузырьки газа и пара увлекаются потоком и переносятся в область более высокого давления, в которой паровые пузырьки конденсируются, а газовые сжимаются. Т. к. процесс конденсации парового и сжатия газового пузырьков происходит мгновенно, частицы жидкости перемещаются к их центрам с большой скоростью (до нескольких сот метров в секунду), получают местные гидравлические микроудары. Это сопровождается повышением давления и температуры в центрах пузырьков (до 1000–1500°С).

Если процессы кавитации протекают вблизи стенок ограждающих каналов, то последние будут подвергаться непрерывным тепловым и гидравлическим ударом, которые вызывают местные разрушения стенок.

Разрушительному воздействию кавитации подвергаются насосы, золотники, клапаны и прочие гидроагрегаты. С появлением кавитации в насосах понижается их подача, а также наблюдаются высокочастотные колебания давления в нагнетательной линии насоса и ударные нагрузки на детали.

Абсолютная покоящаяся жидкость – это такое состояние, когда частицы жидкости относительно друг друга не перемещаются и весь объем тоже неподвижен.

Относительный покой – это когда частицы друг относительно друга не движутся, а весь объем перемещается в пространстве (рис.).



Уровень жидкости при ускоренном линейном движении показан на рис. .

Поверхности, на которых устанавливается одинаковое давление называются поверхностями уровня.

В покоящейся жидкости нет других напряжений кроме напряжений сжатия.

Она обладает двумя свойствами:

1. На внешней поверхности жидкости гидростатическое давление всегда направлено по нормали вовнутрь рассматриваемого объема.

Доказательство. Если это давление не нормально, тогда должно быть касательное напряжение. Это значит, что она выведется из покоя. Это противоречит определению покоящейся жидкости.

2. В любой точке внутри жидкости гидростатическое давление одинаково, т. е. давление не зависит от угла наклона площадки на которую действует сила в данной точке.

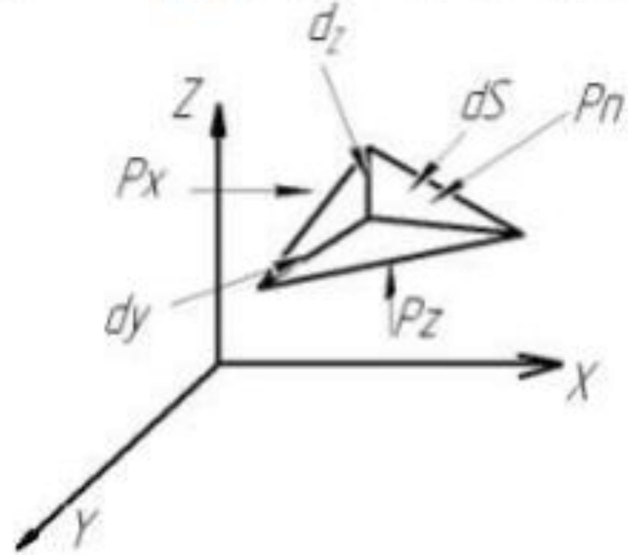


Рис. .

Доказательство. Под внешней поверхностью понимается не только поверхность раздела жидкости с воздухом, но и поверхности с элементарным объемом, мысленно, выделенных в жидкости.

Пусть действует массовая сила $R \to X, Y, Z$ (рис.   )

Запишем проекции на ось OX силы давления $P_x \cdot \frac{1}{2} dydz;$

$$P_n \cdot ds\cos\left(x,n\right); \text{– нормаль к } ds,$$

$$X \rho \frac{1}{6} dxdydz .$$

Запишем уравнение сил

$$P_x \cdot \frac{1}{2} dydz - P_n \cdot ds\cos\left(x,n\right) + X \rho \frac{1}{6} dxdydz = 0 .$$

Если учесть, что $ds\cos\left(x,n\right)=\frac{1}{2}dydz$ и поделив все на $\frac{1}{2}dydz$, получим $P_x-P_n+X\rho\frac{1}{3}dx=0$.

Если от рассматриваемого объема перейти к точке, т. е. $dx\to 0$, имеем $P_x=P_n$.

Если запишем уравнение относительно других осей *OZ*, *OY*, то можно записать $P_x=P_y=P_z=P_n$.

Это 2-ое свойство справедливо не только для покоящейся жидкости, но и для движущейся идеальной невязкой жидкости.

Гидродинамика рассматривает неустановившееся движение жидкости в 3-х мерном течении, т. е. здесь учитывается еще и изменения скорости, кроме массовых сил и сил давления.

Задача гидродинамики – определить под действием заданных массовых сил движение каждой частицы жидкости и гидродинамические давления в каждой точке в каждый момент времени при заданных начальных и граничных условиях.

Будут следующие переменные: *X, Y, Z, p(x, y, z, t) Vx, Vy, Vz*.

Координаты *x, y, z* и время *t*.

Если учитывать сжимаемость жидкости (газа) то переменной является и плотность ρ.

Согласно задачи переменными будут 5 названных *x, y, z, t*, ρ, т.е. необходимо иметь для решения 5 уравнений.

Это уравнения:

1) 3 уравнения динамики Эйлера.
2) Уравнение неразрывности в общем виде.
3) Уравнение состояния.

Уравнение Эйлера

В рассматриваемой жидкости выделим элемент. Объем в виде прямоугольного параллелепипеда с гранями dx, dy, dz, на который действует массовая сила $R(X, Y, Z)$ и сила давления p_x (рис.).

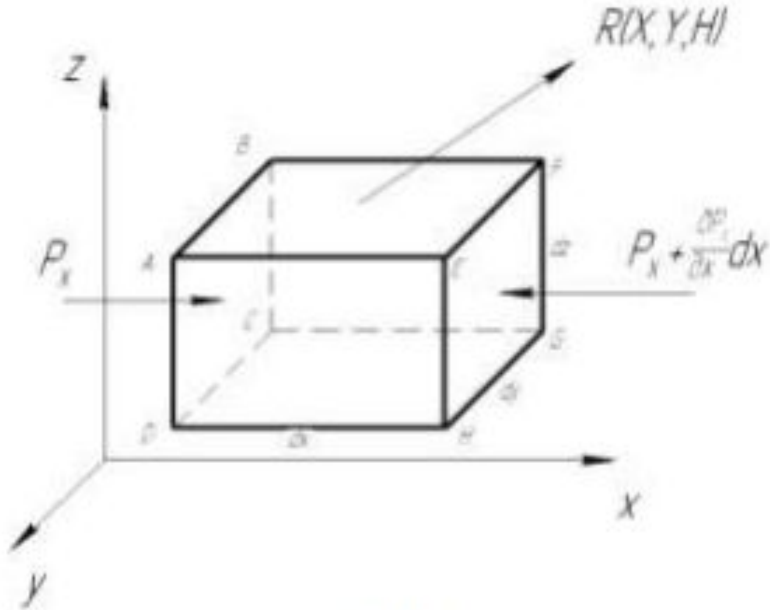


Рис.

Рассмотрим движение жидкости вдоль оси x.

Силы инерции жидкости

$$F_{\text{ин}} = -ma = -\rho dx \cdot dy \cdot dz \cdot \frac{dV_x}{dt}.$$

X, Y, Z – единичные массовые силы, чтобы перейти к силе нужно умножить на массу

$$-\rho \Delta W.$$

Уравнение равновесия

$$X\rho\Delta W - \frac{\partial p_x}{\partial x} dxdydz - \rho \frac{dV_x}{dt} \Delta W = 0.$$

делим на $\rho\Delta W$ и получаем

$$X - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p_x}{\partial x} = \frac{dV_x}{dt},$$

аналогично получим, проектируя на оси y и z

$$Y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p_y}{\partial y} = \frac{dV_y}{dt},$$

$$Z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p_z}{\partial z} = \frac{dV_z}{dt}.$$

При движении идеальной жидкости давление в данной точке не зависит от угла наклона площадки, т. е.

$$p_x = p_y = p_z = p.$$

Уравнение примет вид

$$\left.\begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dV_x}{dt}, \\ Y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{dV_y}{dt}, \\ Z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dV_z}{dt}. \end{aligned}\right\} \text{– система дифференциальных уравнений дина-}$$

мики жидкости Эйлера. Эти уравнения обращаются в уравнения статики Эйлера при $V \rightarrow (V_x, V_y, V_z) = \text{const}$.

Уравнение неразрывности сжимаемой жидкости в общем виде

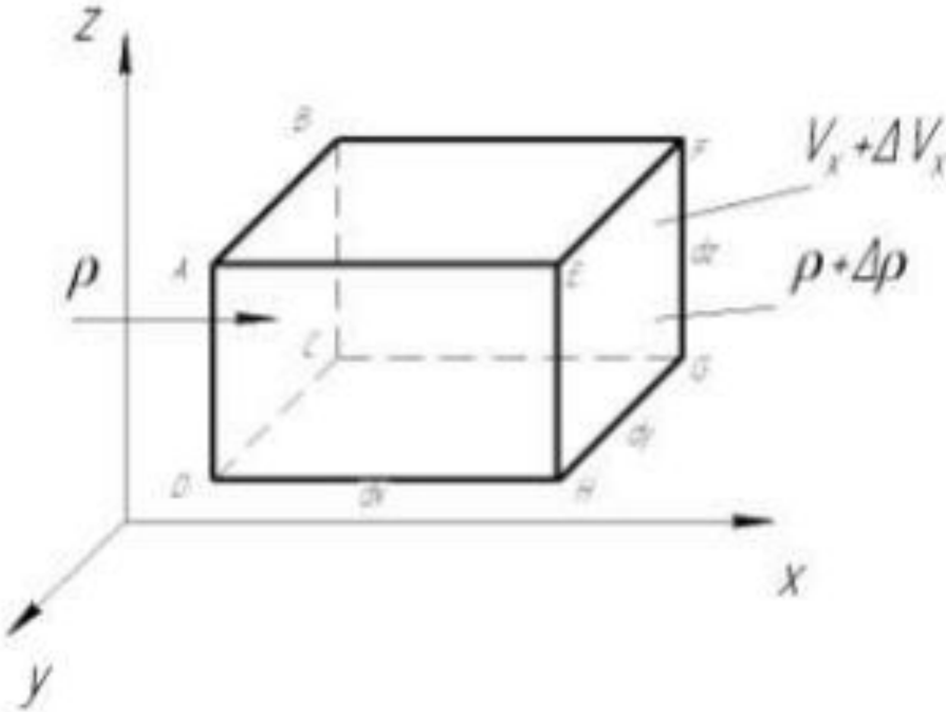


Рис.

Определим массу M_x^A жидкости, протекающей через грань *АВСД* с плотностью ρ и скоростью V_x (рис.)

$$M_k^A = \rho V_x dt \cdot dy \cdot dz\,.$$

$V_x dt$ – $\Delta\ell$ – путь за время Δt.

$dy \cdot dz$ – площадь грани.

Аналогично определим массу жидкости, протекающую через грань *EFGH*. Учитывая сжимаемость, а это значит, что плотность и скорость жидкости в правой грани отличается от левой грани.

ΔV_x запишем через градиент скорости, тогда

$$V_x + \Delta V_x = V_x + \frac{\partial V_x}{\partial x} \cdot dx .$$

$\frac{\partial V_x}{\partial x}$ – градиент скорости вдоль оси *OX*.

dx – изменение на участке dx.

Аналогично и для плотности

$$\rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} dx .$$

Тогда

$$M_x^E = \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} dx + \rho\right) \cdot \left(V_x + \frac{\partial V_x}{\partial x} dx\right) dt \cdot dy \cdot dz =$$

$$= \left[\rho V_x + V_x \frac{\partial \rho}{\partial x} dx + \rho \frac{\partial V_x}{\partial x} dx + \frac{\partial \rho}{\partial x} \cdot \frac{\partial V_x}{\partial x} (dx)^2\right] dtdydz.$$

$$V_x \frac{\partial \rho}{\partial x} dx + \rho \frac{\partial V_x}{\partial x} dx - \frac{\partial (V_x \cdot \rho)}{\partial x} dx.$$

$\frac{\partial \rho}{\partial x} \cdot \frac{\partial V_x}{\partial x}(dx)^2$ – величина второго порядка малости по сравнению с другими.

Тогда

$$M_x^E = \left[\rho V_x + \frac{\partial (V_x \cdot \rho)}{\partial x} dx \right] dt \cdot dy \cdot dz.$$

Определим изменение массы жидкости протекающей вдоль оси OX за время dt, протекающей через рассматриваемый объем.

$$\Delta H_x = M_x^A - M_x^E = -\frac{\partial (V_x \cdot \rho)}{\partial x} dt \cdot dxdydz .$$

$dxdydz$ – ΔW.

Рассуждая аналогично для осей y и z получим

$$\Delta M_y = -\frac{\partial\left(V_y \cdot \rho\right)}{dy} dt \cdot \Delta W,$$

$$\Delta W_z = -\frac{\partial\left(V_z \cdot \rho\right)}{dz} dt \cdot \Delta W.$$

Определим полное изменение массы жидкости, протекающей через объем ΔM.

$$\Delta M = \Delta M_x + \Delta M_y + \Delta M_z.$$

$$\Delta M = -\left[\frac{\partial\left(V_x \cdot \rho\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(V_y \cdot \rho\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(V_z \cdot \rho\right)}{\partial z}\right] \cdot dt \cdot \Delta W.$$

Изменение массы жидкости с другой стороны за время dt можно определить так, т. к. объем один и тот же.

$$\Delta M = \Delta\rho\Delta W,$$

$$\Delta\rho = \frac{\partial\rho}{\partial t}\cdot dt,$$

$$\Delta M = \frac{\partial\rho}{\partial t} dt \Delta W.$$

Приравнивая эти изменения масс можно записать

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\left(V_x\cdot\rho\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(V_y\cdot\rho\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(V_z\cdot\rho\right)}{dz} = 0.$$

Это уравнение неразрывности для 3-х мерного сечения.

Если не учитывать сжимаемость, тогда $\rho = \mathrm{const}$ имеем

$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{dz} = 0$ – уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости.

Уравнение состояния

Например: если речь идет о газах и процесс изотерический (T=const), то уравнение является уравнением Бойля-Мариотта.

$$pW = \text{const}.$$

При других процессах имеются соответствующие формулы (адиабатический процесс, политропный процесс).

При рассмотрении жидкости уравнения специального нет. Поэтому пятым уравнением будет приниматься уравнение $\rho = const$ – это значит, что задача решается без учета сжимаемости.

Решение задач гидродинамики в общем виде часто затруднено или невозможно из-за:

1) нелинейности дифференциальных уравнений,

2) отсутствием начальных и конечных условий, т. е. граничных условий.