ФГАОУ ВПО «Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова»
Инженерно-технический институт
Кафедра прикладной механики

Лекции
по дисциплине «Техническая механика»
270800 - Строительство

Плоский изгиб
Деформации и перемещения
Условие жесткости

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ДЕФОРМАЦИЙ В УПРУГИХ СИСТЕМ

Потенциальная энергия деформации в общем случае нагружения:

Закон сохранения энергии:

Потенциальная энергия внешних сил U_P, действующих на тело, находящееся в равновесии, полностью переходит в потенциальную энергию деформации U этого тела: $U=U_P$

Потенциальная энергия деформации U численно равна работе внешних сил A_P, проделанной ими при этой деформации: $U=A_P$

В балках основным усилием вызывающим деформацию изгиба является изгибающий момент, поэтому потенциальная энергия упругой деформации при изгибе балки определяется по:

$$U = \sum \int_0^{\ell_i} \frac{M_{x_i}^2 \cdot dZ}{2 \cdot EI_X}$$

Обобщенные силы и обобщенные перемещения

Потенциальная энергия деформации (или, с другой стороны, работа силы) численно равна половине произведения величины силового фактора на значение перемещения, соответствующего этой силе:

$$U\left(=A\right)=\frac{F\cdot\Delta}{2}$$

Таким образом, появляется возможность решать задачу в общем виде, не конкретизируя ни силовые факторы, ни перемещения. При этом вводят понятия обобщенной силы (F) и обобщенного перемещения (Δ).

Обобщенная сила – это сила или группа сил, которую удобно выделить при подсчете потенциальной энергии деформации. Обобщенной силой может быть сосредоточенная сила, момент, распределенная нагрузка или их сочетание.

Обобщенное перемещение – это тот вид перемещения (линейное, угловое, объемное и т. д.), на котором рассматриваемая обобщенная сила производит работу.

Выбирать обобщенное перемещение необходимо таким образом, чтобы произведение обобщенного перемещения на обобщенную силу представляло собой работу (размерность работы – Н·м).

Таким образом, для сосредоточенной силы, принятой за обобщенную, обобщенным перемещением будет являться линейное перемещение точки приложения силы.

Если в качестве обобщенной силы выбран момент, то обобщенным перемещением будет являться угол поворота сечения в точке приложения момента.

3. Теорема Кастильяно

Обобщенное перемещение сечения упругой системы, где приложена обобщенная сила равна частному производному от потенциальной энергии упругой системы по этой обобщенной силе.

$$\Delta = \frac{\partial U}{\partial \Phi}$$

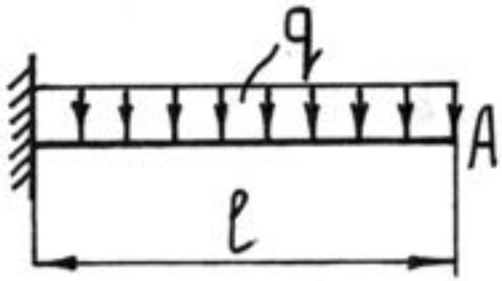
4. Метод Максвелла-Мора

Для определить перемещения методом Максвелла-Мора, необходимо:
1) рассмотреть **«грузовую» систему**, нагруженную только внешними силами, и записать для этой системы выражения для внутренних усилий по участкам;

2) рассмотреть **«единичную» систему**, нагруженную только одной силой – единичной силой $Ф_1=1$, приложенной в той точке, где требуется найти перемещение, и записать для этой системы выражения для внутренних усилий по участкам;

3) подставить найденные внутренние усилия в интеграл Максвелла-Мора и найти перемещение.

$$\delta = \sum_n \int_l \frac{M_{xF} \cdot M_{x1}}{EI_x} dx$$



Определить угловое перемещение φ_A свободного конца консольной балки длиной l, нагруженной распределенной силой q.

<u>*Решение:*</u>

Для определения перемещения необходимо рассмотреть две системы:

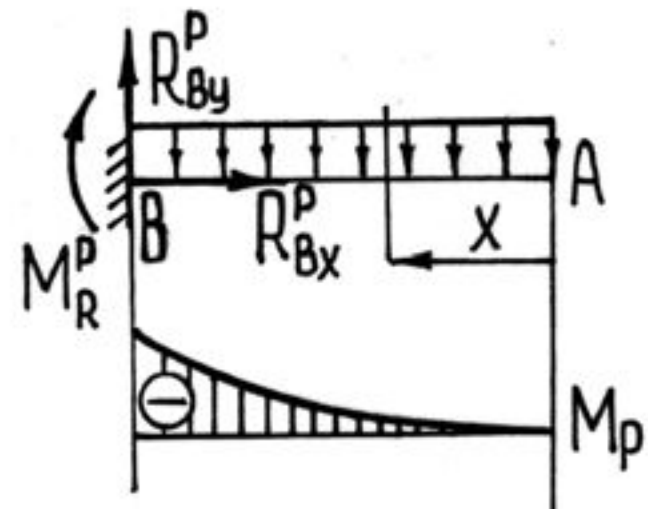
1) грузовую – нагруженную только внешними силами;

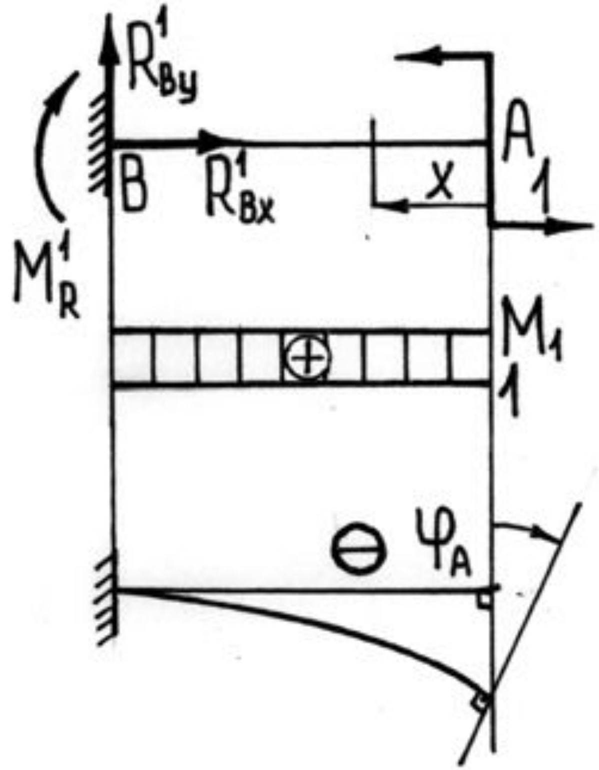
2) единичную – нагруженную единичной обобщенной силой, приложенной в точке и в направлении искомого перемещения. Так как нам необходимо найти угловое перемещение, то в качестве обобщенной единичной силы принимаем момент.

Применяя метод мысленных сечений, определим внутренние усилия, возникающие в сечениях каждой из систем:

а) грузовая система

$$M_{z_P} = -\frac{q \cdot x^2}{2}$$





б) единичная система

$$M_{z_1} = 1$$

Подставим эти усилия в интеграл Максвелла-Мора и возьмем его:

$$\varphi_A = \int_0^l \left(-\frac{q \cdot x^2 \cdot 1}{2 \cdot E \cdot J_z}\right) dx$$

$$\varphi_A = -\frac{q \cdot l^3}{6 \cdot E \cdot J_z}$$

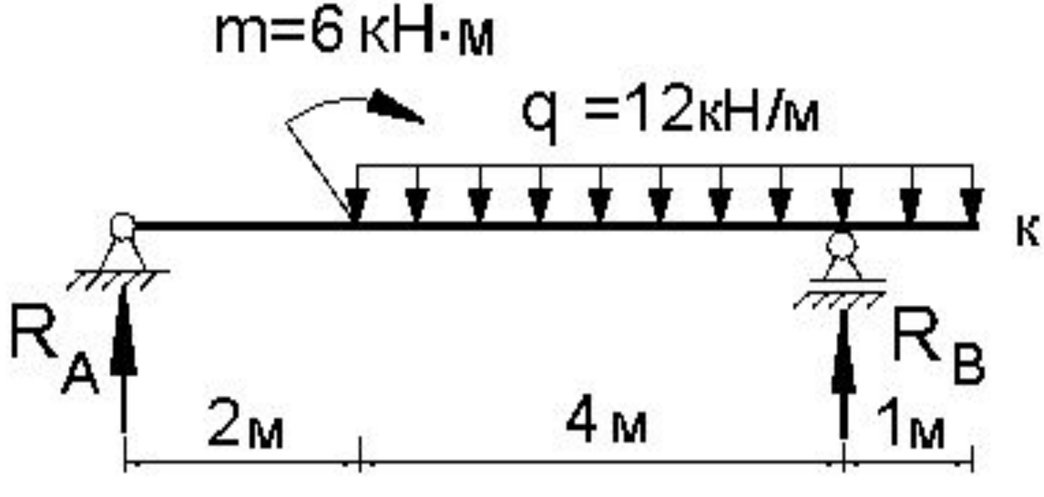
Знак «минус» показывает, что найденное перемещение φ_A и единичный момент направлены в разные стороны.

5. Формула Симпсона

$$\delta = \sum \int_0^{l_i} \frac{M_x \cdot \overline{M}_1}{EI_x} dz = \sum \left(\frac{l}{6 \cdot EI_x} \left(M_x^н \overline{M}_1^н + 4 M_x^C \overline{M}_1^C + M_x^K \overline{M}_1^K \right) \right)_i$$

$M_x^н, M_x^C, M_x^K$ -значения ординат изгибающих моментов от действия заданных нагрузок в начале, середине и конце рассматриваемого участка;

$\overline{M}_1^н, \overline{M}_1^C, \overline{M}_1^K$ – значения ординат изгибающих моментов от действия единичной силы или единичного момента в начале, середине и конце рассматриваемого участка.

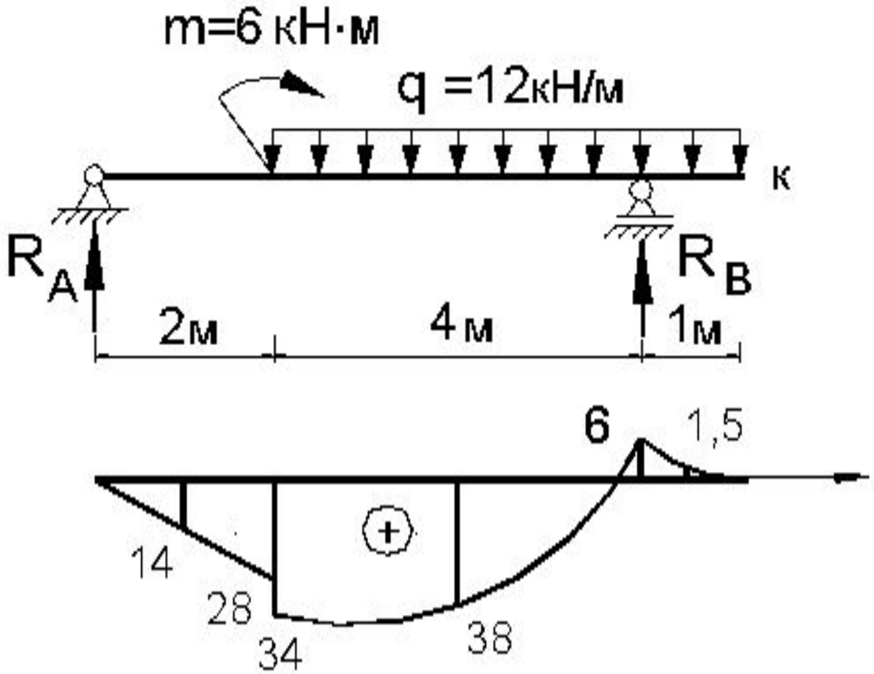


Для стальной балки на двух шарнирных опорах из двух швеллеров № 30, определить прогиб и угол поворота свободного конца балки формулой Симпсона.

$$\left(I_x = 11620\,\text{см}^4\right) \qquad \left(E = 2{,}1\cdot10^5\ \text{МПа} = 2{,}1\cdot10^8\ \text{кПа}\right)$$

Решение:

Формула Симпсона: $$\delta = \sum \int_{l_i} \frac{M_P \overline{M}_1}{EI} dz = \sum \frac{l_i}{6EI_i} \left(M_P^H \overline{M}_1^H + 4M_P^C \overline{M}_1^C + M_P^k \overline{M}_1^k \right)_i$$



Из условия равновесия балки определяем опорные реакции:

$$\sum m_A = 0 \qquad R_B = 46кН$$

$$\sum y = 0 \qquad R_A = 14кН$$

Строим эпюру изгибающих моментов от заданной нагрузки (грузовую эпюру M_P), определяем значения ординат в начале, середине и конце каждого участка.

Участок 1

$$M_x = R_a \cdot z$$

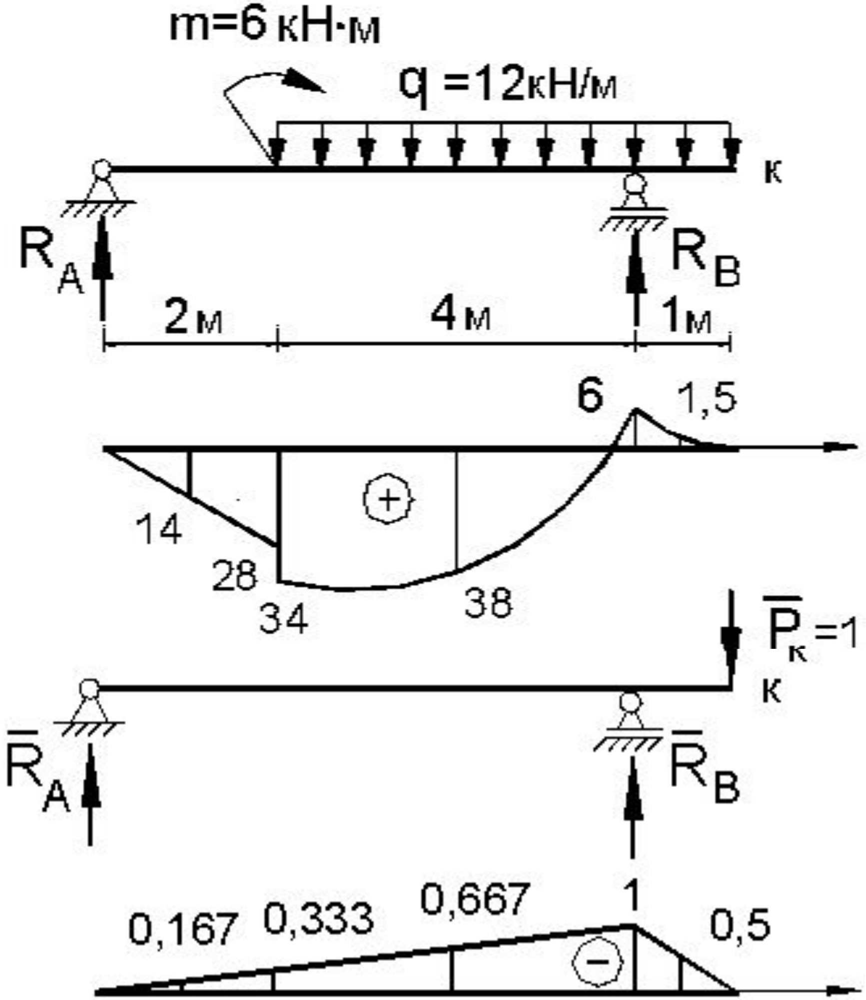
Участок 2

$$M_x = R_a \cdot (2 + z) + m - q\frac{z^2}{2}$$

Участок 3

$$M_x = -q\frac{z^2}{2}$$

Для определения прогиба



Прогиб сечения «*К*» равен:

$$\delta = y_k = \sum \int_0^{l_i} \frac{M_P \overline{M}1}{EI} dz =$$

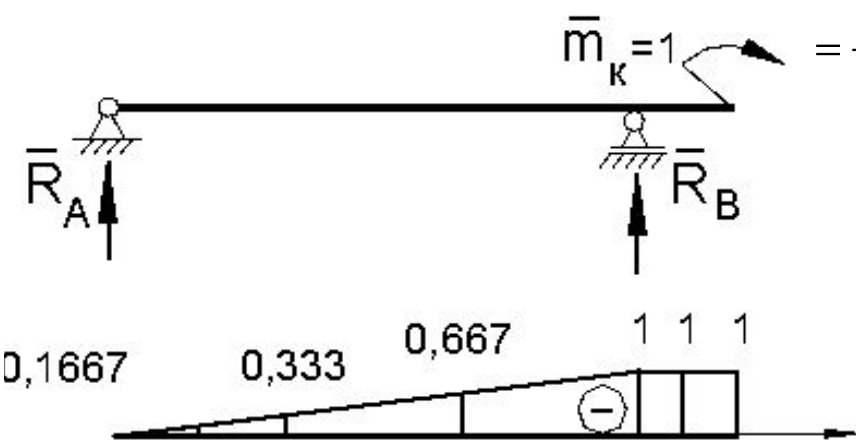
$$= \sum \frac{l_i}{6EI_i} \left(M_P^H \overline{M}_1^H + 4M_P^C \overline{M}_1^C + M_P^k \overline{M}_1^k \right)_i =$$

$$= \frac{1}{EI} \left[\begin{array}{l} \frac{2}{6}\left(0 + 4 \cdot 14(-0{,}167) + 28(-0{,}333)\right) + \\ + \frac{4}{6}\left(34(-0{,}333) + 4 \cdot 38 \cdot 0{,}667 - 6(-1)\right) + \\ + \frac{1}{6} \cdot \left(-6(-1) - 4 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}5\right) \end{array} \right] =$$

$$= -\frac{75{,}359}{EI} = -\frac{75{,}359}{2{,}1 \cdot 10^8 \cdot 11620 \cdot 10^{-8}} = -0{,}31 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Прогиб $y_к$ имеет отрицательный знак, следовательно, сечение «*К*» поднимается вверх, против направления единичной силы.

Для определения угла поворота сечения «*К*» за единичную силу принимаем единичный сосредоточенный момент и строим эпюру изгибающих моментов (единичная эпюра) с определением её ординат во всех рассмотренных сечениях.



Угол поворота сечения «*К*» будет:

$$\delta = \theta_k = \sum \frac{l_i}{6EI_i}\left(M_P^H \overline{M}_1^H + 4M_P^C \overline{M}_1^C + M_P^k \overline{M}_1^k\right)_i =$$

$$= \frac{1}{EI} = \left[\frac{2}{6}\big(0 + 4\cdot 14(-0{,}1667) + 28(-0{,}333)\big) + \right.$$
$$+ \frac{4}{6}\big(34(-0{,}333) + +4\cdot 38(-0{,}667) - 6(-1)\big) +$$

$$\left. + \frac{1}{6}\cdot\big(-6(-1) + 4(-1{,}5)(-1) + 0\big)\right] =$$

$$= -\frac{75{,}32}{EI} = -\frac{75{,}32}{2{,}1\cdot 10^8 \cdot 11620\cdot 10^{-8}} = -0{,}31\cdot 10^{-2}\ \text{рад.}$$

Угол поворота $\theta_к$ имеет отрицательный знак, следовательно, сечение «К» поворачивается против хода часовой стрелки - против направления единичного момента.

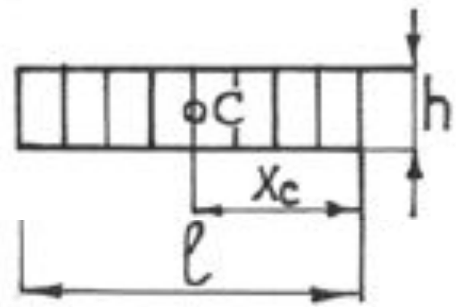
6. Способ Верещагина

Если балка в пределах рассматриваемого участка имеет постоянное сечение, площадь эпюры изгибающих моментов и положение её центра тяжести легко определяемы, то интеграл Максвелла - Мора может быть решен графоаналитическим методом Верещагина:

$$\delta = \sum_{n} \frac{\omega \cdot M_{1C}}{EI_x}$$

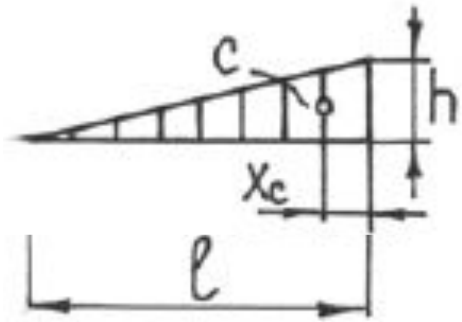
где ω – площадь «грузовой» эпюры M_F на данном участке; M_{1C} – величина «единичного» момента под центром тяжести «грузовой» эпюры на данном участке.

Формулы для определения площади и координаты центра тяжести для некоторых характерных эпюр:



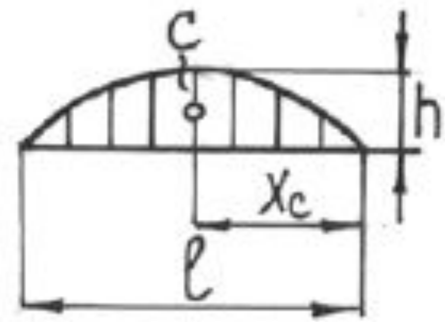
Прямоугольник

$\omega = h \cdot l,\ x_c = l/2$



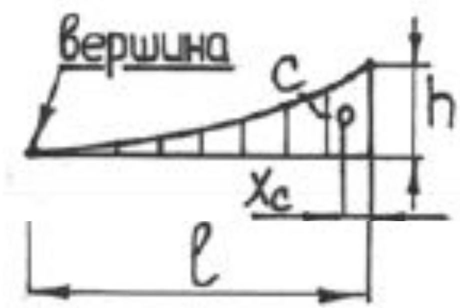
Треугольник

$\omega = h \cdot l/2,\ x_c = l/3$



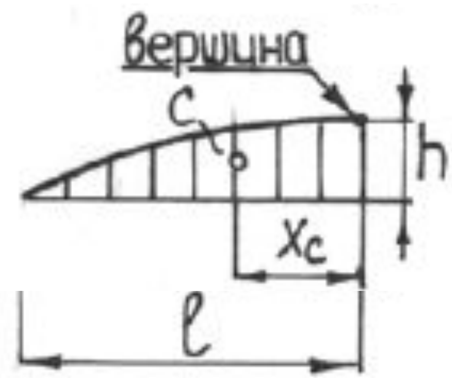
Полная парабола

$\omega = 2h \cdot l/3,\ x_c = l/2$



Вогнутая парабола

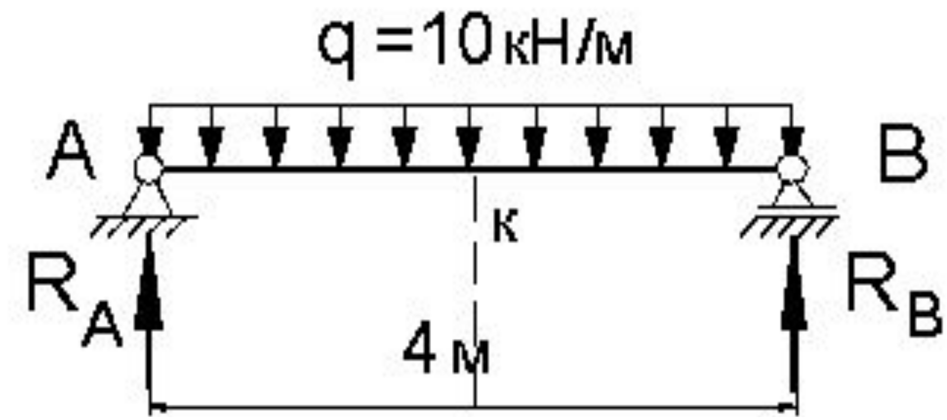
$\omega = h \cdot l/3,\ x_c = l/4$



Выпуклая парабола

$\omega = 2h \cdot l/3,\ x_c = 3l/8$

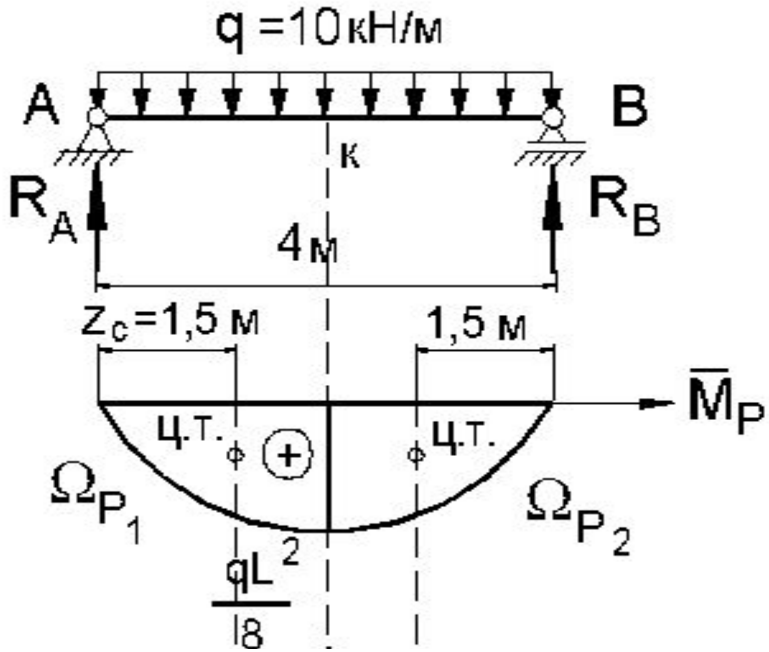
Для деревянной балки прямоугольного сечения 20×20 $см^2$ определить вертикальное перемещение оси балки в середине пролета и угол поворота опорного сечения *A* методом Верещагина.



$$\left(E = 0{,}11 \cdot 10^5 \text{ МПа}\right) \qquad \left(I_x = 13333{,}33\,\text{см}^4\right)$$

Решение:

При применении формулы Верещагина $\Delta_{кр} = \sum \int_0^{l_i} \frac{M_{P_i} \overline{M_{k_i}}}{EI} dz = \sum \left(\frac{\Omega_{P_i} \cdot \overline{M_{k_i}^C}}{EI} \right)_i$



для определения перемещений сечения балки строим эпюру изгибающих моментов от заданной нагрузки (грузовую эпюру), определяем площади эпюр и положение их центров тяжести на соответствующих участках.

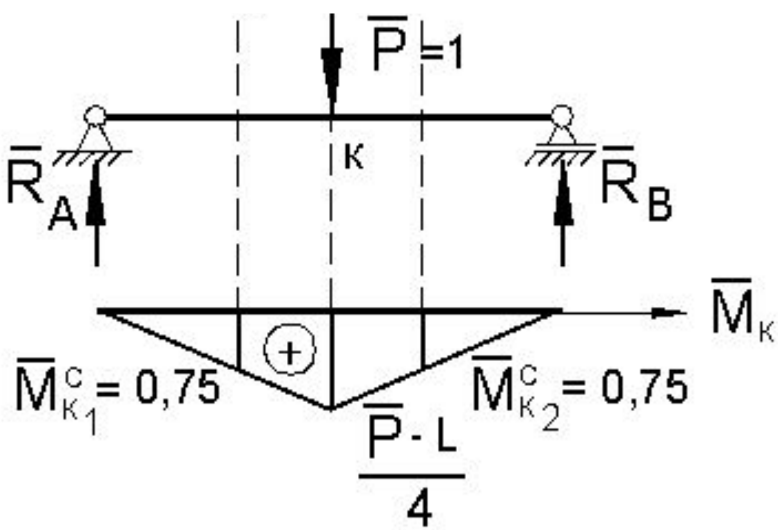
Балка имеет два равных участка *АК* и *КВ*. Площади эпюр:

$$\Omega_{P_1} = \Omega_{P_2} = \int_0^{\frac{l}{2}} M_P(z) dz = \frac{ql^3}{24} = 26{,}67$$

Положение центров тяжести этих площадей определяем:

$$z_C = \frac{\int_0^{\frac{l}{2}} M_p(z) \cdot z dz}{\Omega_{P_1}} = \frac{5}{8} \cdot \frac{l}{2} = 1{,}25\,\text{м}.$$

Для определения прогиба в сечении «*К*» за единичную нагрузку принимаем сосредоточенную единичную силу строим эпюру изгибающих моментов от действия этой силы.



Ординаты единичной эпюры под центрами тяжести этих площадей равны:

$$\overline{M}_{k_1}^{C} = \overline{M}_{k_2}^{C} = \frac{5}{8} \cdot \frac{\overline{P} \cdot l}{4} = 0,625$$

Прогиб сечения «*К*» равен:

$$\delta = y_k = \sum \frac{1}{EI}\left[\Omega_{P_1} \cdot \overline{M}_{k1}^{C} + \Omega_{P_2} \cdot \overline{M}_{k2}^{C}\right] =$$

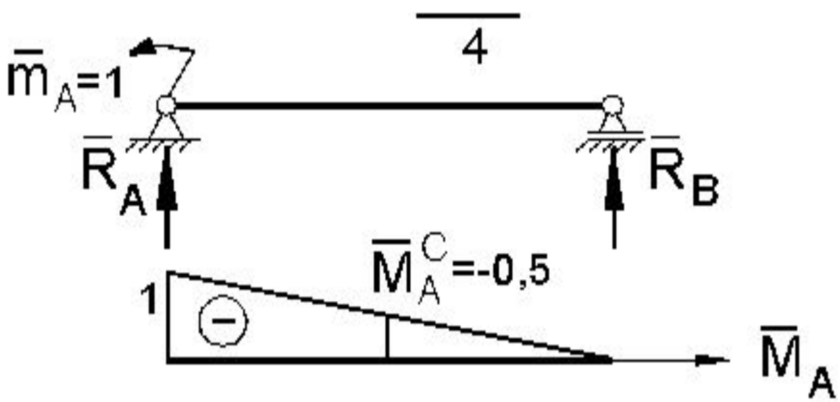
$$= \frac{(26,67 \cdot 0,625 \cdot 2)}{EI} = \frac{33.3375}{0,11 \cdot 10^{8} \cdot 13333,33 \cdot 10^{-8}} =$$

$$= 2,273 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

y_k имеет положительный знак, следовательно, прогиб сечения «*К*» балки направлен вниз, т.е. совпадает с направлением единичной силы.

Для определения угла поворота опорного сечения балки «A» за единичную силу принимаем сосредоточенный единичный момент, приложенный в рассматриваемом сечении, и строим эпюру изгибающих моментов от его действия.

Для этой задачи балка имеет один участок.



Площадь эпюры M_P:

$$\Omega_P = \int_0^l M_P \cdot z dz = \frac{ql^3}{12} = 53{,}33$$

Так как эпюра M_P симметричная, то центр тяжести площади Ω_p находится посередине. Ордината единичной эпюры под центром тяжести этой площади равна:

$$\overline{M}_A^C = -\frac{1}{2} \cdot 1 = -0{,}5$$

Угол поворота сечения «A» равен:

$$\Delta_{\text{кр}} = \theta_A = \frac{\Omega_P \cdot \overline{M}_A^C}{EI} = \frac{53{,}33 \cdot (-0{,}5)}{EI} =$$

$$= \frac{-26{,}67}{0{,}11 \cdot 10^8 \cdot 13333{,}33 \cdot 10^{-8}} = -1{,}82 \cdot 10^{-2} \text{ рад}$$

Угол поворота θ_A имеет отрицательный знак, следовательно, сечение поворачивается по ходу часовой стрелки (против направления единичного момента).

Условие жесткости

Под расчетом на жесткость понимают оценку упругой податливости балки под действием приложенных нагрузок и подбор таких размеров поперечного сечения, при которых перемещения не будут превышать установленных нормами пределов.

$$f_{макс} \leq [f] = \frac{l}{400...800}$$

Перемещение центра тяжести сечения по направлению перпендикулярному к оси балки, называется ***прогибом***.

Наибольший прогиб в пролете или на консоли балки, называется ***стрелой прогиба*** и обозначается - *f*.