Линейные и квадратичные задачи оптимизации

Шацких С.А.
МТЭ-18-1

Что такое оптимизация?

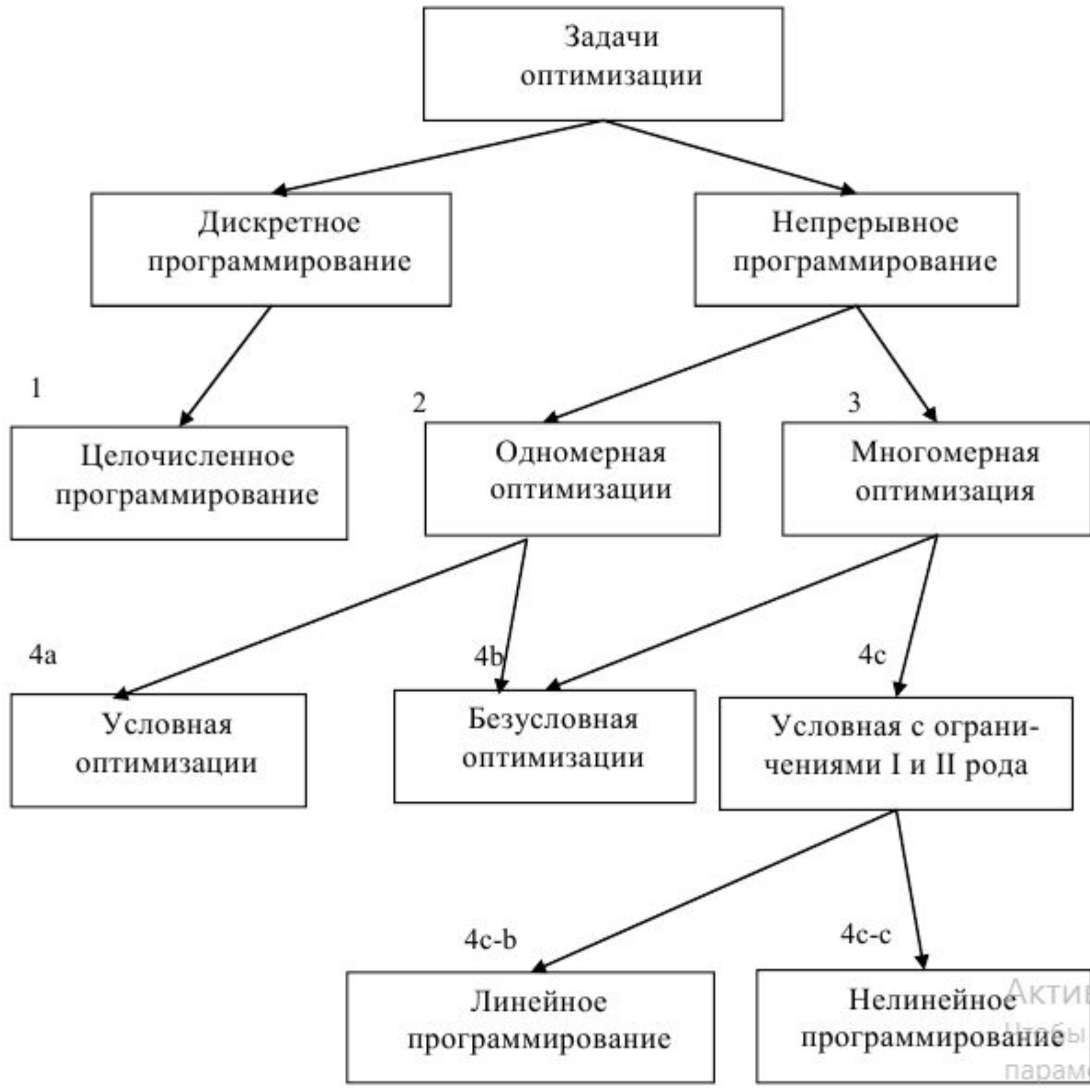
Термин **«оптимальный»,**также как и термин **«оптимизация»** чаще всего трактуют как благоприятный, максимальный (минимальный),наиболее эффективный.

Постановка задач оптимизации.

В самом общем случае, решить оптимизационную задачу это значит найти наилучшее решение среди возможных вариантов решения. Решение любой оптимизационной задачи основано на построении математической модели исследуемого объекта и проведении вычислительного эксперимента.

Основу вычислительного эксперимента составляет триада «модель—алгоритм—программа». На первом этапе эксперимента строится его модель, отражающая в математической форме важнейшие свойства объекта. Второй этап — разработка алгоритма для реализации модели на компьютере. На третьем этапе создаются программы, реализующие алгоритмы на доступном компьютеру языке.

Классификация задач оптимизации.



Линейное программирование.

Задачей линейного программирования (ЛП) называется оптимизационная задача, в которой целевая функция – линейна на множестве линейных ограничений.

$$f(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \to \min$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \le b_i,\ i = \overline{1,\ m},\ x_j \ge 0$$

Ограничения, накладываемые на координаты xj , могут быть равенствами и неравенствами.

Классические задачи линейного программирования.

1.Задача технического контроля

<u>Условие:</u> В отделе технического контроля (ОТК) некоторой фирмы работают контроллеры 1 и 2 разрядов.
Норма выработки ОТК за 8 часов (день) не менее 1800 изделий.
Контролер 1 разряда проверяет 25 изделий/час (точность 98%);
Контролер 2 разряда проверяет 15 изделий/час (точность 95%).
Заработная плата:
Контролер 1 разряда – 4$ / час;
Контролер 2 разряда – 3$ / час.
Ошибка контроллера приносит убыток фирме 2$.
Фирма может использовать не более:
8 контроллеров 1 разряда;
10 контроллеров 2 разряда.
<u>Требуется выполнить дневной план и минимизировать затраты фирмы.</u>

Решение: Построение модели.

1. Введем переменные задачи.

X1 - число контроллеров 1 разряда.

X2 - число контроллеров 2 разряда.

2. Ограничения на переменные

Ограничения по условию задачи.

$$\begin{cases} x_1 \le 8 \\ x_2 \le 10 \end{cases}.$$

В день необходимо изготовить 1800 изделий (за 8 часов работы).

$$8 \cdot (25 \cdot x_1 + 15 \cdot x_2) \ge 1800,$$
$$200 \cdot x_1 + 120 \cdot x_2 \ge 1800,$$
$$5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \ge 45.$$

3. Задание линейной целевой функции

Расходы фирмы имеют две составляющие

- заработная плата контроллеров;
- убытки из-за ошибок контроллеров.

Таким образом, один контроллер соответствующего разряда обходится фирме

I разряд

4+ 2* 0.02 *25= 5 $ / час.

II разряд

3+ 2* 0.05 *15= 4.5 $ / час.

Запишем целевую функцию затрат на ОТК за 8 часов.

$$f(\bar{x}) = 8 \cdot (5 \cdot x_1 + 4.5 \cdot x_2) = 40 \cdot x_1 + 36 \cdot x_2$$

Т.о., вся задача технического контроля может быть сформулирована следующим образом.

$$\left.\begin{array}{ll} f(\bar{x}) = 40 \cdot x_1 + 36 \cdot x_2 \rightarrow \min & \\ \text{при} \quad 5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \geq 45 & \\ \qquad x_1 \leq 8 \;,\; x_2 \leq 10 & \\ \qquad x_1 \geq 0 \;,\; x_2 \geq 0 & \end{array}\right\}$$

2. Транспортная задача

О рациональном перевозе однородных продуктов из пунктов производства в пункты потребления.

В каждом пункте A_i производится a_i количество продукта $i=\overline{1,m}$.

Пункт B_j потребляет b_j количества продукта, $j=\overline{1,n}$.

Предполагается, что спрос соответствует предложению

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

Транспортные издержки перевозки продукта из пункта A_i в пункт B_j составляют c_{ij}

<u>Требуется минимизировать транспортные издержки и удовлетворить запросы всех потребителей за счет производства.</u>

Введем переменные

x_{ij} - количество продукта перевозимого из пункта A_i в B_j.

Математическая постановка задачи имеет вид.

$$\left.\begin{aligned}
&f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\cdot x_{ij} \to \min\\
&\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \ , \ i=\overline{1,m}\\
&\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \ , \ j=\overline{1,n}\\
&x_{ij} \ge 0
\end{aligned}\right\}$$

3. Задача о диете

Имеется n различных продуктов. Стоимость каждого продукта со-
ставляет cj .

Ингредиенты продуктов следующие:

- калорийность a_{1j} (j= 1,n);
- жиры a_{2j} ;
- белки a_{3j} ;
- углеводы a_{4j} .

Суточная потребность конкретного человека в энергии, жирах, белках и углеводах составляет b1, b2, b3, b4 единиц соответственно.

<u>Требуется удовлетворить суточную потребность в энергии, превышая потребления жиров, белков, углеводов при минимальных затратах.</u>

Пусть x_j - количество потребления j – го продукта.

Математическая постановка задачи имеет вид.

$$\left.\begin{array}{l} f(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \to \min \\ \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot x_j \ge b_1; \quad \sum_{j=1}^{n} a_{3j} \cdot x_j \ge b_3; \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} \cdot x_j \ge b_2; \quad \sum_{j=1}^{n} a_{4j} \cdot x_j \ge b_4. \end{array}\right\}$$

4. Задача об использовании сырья

Изготавливаются два продукта П1 П2 : П1 - карамель А, П2 - карамель Б.
из трех видов сырья S1,S2,S3 : S_1 - сахар; S_2 - джем; S_3 - шоколад.

Запасы каждого сырья равны b1, b2, b3.
На единицу продукции П1 уходит a_{11} количества сырья s_1, a_{21}-s_2, a_{31}-s_3,
На единицу продукции П2 уходит: a_{12}-s_1, a_{22}-s_2, a_{32}-s_3

Требуется так запланировать выпуск продуктов П 1 П 2 чтобы доход от реализации продукции был максимален при имеющихся запасах сырья.

Решение:

Введем переменные.

X_1 единиц продукции П1 выпускает предприятие.

X_2 единиц продукции П2 выпускает предприятие.

В таблице приведены данные по изготовлению кондитерских изделий.

Исходные данные задачи выпуска кондитерских изделий

Вид сырья	Запасы сырья	Расход сырья на единицу продукции	
		карамель А	карамель Б
сахар	160	5	2
джем	180	3	4
шоколад	196	7	0
Доход		3	2

Тогда задача линейного программирования примет вид.

$$\left.\begin{array}{l} f(\bar{x}) = 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \rightarrow \max \\ \quad 5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 160 \\ \quad 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 180 \\ \quad 7 \cdot x_1 \qquad\qquad \leq 196 \\ \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right\}.$$

Приведем графическое решение этой задачи.
В системе координат X1,0,X2 построим ограничения-неравенства и
линию уровня $3*x_1*2*x_2$=const, например с константой const=100, рисунок 1. Затем линию уровня параллельно переносим в сторону увеличения целевой функции f(x1,x2) до пересечения с крайней вершиной многогранника ограничений. В данном случае - вершина с координатой (20,30).

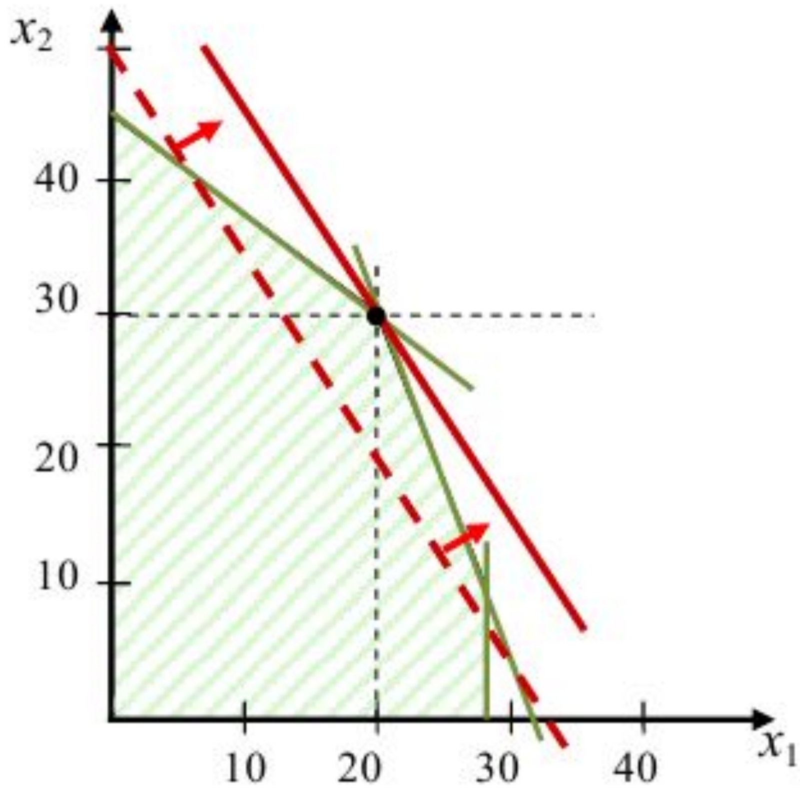


Рисунок 1.

Нелинейное программирование.

В наиболее общем виде задача нелинейного программирования (НЛП) имеет вид.

$$f(\bar{x}) \to \min$$

$$g_i(\bar{x}) \geq b_i,\ i = \overline{1,\ m},$$

$$h_k(\bar{x}) = 0,\ \mathrm{k} = \overline{1,\ l}.$$

Где $f(x), g_i(x), h_k(x)$ - заданные, в общем случае нелинейные функции векторной переменной $x\ (x_1, x_2 \ldots, x_n)$.
Ограничения, накладываемые на координаты x_j, могут быть равенствами и неравенствами .

Квадратичные задачи оптимизации

Задача квадратичного программирования представляет собой оптимизационную задачу с линейными ограничениями и квадратичной целевой функцией.

Задача квадратичного программирования в векторно-матричной форме имеет вид:

$$f(\bar{x}) = \bar{c} \cdot \bar{x} + \bar{x}^{T} \cdot Q \cdot \bar{x} \to \min$$

$$A \cdot \bar{x} = \bar{b},$$

$$\bar{x} \geq 0,$$

где Q – симметричная матрица размера (nxn);

c – вектор-строка размера (1xn);

x - вектор-столбец размера (nx1);

A – матрица ограничений;

b- вектор-столбец размера (mx1).

Эта задача может быть решена на основе условий Куна-Таккера.

Если матрица Q положительно определена, то целевая функция f(x) является выпуклой функцией и тогда на основании теоремы Куна-Таккера оптимальное решение задачи может быть найдено, как решение следующей системы уравнений и неравенств.

$$\bar{c} + \bar{x}^T \cdot (Q + Q^T) - \bar{\gamma} - \bar{\lambda} \cdot A = 0$$
$$A \cdot \bar{x} = \bar{b},$$
$$\bar{x} \geq 0,$$
$$\gamma \cdot \bar{x} = 0,$$
$$\gamma \geq 0.$$

Также эту задачу можно решить <u>симплекс-методом</u>. Рассмотрим на конкретном примере.

$$\left.\begin{array}{l} f(\bar{x}) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 5)^2 \to \min \\ \quad x_1 + x_2 \qquad \leq 6 \\ \quad x_1 - x_2 \qquad \leq 1 \\ \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right\}$$

Построим многогранник ограничений линии уровня целевой функции, рисунок 2.

Найдем стационарную точку целевой функции, определяющую абсолютный экстремум.

$$
\left.\begin{array}{l}
\dfrac{f(\bar{x})}{\partial x_1} = 2 \cdot (x_1 - 4) = 0, \\
\dfrac{f(\bar{x})}{\partial x_2} = 2 \cdot (x_2 - 5) = 0, \\
x_1^* = 4, x_2^* = 5.
\end{array}\right\}
$$

На рисунке 2 стационарная точка A0 не принадлежит многограннику ограничений.

В таблице приведены координаты вершин и значения целевой функции в них.

Вершины многогранника ограничений

Вершина	Координаты	Целевая функция
A	0, 0	41
B	0, 6	17
C	3.5, 2.5	6.5
D	1, 0	34

Для нахождения экстремумов на ребрах многогранника можно использовать <u>метод множителей Лагранжа</u>, так как ограничения неравенства заменены равенством.

Получим четыре уравнения Лагранжа.

Точка А1.

$$\left.\begin{aligned} &L\ \ x_1, x_2, \lambda_1\ \ = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 5)^2 + \lambda_1 \cdot\ \ x_1 + x_2 - 6\ \ ,\\ &x_1^* = 2.5,\quad x_2^* = 3.5,\\ &f\ \ 2.5{,}3.5\ \ = 4.5. \end{aligned}\right\}$$

Точка А2.

$$\left.\begin{aligned} &L\ \ x_1, x_2, \lambda_1\ \ = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 5)^2 + \lambda_2 \cdot\ \ x_1 - x_2 - 1\ \ ,\\ &x_1^* = 5,\quad x_2^* = 4,\\ &f\ \ 5{,}4\ \ = 2. \end{aligned}\right\}$$

Однако точка А2 не принадлежит многограннику ограничений.

Точка А3.

$$\left.\begin{aligned} &L\ \ x_1, x_2, \lambda_1\ \ = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 5)^2 + \lambda_3 \cdot\ \ x_2\ \ ,\\ &x_1^* = 0,\quad x_2^* = 5,\\ &f\ \ 0{,}5\ \ = 16. \end{aligned}\right\}$$

Точка А4

$$\left.\begin{array}{l} L\;\; x_1, x_2, \lambda_1\;\; = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 5)^2 + \lambda_4 \cdot\;\; x_1\;\; , \\ x_1^* = 4, \quad x_2^* = 0, \\ f\;\; 4{,}0\;\; = 25. \end{array}\right\}$$

Таким образом оптимальное решение соответствует точке А1.

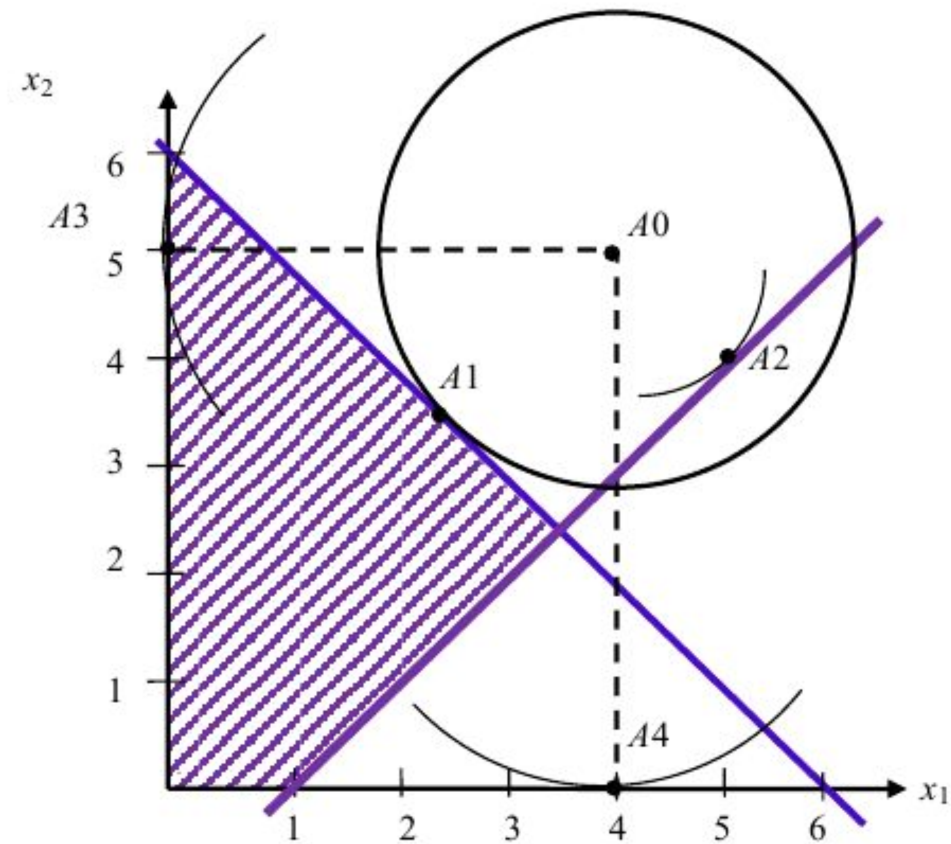


Рисунок 2.

Литература:

1. Теория и методы оптимизации / Е.А. Кочегурова; Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2012. –157с.