Финансовый Университет при Правительстве РФ

Кафедра «Прикладная математика».

Угрозов Валерий Вячеславович

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ФИНАНСОВЫХ РЕШЕНИЙ

Тема 2.ПОТОКИ ПЛАТЕЖЕЙ.

Потоки платежей

Финансовые контракты могут предусматривать не отдельные разовые платежи, **а серию платежей**, распределенных во времени (регулярные выплаты). Например, погашение долгосрочного кредита, вместе с начисленными на него процентами; периодические взносы на расчетный счет, на котором формируется некоторый фонд различного назначения (инвестиционный, пенсионный, страховой, резервный, накопительный и т.д.); дивиденды, выплачиваемые по ценным бумагам; выплаты пенсий из пенсионного фонда, оплата коммунальных услуг и пр.

Платеж P, произведенный в момент t, назовем финансовым событием и обозначим как - (t,P). Платежи P>0 (означают поступление) и P<0 (выплаты).

Потоки платежей

- **Опр.** ***Конечная или бесконечная последовательность финансовых событий*** $(t_o,P_o),(t_1,P_1),(t_2,P_2),\ldots,(t_n,P_n)$ называется (конечным или бесконечным) дискретным финансовым потоком и обозначается символом CF (cash flow).
- Пример. Поток n-платежей записывается в виде $CF=\{(t_o,P_o),(t_1,P_1),(t_2,P_2),\ldots,(t_n,P_n)\}$.
-

Текущая величина потока

- Пусть финансовый поток имеет вид $CF=\{(t_0,P_0),(t_1,P_1),(t_2,P_2),\ldots,(t_n,P_n)\}$.
- Внимание! **Так как деньги имеют временную ценность, то при вычислении величины потока в какой-то момент t НЕОБХОДИМО!!!**
- 1) каждый платеж дисконтировать (обычно по сложной известной процентной ставке i) к этому моменту t, а затем 2) суммировать эти дисконтированные платежи.
- Опр. Сумма всех платежей денежного потока , приведенных к некоторому моменту времени t, называется текущим,или приведенным, значением потока (в момент t) и обозначается PV_t
- $$PV_t=P_0/(1+i)^{t_0-t}+P_1/(1+i)^{t_1-t}+P_2/(1+i)^{t_2-t}+\ldots+P_n/(1+i)^{t_n-t}$$

Современная, будущая величины потока.

- Если $t=t_0=0$, то текущее значение потока в начальный момент времени, называется современной величиной потока
- $PV=P_0+P_1/(1+i)^{t_1}+P_2/(1+i)^{t_2}+\ldots+P_n/(1+i)^{t_n}$;
- Если $t>tn$ величина потока называется будущим накопленным значением потока и равна $FVt= P_0(1+i)^{t-t_0}+P_1(1+i)^{t-t_1}+P_2(1+i)^{t-t_2}+\ldots +P_n(1+i)^{t-t_n}$;
- Если $t=t_n$, то величина потока называется конечной величиной потока и равна
- $FV= P_0(1+i)^{tn-t_0}+P_1(1+i)^{tn-t_1}+P_2(1+i)^{tn-t_2}+\ldots +P_n$;

Средний срок финансового потока

- Опр. Средним сроком финансового потока $CF=\{(t_0,P_0),(t_1,P_1),(t_2,P_2),\ldots,(t_n,P_n)\}$ относительно i, называют такой момент времени T для которого выполнено условие
- $PV_T(CF)=P_1+P_2+\ldots+P_n$ (*), т.е.поток CF и поток состоящий из одного платежа P= P1+P2+…+Pn в момент t равны. Данное условие (*) запишем в виде
- $\mathbf{P_1/(1+i)^{t_1}+P_2/(1+i)^{t_2}+\ldots+P_n/(1+i)^{t_n}}=(P1+P2+\ldots+Pn)/(1+i)^t$.Так как $(1+i)^{-x} = 1\text{-}xi+ x(x+1)/2*i^2+$то
- $T= (P_1*t_1+\ldots+P_n*t_n)/(P_1+P_2+\ldots P_n)$

Метод расчета чистого приведенного эффекта

- Опр. Чистый приведенный эффект – это один из важнейших показателей оценки эффективности инвестиций, определяемый как разницу между приведенными к настоящей стоимости денежным потоком за весь период эксплуатации инвестиционного проекта и суммой инвестируемых в него средств.
- Допустим, делается прогноз, что некоторая инвестиция (*IC*) будет генерировать в течение *n* лет годовые доходы в размере *P1, P2… Pn*. Тогда общая накопленная величина дисконтированных доходов *PV (Present Value)* рассчитывается как $PV=\Sigma P_k/(1+r)^k$ r-ставка дисконтирования.

NVP

- Если проект предполагает единовременное вложение, т.е. разовую инвестицию, то поток платежей - CF={(IC,0),(P1,1),…(Pn,tn)}
- формула для расчета чистого приведенного эффекта *NPV (Net Present Value)* будет
- выглядеть следующим образом:
- $NVP=PV-IC= \Sigma P_k/(1+i)^k - IC$
- Если инвестирование протекало в течении *m* лет, то формула для расчета *NPV*
- $NVP=PV-IC= \Sigma P_k/(1+i)^k - \Sigma IC_j/(1+r)^j$

Оценка эффективности инвестиционных проектов

- ***NPV > 0*, то проект следует принять, т.к. в случае принятия проекта ценность компании увеличится, т.е. увеличится благосостояние ее владельцев;**
- ***NPV < 0*, то проект следует отвергнуть, т.к. в случае принятия проекта ценность компании уменьшится, т.е. владельцы компании понесут убыток;**
- ***NPV = 0*, то проект ни прибыльный, ни убыточный, т.к. в случае принятия проекта ценность компании не изменится.**

Достоинства и недостатки NPV

- Широкое использование чистого приведённого дохода обусловлено его преимуществами по сравнению с другими методами оценки эффективности проектов. В частности этот метод позволяет учесть весь период функционирования проекта и график потока денежных средств.
- К недостаткам этого показателя эффективности инвестиций относят: - ставка дисконтирования обычно принимается неизменной для всего инвестиционного периода (периода действия проекта); - трудность определения соответствующего коэффициента дисконтирования; невозможность точного расчета рентабельности проекта

- 1.Величина требуемых инвестиций составляет 2 млн.рублей, а прогнозируемые поступления 500 тысяч рублей ежегодно в течение пяти лет. Коэффициент дисконтирования принимается на уровне 12%.NPV=?
- Решение.CF={(-2млн.,0),(0,5,1)…(0,5, 5)}.
- NPV=0,5/(1+0,12)+…+0,5?(1+0,12)5-2=-1 ,96млн.руб.
- Вывод .Так как NPV<0 – инвестирование не целесообразно.

Внутренняя норма доходности инвестиций

- Опр. Под внутренней нормой доходности понимают значение коэффициента дисконтирования *r* при котором чистый приведенный доход (*NPV*) проекта равен нулю.
- Внутренняя норма доходности -IRR определяет максимально приемлемую ставку дисконта, при которой можно инвестировать средства без каких-либо потерь для собственника.
- IRR = i, при котором NPV = f(i) = 0,
- Ее значение находят из следующего уравнения: $NVP = \Sigma P_k/(1+IRR)^k - \Sigma IC_j/(1+IRR)^j$

Особенности IRR.

- К достоинствам этого критерия можно отнести объективность, независимость от абсолютного размера инвестиций. Кроме того, он легко может быть приспособлен для сравнения проектов с различными уровнями риска: проекты с большим уровнем риска должны иметь большую внутреннюю норму доходности. Однако у него есть и недостатки: сложность «бескомпьютерных» расчетов и возможная необъективность выбора нормативной доходности, большая зависимость от точности оценки будущих денежных потоков.
-

Регулярные потоки платежей

- 1. Обыкновенные ренты.
- ***Опр.*** ***Поток положительных платежей, разделенных равными временными интервалами, называется финансовой рентой, или просто рентой.***
- ***Опр.*** ***Промежуток между двумя последовательными платежами называется периодом ренты.***
- ***Опр.Если каждый платеж осуществляется в конце соответствующего ему периода, то рента называется обыкновенной (или рентой постнумерандо), а если в начале то рента называется авансовой (или пренумерандо).***
- ***Опр. Если все платежи равны между собой, то ренту называют постоянной.***
- ***В случае , когда период постоянной ренты равен одному году , ренту называют годовой , или аннутетом (иногда аннутетом называуют постоянную ренту с произвольным периодом).***

Основные параметры финансовой ренты

- Финансовая рента имеет следующие параметры:
- - ***член ренты (R)*** – величина каждого отдельного платежа выплачиваемая в 1 год (годовая выплата)
- - ***период ренты*** – временной интервал между двумя соседними платежами,
- - ***срок ренты (n)*** – время, измеренное от начала финансовой ренты до конца ее последнего периода,
- - ***процентная ставка (i)*** – ставка, используемая при наращении или дисконтировании платежей, образующих ренту.

Виды финансовых рент.

- 1) **От продолжительности периода ренты:**
- ***годовые*** – ренты выплачиваются ***один*** раз в год (***p* = 1**) ,
- ***р-срочные*** – выплата рент производится ***p*** раз в год (***p* > 1**) равными платежами ***R***.
- 2) **По числу начислений процентов - *m*** :
- **с начислением *один раз* в год** (***m* = 1**),
- ***с начислением m раз в год*** (***m* > 1**),
- *ренты с **непрерывным начислением.***
- 3) **По величине членов различают**:
- ***постоянные*** имеют равные члены, когда величина каждого платежа остается неизменной во времени (***R = const***) ;
- ***переменные ренты*** – размер платежей может быть произвольным (***R = var***) или изменяться по какому-либо математическому закону.
- 4) **По вероятности выплаты членов** :
- ***верные ренты*** подлежат безусловной выплате, например, при погашении кредита;
- ***условные ренты*** - выплата зависит от наступления некоторого случайного события. Число ее членов заранее неизвестно.

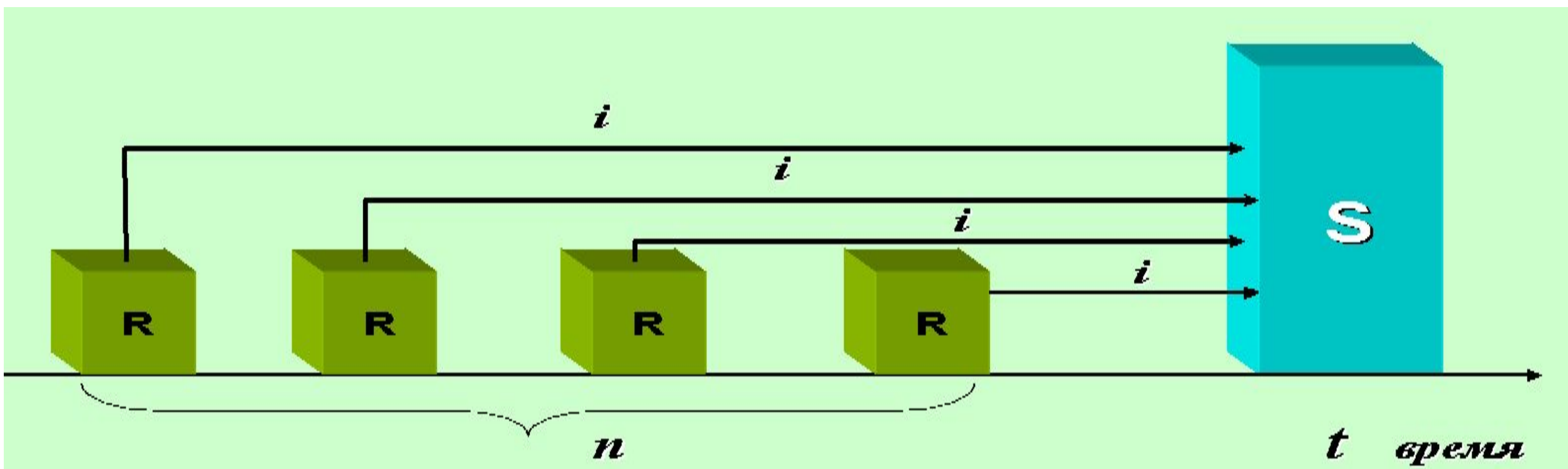
- **5)По числу членов :**
  ограниченные - с конечным и заранее известным числом членов ;
  бесконечные (вечные) – число членов ренты заранее неизвестно. Например, выплаты по облигационным займам с неограниченными или нефиксированными сроками.
- 6) **В зависимости от наличия сдвига момента начала ренты по отношению к началу действия контракта или какому-либо другому моменту**:
  немедленные – начало действия контракта начинается сразу после его подписания,
  отложенные или отсроченные – начало действия контракта сдвигается на более поздние сроки.
- 7) **По моменту выплаты платежей выделяется два вида рент:**
  обычные **(*постнумерандо*) -** платежи осуществляются в конце каждого периода (наиболее часто встречаются);
  авансовые (***пренумерандо***) - выплаты производятся в начале каждого периода.

Формула геометрической прогрессии

- Геометрическая прогрессия
- $b, b*q, b*q^2, b*q^3, b*q^4, \ldots, b*q^n$
- Сумма геометрической прогрессии
- $S=b+b*q+b*q^2+b*q^3+b*q^4+\ldots+ b*q^n$
- $$S=b*(q^n-1)/(q-1)$$

Наращенная сумма потока платежей

- ***Наращенная сумма потока платежей (S)*** - **это сумма всех членов последовательности платежей *R* с начисленными на них процентами к концу срока ренты.** Логика финансовых операций по определению величины наращенной суммы потока платежей - ***S*** отражена на рис. 3.1. В качестве ***S*** может выступать итоговый размер создаваемого инвестиционного или какого-либо другого фонда или общая сумма задолженности.



- Рис. 3.1. Схема формирования наращенной суммы ***S*** потока

Формула наращенной суммы S для финансовых рент

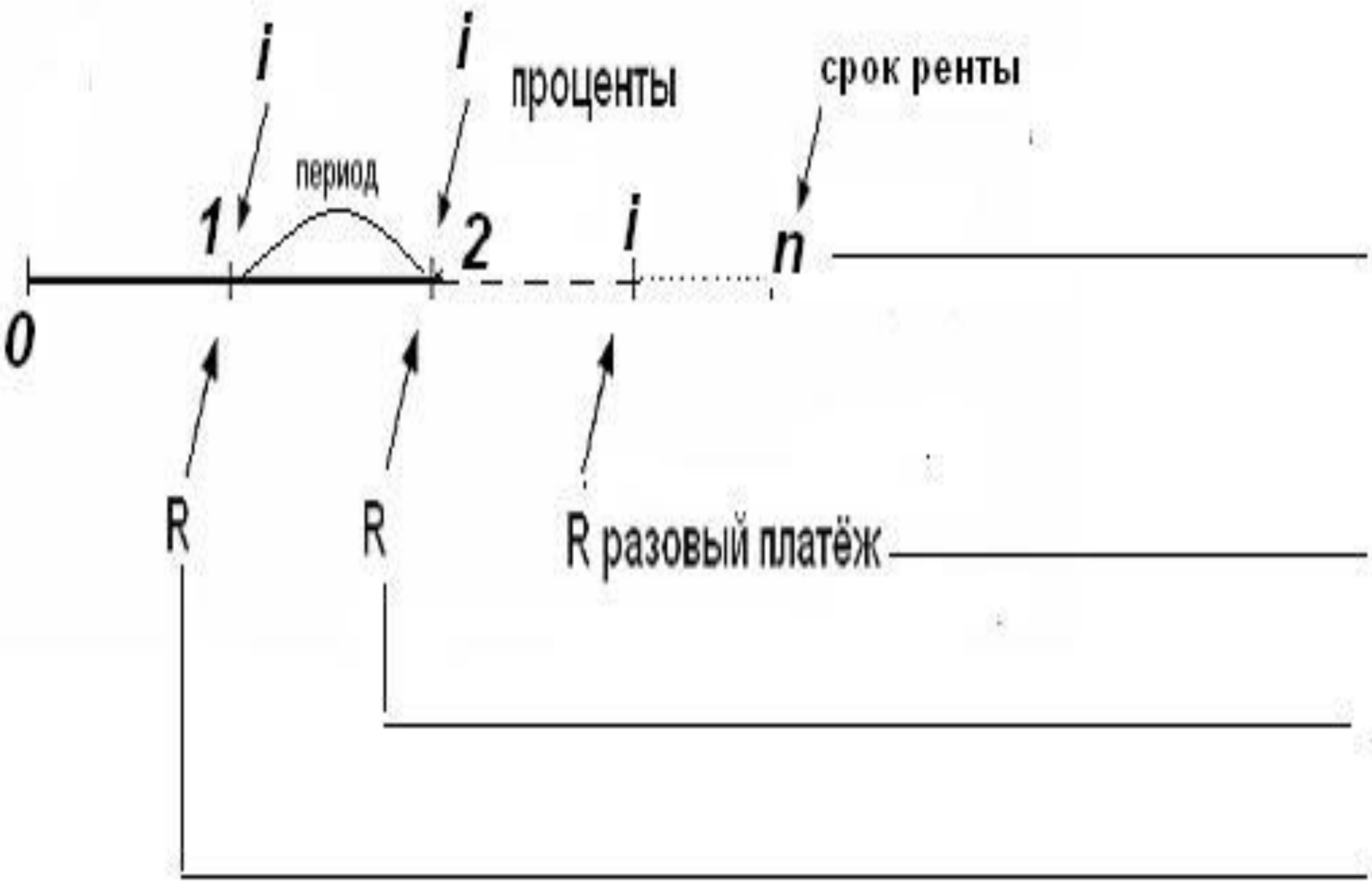
- ***Обычная годовая рента.*** Пусть в конце каждого года в течение n лет на расчетный счет вносится по ***R*** рублей, сложные проценты начисляются один раз в год по ставке ***i***. В этом случае первый взнос к концу срока ренты возрастет до величины $R(1+i)^{n-1}$, ***так как на сумму R проценты начислялись в течение (n -1) года***.
- **Второй взнос увеличится до $R(1+i)^{n-2}$ и т.д.**
- **На последний взнос – R проценты не начисляются.**
-

Формула наращенной суммы S для финансовых рент

- Таким образом, в конце срока ренты ее наращенная сумма будет равна сумме членов геометрической прогрессии: $\boldsymbol{S=R+R(1+i)+R(1+i)^2+\ldots+R(1+i)^{n-1}}$,
- $$\boldsymbol{S = R*s_{n;i}} \quad , \qquad (2.1)$$
- где $\boldsymbol{s_{n;i} = [(1+i)^n - 1]/i}$ - ***коэффициент наращения аннунитента (ренты).*** S зависит от срока ренты **n** и уровня процентной ставки ***i***.

1. Потоки платежей.

Финансовая рента. постнумерандо



$$S_i = R$$

$$\vdots$$

$$S_i = R^*(1+i)^{n-i}$$

$$\vdots$$

$$S_2 = R^*(1+i)^{n-2}$$

$$S_1 = R^*(1+i)^{n-1}$$

План накопительного фонда по обычной годовой ренте

Год/n	1	2	3	…	n
1	R				
2	$R(1+i)$	R			
3	$R(1+i)^2$	$R(1+i)$	R		
4	$R(1+i)^3$	$R(1+i)^2$	$R(1+i)$		
……..					
n	$R(1+i)^{n-1}$	$R(1+i)^{n-2}$			R

$$S = R*[(1+i)^n-1]/i$$

Пример 3.1. В течение 3-х лет на расчетный счет в конце каждого года поступает по 10 млн руб., на которые 1 раз в год начисляются проценты по сложной годовой ставке в 10%. Определить сумму на расчетном счете к концу указанного срока.

- Дано: $\boldsymbol{n}$ = 3 года, $\boldsymbol{R}$ = 10 000 000 руб., $\boldsymbol{m}$ =1, p=1, $\boldsymbol{i}$ **=** 0,10 .Найти ***S = ?***
- ***Решение***

  Вычисления производится по формуле для <u>обычной годовой ренты</u> по формуле (3.1)

  $S = 10\,000\,000 * [(1 + 0{,}1)^3 - 1] / 0{,}1 =$

  33 100 000,00 *руб.*

Рента p - срочная, с произвольным поступлением платежей p ≥ 1, и произвольным начислением процентов m ≥ 1 (общий случай).

- Наращенная сумма рассчитывается по формуле:
-
- S = $s_1 + s_2 + \ldots + s_{np}$ = $$\frac{R}{p} \frac{(1+j/m)^{mn}-1}{(1+j/m)^{m/p}-1}$$ (3.5)

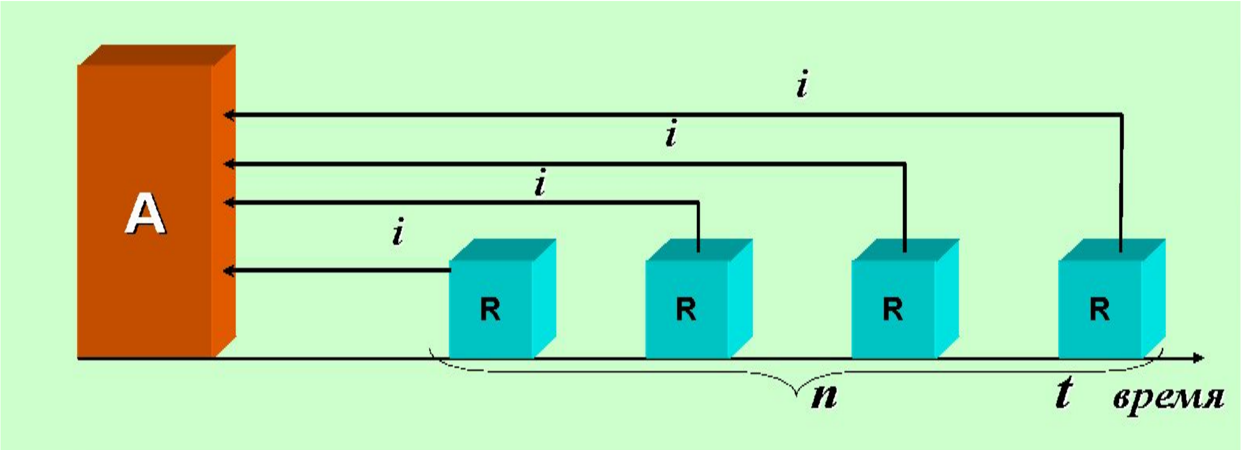
Пример 3.5. В течение 3-х лет на расчетный счет в конце каждого квартала поступают платежи (p=4) равными долями из расчета 10 млн руб. в год (т.е. по 10/4 млн руб. в квартал), на которые ежемесячно (m=12) начисляются проценты по сложной ставке в 10% годовых. Определить сумму на расчетном счете к концу указанного срока.

- Дано: $\boldsymbol{n}$ = 3 года, $\boldsymbol{m}$ = 12, $\boldsymbol{R}$ = 10 000 000 руб.,
- $\boldsymbol{p}$ = 4, $\boldsymbol{j}$ **=** 0,10 .Найти ***S = ?***
- ***Решение.***
- Вычисляя по формуле (3.5) находим:
- $S = (10\,000\,000/4)*[(1+0{,}10/12)^{(12x3)} - 1] / [(1+0{,}10/12)^{(12/4)} - 1] = 34\,529\,637{,}96$ руб.

Современная (текущая) величина аннуитета-А

- **Современная (текущая) величина потока платежей** (капитализированная или приведенная величина) – это сумма платежей, дисконтированных на момент начала ренты по ставке начисляемых сложных процентов. Это важнейшая характеристика финансового анализа, т.к. является основой для измерения эффективности различных финансово-кредитных операций, сравнения условий контрактов и т.п.
- Данная характеристика показывает, какую сумму-А следовало бы иметь первоначально, чтобы, разбив ее на равные взносы - R, на которые начислялись бы установленные проценты в течение всего срока –i , можно было бы получить указанную наращенную сумму - S.

Схема определения А – при обычной годовой ренте



Год/n	1	2	3	…	n
1	R	R			
дисконт	$R/(1+i)$	$R/(1+i)^2$	$R/(1+i)^3$		$R/(1+i)^n$
A=	$R/(1+i)+ R/(1+i)^2 + R/(1+i)^3 + \ldots + R/(1+i)^n$ $=R((1+i)^{-n}\quad -1)/i$				

Современная величина А обычной годовой финансовой ренты.

Если член годовой ренты равен ***R***, процентная ставка ***i***, срок ренты n и проценты начисляются один раз в конце года. Тогда a1,a2,…an- приведенные к началу ренты величины первого, второго и т.д. платежей :

$$a_1 = R\frac{1}{1+i} = Rv; a_2 = R\frac{1}{(1+i)^2} = Rv^2; \ldots; a_n = R\frac{1}{(1+i)^n} = Rv^n$$

где $v = \frac{1}{1+i}$ - дисконтный множитель.

Приведенные величины-a1,a2,…,an- образуют геометрическую прогрессию, ***сумма которой равнаА***:

$$A = \sum_{k=1}^{n} a_k = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = Ra_{n;i} \quad (3.14)$$

где $a_{n;i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ - **коэффициент приведения ренты**.

Пример 3.10. В течение 3-х лет на расчетный счет в конце каждого года (***p*** = 1) поступает по 10 млн руб. Ежегодное дисконтирование производится по сложной процентной ставке в 10% годовых. Определить современную стоимость ренты.

- Дано: ***n*** = 3 года, ***m*** = 1, ***R*** = 10 000 000 руб,
- ***p*** = 1, ***j*** **=** 0,10. Найти ***A = ?***
- **Решение.**
- Вычисляя по формуле (3.14) получим :
- $A = 10\,000\,000 * [1 - (1+0,1)^{-3}]/0,1 =$ 24 868 519,91 руб.

Современная величина p-срочной финансовой ренты с произвольными значениями $p \geq 1$ и $m \geq 1$.

- Формула (3.15) является общей для нахождения современной величины ренты, когда *p* и *m* могут принимать произвольные значения

$$A = R\frac{1-(1+j/m)^{-m\cdot n}}{p\,[(1+j/m)^{m/p}-1]} \qquad (3.15)$$

Пример 3.11. В течение 3-х лет на расчетный счет в конце каждого квартала поступают платежи (p=4) равными долями из расчета 10 млн. руб. в год (т.е. по 10/4 млн руб. в квартал). Ежемесячное дисконтирование (m=12) производится по сложной ставке 10% годовых. Определить современную стоимость ренты.

- Дано: $\boldsymbol{n}$ = 3 года, $\boldsymbol{m}$ = 12, $\boldsymbol{R}$ = 10 000 000 руб.,
- $\boldsymbol{p}$ = 4, $\boldsymbol{j}$ **=** 0,10. Найти А **= *?***
- ***Решение***
- Вычисляя по формуле (3.15) получим:
- $A = (10\,000\,000/4)*[1 - (1+0{,}1/12)^{(-3*12)}] / [(1+0{,}1/12)]^{(12/4)} - 1] = 25\,612\,003{,}42$ руб.

Основные характеристики рент

Обычная годовая рента	
$S = R\dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$	$\mathrm{A} = \mathrm{R}\dfrac{1-(1+\mathrm{i})^{-\mathrm{n}}}{\mathrm{i}}$
Проценты начисляются m раз в году	
$S = R\dfrac{(1+\frac{j}{m})^{mn} - 1}{(1+\frac{j}{m})^{m} - 1}$	$A = R\dfrac{1-(1+\frac{j}{m})^{-mn}}{(1+\frac{j}{m})^{m} - 1}$
p-срочная рента, m=1	
$S = R\dfrac{(1+i)^n - 1}{p((1+i)^{1/p} - 1)}$	$A = R\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{p((1+i)^{1/p} - 1)}$
p-срочная рента, p=m	
$S = R\dfrac{(1+\frac{j}{m})^{mn} - 1}{j}$	$A = R\dfrac{1-(1+\frac{j}{m})^{-mn}}{j}$
p-срочная рента, p≠m	
$S = R\dfrac{(1+\frac{j}{m})^{mn} - 1}{p((1+\frac{j}{m})^{m/p} - 1)}$	$A = R\dfrac{1-(1+\frac{j}{m})^{-mn}}{p((1+\frac{j}{m})^{m/p} - 1)}$

Определение величины отдельного платежа *простой ренты* - R.

- **I. Известна величина наращенной суммы-S , а также** процентная ставка i и ***срок ренты n***.
- ***Величина отдельного платежа- R по схеме постнумерандо.***

(3.6)

$$R_{no} = \frac{S \cdot i}{(1+i)^n - 1}$$

- ***Величина отдельного платежа по схеме пренумерандо***

(3.7)

$$R_{np} = \frac{S \cdot i}{(1+i) \cdot ((1+i)^n - 1)}$$

Пример 3.6. Через 3 года на расчетном счете необходимо иметь 10 млн руб. Определить размер ежегодных платежей : а) в *конце года (постнумерандо)*;в) в начале года - *пренумерандо* по сложной процентной ставке 12% годовых.

- Дано: $\boldsymbol{n}$ = 3 года, $\boldsymbol{S}$ = 10 000 000 руб., $\boldsymbol{i}$ **=** 0,12 .
- Найти $\boldsymbol{R_{по}}$ ***и*** $\boldsymbol{R_{пр}}$ **= ?**
- **Решение.**
- **а)** Вычисляя по формуле (3.6)находим: $R_{по}$= 10 000 000*0,12/[(1+0,12)^3 -1] = **2 963 489,81 руб.**
- **в)** Вычисляя по формуле (3.7) находим: $R_{пр}$ = (10 000 000*0,12)/[(1+0,12)((1+0,12)^3 -1)] = **2 645 973,04** руб.

II-й случай. Определение величины отдельного платежа простой ренты при известной современной стоимости А.

- ***Известна современная стоимость- А,*** *процентная ставка-* ***i****,количество выплат- n.*
- ***Величина отдельного платежа по схеме постнумерандо.***

(3.8)

$$R_{no} = \frac{Ai}{1 - 1/(1+i)^n}$$

- ***Величина отдельного платежа по схеме пренумерандо***

(3.9)

$$R_{np} = \frac{Ai}{(1+i)(1-1/(1+i)^n)}$$

Пример 3.7. Предприниматель взял кредит в размере *10 млн руб.* *срокoм на 3 года* под *14% годовых*. Рассчитать размер ежегодных погасительных платежей, если они будут выплачиваться а) *в конце года ; b)в начале года*

- Дано: ***n*** = 3 года,***A*** = 10 000 000 руб.,***i* =** 0,14 .Найти ***Ra и Rb = ?***

Решение.

- **а)** Вычисляя по формуле (3.8) находим:
- ***R****a*= $R_{no} = \dfrac{Ai}{1 - 1/(1+i)^n}$
- = 10 000 000*0,14/[1-1/(1+0,14)^3] = **4 307 314,80 руб**.
- *b)* Вычисляя по формуле (3.9) находим:
- ***R = (10 000 000*0,14)/[(1+0,14)(1-/((1+0,14)^3)] = 3 778 346,32 руб.***

Определение срока простой ренты - n

- **I-й случай. Известна наращенная сумма-S *, процентная ставка-i , отдельный платеж -R***
- Срок простой ренты при платежах по *постнумерандо*.

(3.10)

$$n = \frac{\ln(1 + S \cdot i / R)}{\ln(1 + i)}$$

- Срок простой ренты при платежах по *пренумерандо*.

(3.11)

$$n = \ln(1 + \frac{S \cdot i}{R \cdot (1 + i)}) / \ln(1 + i)$$

Пример 3.8. На момент окончания финансового соглашения заемщик должен выплатить 30 000 000 руб. Платежи размером 5 000 000 руб. поступают ежегодно в конце года, с начислением по сложной процентной ставке 15% годовых. Определить срок простой ренты а)*постнумерандо;в) пренумерандо*

- Дано:***R*** = 5 000 000 руб.,***S*** = 30 000 000 руб.,
- ***i* =** 0,15 .Найти ***na и nb*= ?** **Решение.**
- **а)** По формуле (3.10) находим:
- *na* = *ln* (1+30 000 000*0,15/5 000 000) / ln(1+0,15) = **4,59 года**.
- *в)* По формуле (3.11) находим: ***nв = ln(1+30 000 000*0,15/(5 000 000*(1+0,15)) / ln(1+0,15) = 4,14 года.***

2-й случай. Определение срока простой ренты *n* при известной современной стоимости ренты *A*

- Известна современная стоимость- А, *отдельный платеж ренты* – R, процентная ставка- *i.*
- Определение срока простой ренты при платежах по *постнумерандо:*

(3.12)

$$n = -\frac{\ln(1 - Ai / R)}{\ln(1 + i)}$$

- Определение срока простой ренты при платежах по пре*нумерандо*

(3.13) $$n = -\ln(1 - \frac{Ai}{R(1+i)}) / \ln(1+i)$$

Пример 3.9. Организация взяла кредит в размере 30 000 000 руб. с условием погашения ежегодными платежами по 6 000 000 руб. и начислением по сложной процентной ставке 15% годовых. Определить срок простой ренты при погашении: а) в конце года (*постнумерандо*); b) в начале года (*пренумерандо*)

- Дано: ***A*** = 30 000 000 руб., ***R*** = 6 000 000 руб.,
- ***i* =** 0,15. Найти ***na и nb = ?***
- **Решение.**
- а)Вычисляя по формуле (3.12) находим: ***n*** = - *ln* (1-30 000 000*0,15/6 000 000) / *ln*(1+0,15) = **9,92 года***.*
- а)Вычисляя по формуле (3.13) находим
- n = -*ln* (1-30 000 000*0,15/(6000 000*(1+0,15)) / *ln*(1+0,15) = **7,56 года***.*

1.3.5. Определение величины процентной ставки простой ренты

- При заключении финансовых сделок важно знать их доходность, которая определяется процентной ставкой ренты за один период начисления. При этом считается, что известны следующие значения: отдельный платеж ***R***, срок займа **n** и наращенная сумма ***S*** (или современная стоимость ***A***). В Excel данная задача решается с помощью финансовой функции СТАВКА.

Некоторые практические применения анунитета.

- Погашение кредита.

Пусть ссуда размера P взята в кредит на n лет под i процентов годовых, причём тело ссуды в течение всего периода займа не погашается. В случае начисления сложных процентов размер задолженности (сумма долга с процентами) будет равен

$$Z = P(1+i)^n. \tag{4.1}$$

Погашение кредита равными платежами

Допустим теперь, что погашение кредита производится в конце каждого периода платежа равными долями, как это и имеет место сейчас в современной практике банковского кредитования. Процесс погашения кредита является регулярной рентой постнумерандо. Для определённости рассмотрим ежегодные платежи.

Предположим, что выплачивая кредитору платеж R в конце года k, заемщик погашает сумму, которая равна этой величине *с начисленными до конца срока кредита процентами*, т.е. погашает задолженность

$$Y_k = P(1+i)^{(n-k)}.$$

Сумма всех задолженностей Y_k должна быть равна общей задолженности Z:

$$P(1+i)^n = R(1+i)^{n-1} + \ldots + R.$$

Отсюда следует равенство:

$$P = \frac{R}{1+i} + \frac{R}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{R}{(1+i)^n} = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

и мы вернулись к формуле приведённой стоимости регулярной годовой ренты без финального платежа, формула (3.8).

Таким образом, основной долг P равен сумме современных стоимостей всех погашающих платежей. Ежегодно заемщик выплачивает кредитору сумму

$$R = \frac{Pi}{1-(1+i)^{-n}},$$

Пример 4.1. Банк предоставил клиенту кредит P = 100 000 руб. сроком на n = 5 лет под i = 10 % процентов годовых с погашением в конце каждого года. Определить размер ежегодного платежа.

Решение

Подставим числовые значения задачи в формулу

$$R = \frac{P_i}{1-(1+i)^{-n}} = \frac{100\,000}{3.790787} = 26\,379.75$$

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ !