ОПТИМАЛЬНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

- При проведении опытных исследований различают пассивный и активный эксперимент
- Обработка результатов пассивного эксперимента проводится методами регрессионного и корреляционного анализа, и выбор вида эмпирической модели (уравнения регрессии), т.е. решение задачи структурной идентификации, является достаточно сложной задачей
- Для решения этой задачи для одной входной переменной x предложены эффективные методы, в которых предусматривается преобразование системы координат как для входной x, так и для выходной переменной y
- При большем числе входных переменных $x_1, ..., x_m$ надёжных методов определения вида уравнения регрессии в настоящее время не существует

- *Активный эксперимент* проводится по заранее составленному плану, в соответствии с которым ставится задача не только определения *оптимальных условий проведения эксперимента*, но и *оптимизации процесса* (эти две задачи принято относить к задачам оптимального планирования экспериментов)
- При этом уравнения регрессии (эмпирические модели) описывают данные активного эксперимента, в основном, в двух ограниченных областях изменения переменных, характеризующих процесс

- Уравнения регрессии имеют следующий вид:
  - *вдали от экстремального значения выход*

$$y = b_0 + \sum_{j=1}^{k} b_j x_j + \sum_{\substack{u,j=1 \\ u \neq j}}^{k} b_{uj} x_u x_j$$

  - *вблизи экстремального значения выходной переменной y* («в почти стационарной области»):

$$y = b_0 + \sum_{j=1}^{k} b_j x_j + \sum_{\substack{u,j=1 \\ u \neq j}}^{k} b_{uj} x_u x_j + \sum_{j=1}^{k} b_{jj} x_j^2$$

Поверхность отклика

- Они включают слагаемые с двойным взаимодействием входных переменных и не учитывают взаимодействия более высоких порядков (тройные, четверные и т.д.), вероятность которых существенно меньше
- Последнее уравнение включает слагаемые с квадратами входных переменных коэффициенты которого получаются при обработке результатов активных *экспериментов II-го порядка*
- Первое уравнение не включает слагаемые с квадратами входных переменных, и его коэффициенты получаются при обработке результатов активных *экспериментов 1-го порядка* — например, ПФЭ — *полного факторного эксперимента*
- Активный эксперимент планируется таким образом, чтобы упростить обработку его результатов методами регрессионного и корреляционного анализа

Полный факторный эксперимент

- Метод полного факторного эксперимента (ПФЭ) служит для получения математического описания процесса в виде отрезка ряда Тейлора, содержащего линейные члены и парные взаимодействия переменных величин:

$$y = b_0 + \sum_{j=1}^{k} b_j x_j + \sum_{\substack{u,j=1 \\ u \neq j}}^{k} b_{uj} x_u x_j$$

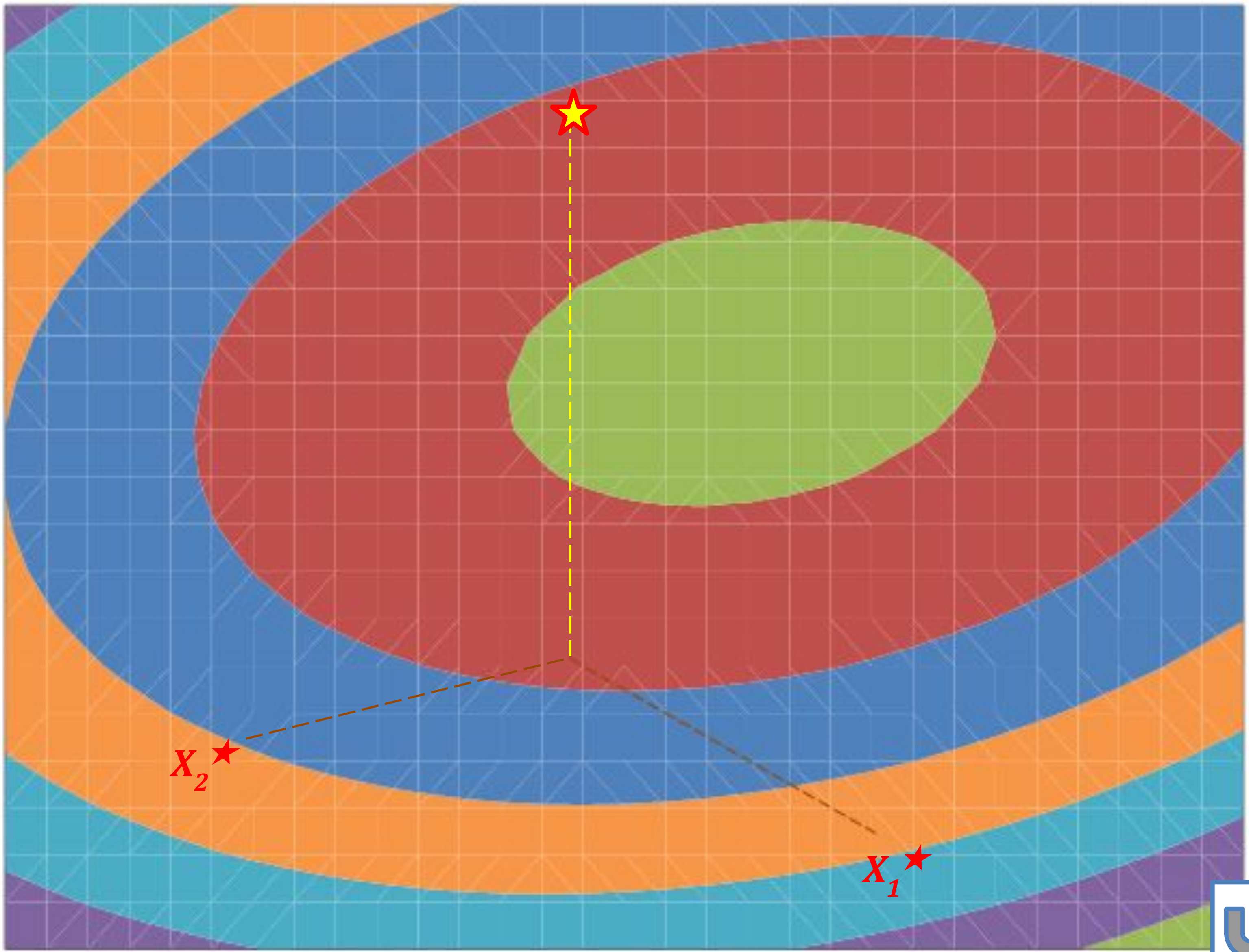
Поверхность отклика

$$y = b_o x_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2$$

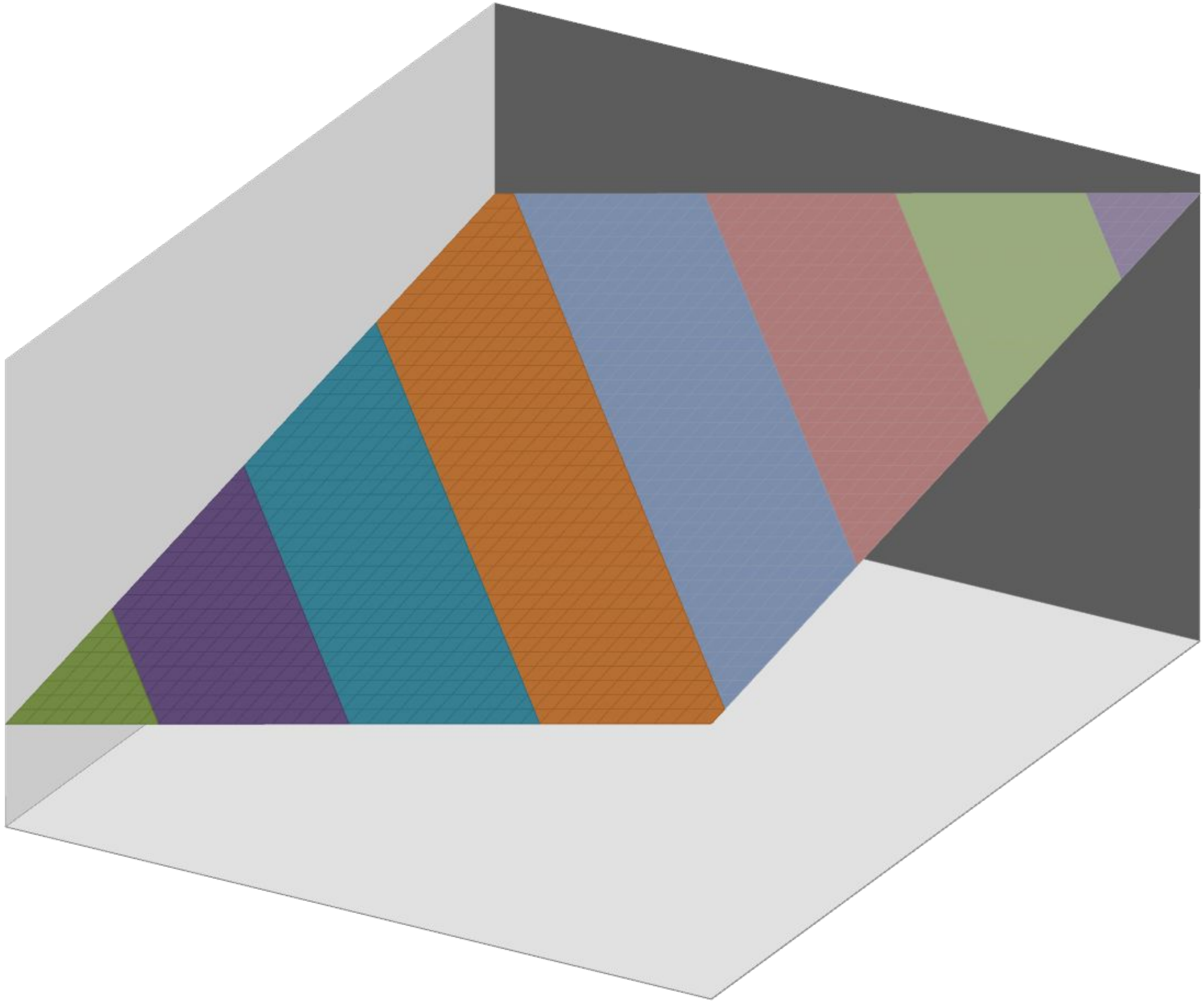
Поверхность отклика

$$y = b_o x_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + b_{23} x_2 x_3$$

Поверхность отклика

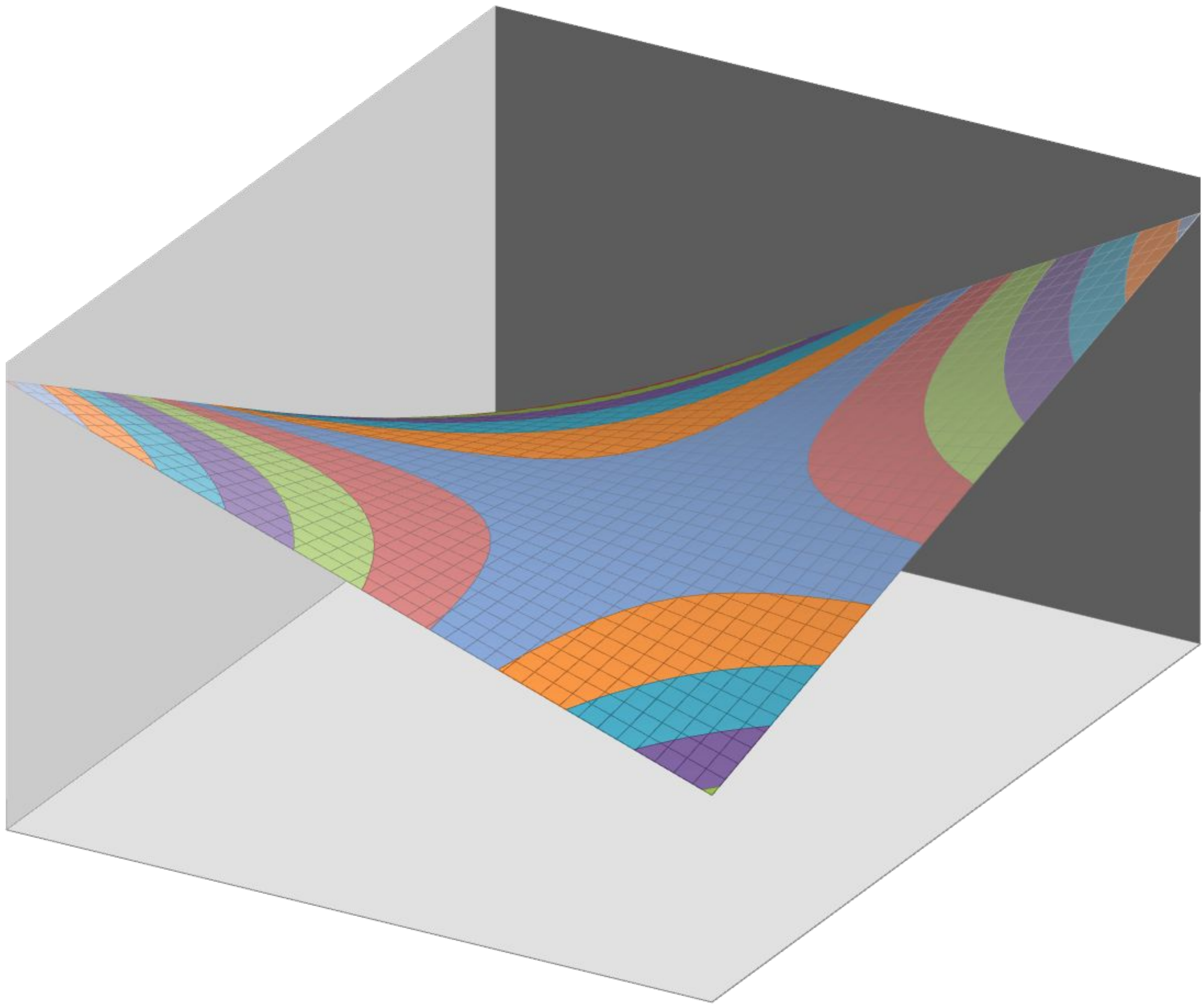


Поверхность отклика $y = b_o x_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2$



Поверхность отклика

$$y = b_o x_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_2 x_1 x_2$$



МАТРИЦА ПОЛНОГО ФАКТОРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА И ЕЁ СВОЙСТВА

- Полным факторным экспериментом называется система опытов, содержащая все возможные неповторяющиеся комбинации уровней варьирования факторов
- Для удобства вычислений коэффициентов регрессии все факторы в ходе полного факторного эксперимента варьируются на двух уровнях
- Называют один из этих уровней *верхним*, а второй — *нижним*
- *Интервалом* варьирования факторов называется некоторое число (свое для каждого фактора), прибавление которого к *основному уровню* дает верхний, а вычитание — нижний уровни фактора
- Другими словами, интервал варьирования — это расстояние на координатной оси между основным и верхним (или нижним) уровнем

- Для упрощения записи условий эксперимента и обработки экспериментальных данных пользуются кодированными переменными
- Переход к кодированным переменным осуществляется по следующей формуле:

$$x_j = \frac{\tilde{x}_j - \tilde{x}_{jo}}{I_j}$$

- где x_j — кодированное значение фактора; $\tilde{x}_j$ — натуральное значение фактора; $\tilde{x}_{jo}$ — натуральное значение основного уровня; I_j — интервал варьирования; j—номер фактора.

Пример

	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_4$
Основной уровень	3	30	1,5	15
Интервал варьирования	2	10	1	10

Натуральные значения	1	2	3	4	5	$\tilde{x}_1$
Кодированные значения	-1		0		+1	x_1

$$X_{1н} = \frac{1-3}{2} = -1$$

$$X_{1в} = \frac{5-3}{2} = 1$$

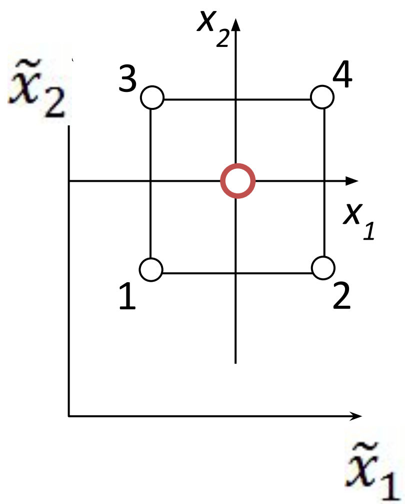
- Общее число опытов ПФЭ определяется по формуле

$$N = 2^k$$

где k — число факторов

- План проведения экспериментов, называется *матрицей планирования*
- Она может быть составлена в натуральных значениях соответствующих уровней факторов (этот вариант матрицы планирования необходим при постановке экспериментальных исследований)
- или в безразмерных (кодированных) значениях переменных (этот вариант матрицы используется главным образом для расчетов коэффициентов уравнения регрессии)

Матрица планирования эксперимента 2^2



Матрица планирования эксперимента 2^2

Номер опыта	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	y
1	1	20	y_1
2	5	20	y_2
3	1	40	y_3
4	5	40	y_4

Матрица планирования эксперимента 2^2

Номер опыта	x_1	x_2	y
1	-1	-1	y_1
2	+1	-1	y_2
3	-1	+1	y_3
4	+1	+1	y_4

Матрица планирования эксперимента 2^3

Матрица планирования эксперимента 2^3

Номер опыта	x_1	x_2	x_3	y
1	-1	-1	-1	y_1
2	+1	-1	-1	y_2
3	-1	+1	-1	y_3
4	+1	+1	-1	y_4
5	-1	-1	+1	Y_5
6	+1	-1	+1	y_6
7	-1	+1	+1	y_7
8	+1	+1	+1	y_8

Матрица планирования ПФЭ обладает следующими свойствами:

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ij} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ij}^2 = N,$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_{il} x_{im} = 0, \quad l \neq m$$

- где i — номер опыта; j— номер фактора
- Свойство, выраженное уравнением, называется ортогональностью матрицы
- Оно позволяет вычислять коэффициенты регрессии по простым формулам независимо друг от друга

Номер опыта	Матрица планирования								
	x_0	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3		
1	1	-1	-1	-1	1	1	1		
2	1	1	-1	-1	-1	-1	1		
3	1	-1	1	-1	-1	1	-1		
4	1	1	1	-1	1	-1	-1		
5	1	-1	-1	1	1	-1	-1		
6	1	1	-1	1	-1	1	-1		
7	1	-1	1	1	-1	-1	1		
8	1	1	1	1	1	1	1		

	0	8	0			

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ij} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ij}^2 = N,$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_{il}x_{im} = 0, \qquad l \neq m$$

РАСЧЕТ КОЭФФИЦИЕНТОВ УРАВНЕНИЯ РЕГРЕССИИ

- Расчет коэффициентов регрессии для ПФЭ производится *методом наименьших квадратов*
- Благодаря свойствам матрицы полного факторного эксперимента получаются достаточно простые формулы для расчёта коэффициентов уравнения регрессии

$$b_j = \frac{\sum_{i=0}^{N} x_{ji} y_i}{N}, \qquad j = 0, 1, \dots, k.$$

$$b_{lm} = \frac{\sum_{i=0}^{N} x_{il} x_{im} y_i}{N}, \qquad l \neq m.$$

- Проверка гипотезы о значимости коэффициентов уравнения регрессии производится с помощью **критерия Стьюдента**
- Проверка адекватности уравнения регрессии экспериментальным данным проводится с помощью **критерия Фишера**

Пример

Матрица планирования и результаты трёхфакторного эксперимента

Номер опыта	Матрица планирования							Целевая функция	
	x_0	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	y	y_p
1	1	-1	-1	-1	1	1	1	14,55	13,42
2	1	1	-1	-1	-1	-1	1	45,3	46,43
3	1	-1	1	-1	-1	1	-1	12,4	13,53
4	1	1	1	-1	1	-1	-1	50,12	48,99
5	1	-1	-1	1	1	-1	-1	7,38	8,51
6	1	1	-1	1	-1	1	-1	27,52	26,39
7	1	-1	1	1	-1	-1	1	8,12	6,99
8	1	1	1	1	1	1	1	26,2	27,33
	23,9	13,3	0,26	-6,64	0,61	-3,78	-0,41		
	b_0	b_1	b_2	b_3	b_{12}	b_{13}	b_{23}		

ДРОБНЫЙ ФАКТОРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

- Метод дробного факторного эксперимента (ДФЭ) предназначен для получения математического описания процесса в виде отрезка ряда Тейлора, содержащего линейные члены, а также в ряде случаев и парные взаимодействия переменных величин:

$$y = b_0 + \sum_{j=1}^{k} b_j x_j + \sum_{\substack{u,j=1 \\ u \neq j}}^{k} b_{uj} x_u x_j$$

- Коэффициенты уравнения определяются по экспериментальным данным методом наименьших квадратов

Матрица дробного факторного эксперимента

- Одним из недостатков полного факторного эксперимента (ПФЭ) является то, что с увеличением количества факторов резко возрастает число опытов полного факторного эксперимента ($N=2^k$)
- Например: $N=2^2=4$; $N=2^5=32$; $N=2^6=64$; $N=2^{15}=32768$
- Причем количество опытов ПФЭ значительно превосходит число определяемых коэффициентов уравнения регрессии
- ***Дробным факторным экспериментом*** называется система опытов, представляющая собой часть ПФЭ, позволяющая рассчитать коэффициенты уравнения регрессии и сократить объем экспериментальных работ
- Для нахождения математического описания процесса используется определенная часть ПФЭ 1/2, 1/4, 1/8 и так далее. Эти системы опытов называют *дробными репликами*

Возможные дробные реплики от ПФЭ типа 2^3

Номер опыта	Факторы			Функция отклика	Дробные реплики
	x_1	x_2	x_3		
1	-1	-1	-1	y_1	1/4
2	+1	-1	-1	y_2	
3	-1	+1	-1	y_3	1/4
4	+1	+1	-1	y_4	
5	-1	-1	+1	y_5	1/4
6	+1	-1	+1	y_6	
7	-1	+1	+1	y_7	1/4
8	+1	+1	+1	y_8	

Предположим, что надо исследовать влияние на результаты химико-технологического процесса трех факторов и получить его математическое описание в виде линейного уравнения

- Возьмем матрицу полного двухфакторного эксперимента и приравняем произведение $x_1 x_2$ к фактору x_3

Планирование типа 2^{3-1}

Номер опыта	x_0	x_1	x_2	$x_1 x_2 =$	x_3	$x_1 x_3$	$x_2 x_3$	$x_1 x_2 x_3$	Функция отклика
1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	y_1
2	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	y_2
3	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	y_3
4	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	y_4

По данному плану мы можем определить коэффициенты регрессии b_0, b_1, b_2, b_3, однако, они будут смешаны с парными и тройными взаимодействиями:

$$b_1 \to \beta_1 + \beta_{23}; \qquad b_3 \to \beta_3 + \beta_{12};$$

$$b_2 \to \beta_2 + \beta_{13}; \qquad b_0 \to \beta_0 + \beta_{123}$$

- Таким образом, сокращение числа опытов влечет за собой корреляцию между столбцами матрицы ДФЭ, что не позволяет раздельно оценивать эффекты факторов и эффекты взаимодействий
- В результате мы получаем так называемые *совместные* (смешанные) *оценки*

$$b_1 \to \beta_1 + \beta_{23}; \qquad b_3 \to \beta_3 + \beta_{12};$$

$$b_2 \to \beta_2 + \beta_{13}; \qquad b_0 \to \beta_0 + \beta_{123}$$

- Этот недостаток рассматриваемого плана является своеобразной «платой» за уменьшение общего числа опытов

Условия обозначения дробных реплик и число опытов

Число факторов	Дробная реплика	Условное обозначение	Число опытов	
			для дробной-реплики	для полного факторного эксперимента
3	1/2-реплика от 2^3	2^{3-1}	4	8
4	1/2-реплика от 2^4	2^{4-1}	8	16
5	1/4-реплика от 2^5	2^{5-2}	8	32
6	1/8-реплика от 2^6	2^{6-3}	8	64
7	1/16-реплика от 2^7	2^{7-4}	8	128
5	1/2-реплика от 2^5	2^{5-1}	16	32
6	1/4-реплика от 2^6	2^{6-2}	16	64
7	1/8-реплика от 2^7	2^{7-3}	16	128
8	1/16-реплика от 2^8	2^{8-4}	16	256
9	1/32-реплика от 2^9	2^{9-5}	16	512
10	1/64-реплика от 2^{10}	2^{10-6}	16	1024
11	1/128-реплнна от 2^{11}	2^{11-7}	16	2048
12	1/256-реплика от 2^{12}	2^{12-8}	16	4096
13	1/512-реплика от 2^{13}	2^{13-9}	16	8192
14	1/1024-реплика от 2^{11}	2^{14-10}	16	16384
15	1/2048-реплика от 2^{15}	2^{18-11}	16	32768

ПЛАНИРОВАНИЕ СО СМЕШИВАНИЕМ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОВМЕСТНЫХ ОЦЕНОК КОЭФФИЦИЕНТОВ РЕГРЕССИИ

- Планирование эксперимента, при котором некоторые из факторов приравниваются к произведениям нескольких факторов, называется ***планированием со смешиванием***
- Общее число опытов ДФЭ вычисляется по формуле

$$N=2^{k-p},$$

где k — общее число факторов

p — число факторов, приравненных к произведениям

- Существует правило, позволяющее определить, какие коэффициенты регрессии определяются совместно при планировании со смешиванием. Рассмотрим это правило на

Методом ДФЭ будем искать математическое описание процесса в виде уравнения регрессии

$$y = b_o x_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 + b_5 x_5$$

- Воспользуемся планированием типа 2^{5-2} и примем

$$x_4 = -x_1 x_2$$

$$x_5 = x_1 x_2 x_3$$

- Эти равенства называются ***генерирующими соотношениями***
- Они показывают, какое из взаимодействий факторов принято *незначимым*, а поэтому заменено в матрице планирования новой независимой переменной
- Выбор генерирующих соотношений в общем случае произволен
- Умножив обе части генерирующих соотношений на x_4 и x_5, получим

$$x_4 x_4 = \mathbf{1} = -x_1 x_2 x_4$$

$$x_5 x_5 = \mathbf{1} = x_1 x_2 x_3 x_5$$

- Эти равенства называются ***определяющими контрастами***

- Перемножив почленно 1-й и 2-й определяющий контрасты, получим

$$1=(-x_1x_2x_4)(x_1x_2x_3x_5)$$

$$1=-x_3x_4x_5$$

- Составим систему равенств из единицы и правых частей всех определяющих контрастов
- Получим выражение для ***обобщающего определяющего контраста***

$$1=-x_1x_2x_4=x_1x_2x_3x_5=-x_3x_4x_5$$

- Умножив фактор x_1 на обобщающий определяющий контраст, получим

$$x_1=-x_2x_4=x_2x_3x_5=-x_1x_3x_4x_5$$

- Отсюда следует, что коэффициент регрессии b_1 будет оценкой

$$b_1 \rightarrow \beta_1-\beta_{24}+\beta_{235}-\beta_{1345}$$

Аналогично получим

$$b_2 \rightarrow \beta_2 - \beta_{14} + \beta_{135} - \beta_{2345};$$

$$b_3 \rightarrow \beta_3 - \beta_{1234} + \beta_{125} - \beta_{45};$$

$$b_4 \rightarrow \beta_4 - \beta_{12} + \beta_{12345} - \beta_{35};$$

$$b_5 \rightarrow \beta_5 - \beta_{1245} + \beta_{123} - \beta_{34}.$$

РАЗРЕШАЮЩАЯ СПОСОБНОСТЬ МАТРИЦЫ ПЛАНИРОВАНИЯ

- Эффективность системы смешивания факторов и взаимодействий факторов определяется ***разрешающей способностью матрицы***
- Она будет максимальной, если линейные эффекты смешаны с произведениями наибольшего количества факторов

- Например, при выборе полуреплики типа 2^{4-1} возможны 8 вариантов решений

$$
\begin{array}{llll}
1 & x_4 = x_1x_2; & 5 & x_4 = x_1x_3; \\
2 & x_4 = -x_1x_2; & 6 & x_4 = -x_1x_3; \\
3 & x_4 = x_2x_3; & 7 & x_4 = x_1x_2x_3. \\
4 & x_4 = -x_2x_3; & 8 & x_4 = -x_1x_2x_3.
\end{array}
$$

- Наибольшая разрешающая способность у реплик 7-й и 8-й
- При наличии априорной информации о значимости взаимодействий факторов можно разработать наилучшую систему смешивания оценок
- Если таких сведений нет, то выбирают реплику с наибольшей разрешающей способностью, так как тройные взаимодействия менее важны, чем двойные

РАСЧЕТ КОЭФФИЦИЕНТОВ РЕГРЕССИИ

- Вычисление коэффициентов регрессии при использовании ДФЭ производится методом *наименьших квадратов* по формулам, которые применяются и для обработки данных ПФЭ
- При расчете коэффициентов регрессии следует учесть, что подлежат вычислению только те коэффициенты при взаимодействиях факторов, столбцы уровней которых в матрице планирования *не коррелированны* со столбцами отдельных факторов
- Игнорирование этого правила ведет к нарушению ортогональности плана

РАСЧЕТ КОЭФФИЦИЕНТОВ РЕГРЕССИИ

- В общем случае формулы для расчета коэффициентов регрессии по результатам ДФЭ имеют вид

$$b_j = \frac{\sum_{i=0}^{N} x_{ji} y_i}{N}, \qquad j = 0, 1, \dots, k.$$

$$b_{lm} = \frac{\sum_{i=0}^{N} x_{il} x_{im} y_i}{N}, \qquad l \neq m.$$

Матрица планирования

x_0	x_1	x_2	x_3	$x_4 = x_1 x_2 x_3$	$x_5 = x_1 x_2$
1	-1	-1	-1	-1	1
1	1	-1	-1	1	-1
1	-1	1	-1	1	-1
1	1	1	-1	-1	1
1	-1	-1	1	1	1
1	1	-1	1	-1	-1
1	-1	1	1	-1	-1
1	1	1	1	1	1

	0	*8*	*0*		

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ij} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ij}^2 = N,$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_{il} x_{im} = 0\,, \quad l \neq m$$

Пример

Матрица планирования и результаты ДФЭ типа 2^{5-2}

Номер опыта	Матрица планирования						Целевая функция	
	x_0	x_1	x_2	x_3	$x_4 = x_1 x_2 x_3$	$x_5 = x_1 x_2$	$y_э$	y_p
1	1	-1	-1	-1	-1	1	14,5	14,58
2	1	1	-1	-1	1	-1	41,0	47,20
3	1	-1	1	-1	1	-1	38,0	31,80
4	1	1	1	-1	-1	1	18,6	18,53
5	1	-1	-1	1	1	1	13,8	13,73
6	1	1	-1	1	-1	-1	51,0	44,80
7	1	-1	1	1	-1	-1	23,2	29,40
8	1	1	1	1	1	1	17,6	17,68
	27,2	4,84	-2,86	-0,81	0,3875	-11,088		
	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5		

ЭКСПЕРИМЕНТЫ НА ОСНОВЕ ПЛАНОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

- Планы второго порядка используют в тех случаях, когда функция отклика существенно *нелинейна* и не может быть аппроксимирована линейным приближением в рассматриваемой области факторного пространства
- Это имеет место, например, в окрестности экстремума функции отклика
- Эту часть поверхности отклика принято называть «почти стационарной» областью
- Обычно исследователь обнаруживает «почти стационарную» область в результате оптимизации по методу крутого восхождения или симплекс-планирования
- Для адекватного математического описания этой об
по

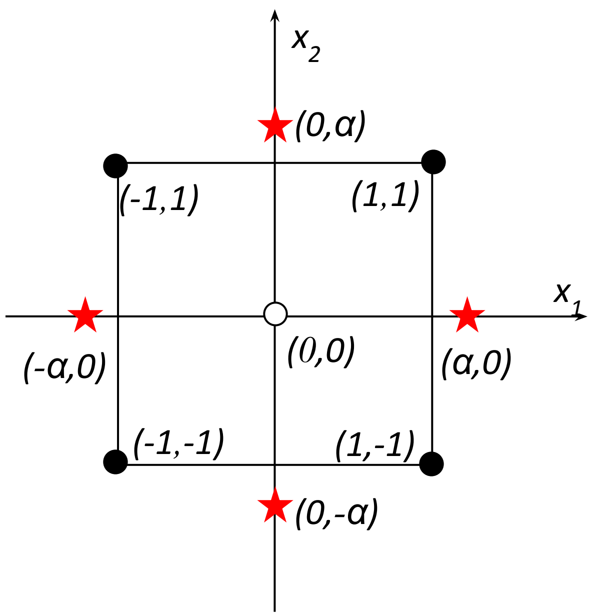
$$y = b_0 + \sum_{j=1}^{k} b_j x_j + \sum_{\substack{u,j=1 \\ u \neq j}}^{k} b_{uj} x_u x_j + \sum_{j=1}^{k} b_{jj} x_j^2$$

- Чтобы найти коэффициенты этого полинома, необходим эксперимент, в котором каждый фактор варьировался бы не менее чем на трех уровнях
- Структура плана *второго* порядка, предназначенного для нахождения коэффициентов квадратичной модели, для экспериментаторов имеет существенное значение
- Дело в том, что исследователь обращается к планам второго порядка обычно после того как ему не удалось получить адекватной модели в результате реализации полного или дробного факторного эксперимента, т. е. плана *первого порядка*
- При этом естественно возникает желание сохранить и в дальнейшем использовать результаты эксперимента, выполненного по плану *первого порядка*

- Исходя из этих соображений были разработаны так называемые *композиционные* планы второго порядка
- Структура данных планов представляет собой композицию из плана первого порядка и некоторого количества добавочных опытов
- При этом один или несколько опытов проводятся в центре плана
- Благодаря своей структуре такие планы экспериментов называются *центральными композиционными* (ЦКП)

Матрица двухфакторного композиционного плана второго порядка

Номер опыта	Фрагмент плана	x_1	x_2	y
1	Ядро плана	+ 1	+1	y_1
2		-1	+1	y_2
3		+ 1	-1	y_3
4		-1	-1	y_4
5	Опыты в «звездных» точках	+α	0	y_5
6		- α	0	y_6
7		0	+ α	y_7
8		0	- α	y_8
9	Опыт в центре плана	0	0	y_9



Матрица трехфакторного композиционного плана второго порядка

Номер опыта	Фрагмент плана	x_1	x_2	x_3	y
1	Ядре плана	+1	+1	+1	y_1
2		-1	+1	+1	y_2
3		+1	-1	+1	y_3
4		-1	-1	+1	y_4
5		+1	+1	-1	y_5
6		-1	+1	-1	y_6
7		+1	-1	-1	y_7
8		-1	-1	-1	y_8
9	Опыты в «звездных» точках	$+\alpha$	0	0	y_9
10		$-\alpha$	0	0	y_{10}
11		0	$+\alpha$	0	y_{11}
12		0	$-\alpha$	0	y_{12}
13		0	0	$+\alpha$	y_{13}
14		0	0	$-\alpha$	y_{14}
15	Опыт в центре плана	0	0	0	y_{15}

Если число факторов больше четырех, то в качестве ядра плана целесообразно использовать *дробный* факторный эксперимент

Общее число опытов ЦКП рассчитывается по формуле

$$N_{цкп}=N_{я}+N_{зв}+N_{о}$$

где $N_{я}$ — число опытов в ядре плана;
$N_{зв}$ — число опытов в «звездных» точках;
$N_{о}$ — число центральных опытов.

Очевидно, $N_{зв}=2k$, т. е. вдвое превышает количество факторов.

Из структуры ЦКП следует, что каждый фактор варьируется на ***пяти*** уровнях:
$-\alpha$, -1, 0, $+1$, $+\alpha$.

Известны два вида центрального композиционного планирования

- *ортогональное*
- *ротатабельное*

Ортогональное центральное композиционное планирование

Свойство *ортогональности* его матрицы записывается следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{N} x_{li} x_{mi} = 0, \qquad l \neq m; l, m = 1,2, \dots, k$$

т. е. сумма парных произведений элементов двух любых столбцов матрицы планирования равна нулю

Следует, отметить, что свойство ортогональности не выполняется для столбцов, содержащих квадраты значений факторов, т. е

$$\sum_{i=1}^{N} x_{li}^2 x_{mi}^2 \neq 0, \qquad l \neq m; l, m = 1,2, \dots, k$$

Например, для ОЦКП с двумя факторами имеем

$$\sum_{i=1}^{N} x_{li}^2 x_{mi}^2 \neq 0\,, \qquad l \neq m; l, m = 1,2, \dots, k$$

Для обеспечения ортогональности ***всех*** столбцов матрицы планирования вместо квадратов значений факторов вводят новые переменные величины

$$x_{ki}^{*} = x_{ki}^2 - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{ki}^2,\ \ j = 1, \dots, k;\ \ i = 1, \dots, N.$$

Из условия ортогональности

$$\sum_{i=1}^{N} x_{li}^{*} x_{mi}^{*} = 0$$

получено уравнение для звездного плеча α:

$$4\alpha^4+4\alpha^2N_я — N_B(N_{ЗВ}+N_0) = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{N_я^2 + N_я(N_{зв} + N_0)} + N_я}{2}}.$$

Основные характеристики ортогонального центрального композиционного планирования

n	N_a	$N_{ЗВ}$	N_o	N	α
2	2^2	4	1	9	1,000
3	2^3	6	1	15	1,215
4	2^4	8	1	25	1,414
5	2^{5-1}	10	1	27	1,547

Матрица ОЦКП для двух факторов

Номер опыта	Фрагмент плана	x_1	x_2	$x_1\ x_2$	x_{1*}	x_{2*}	y
1	Ядро	+1	+1	+1	+0,33	+0,33	y_1
2		-1	+1	-1	+0,33	+0,33	y_2
3		+ 1	1	-1	+0,33	+0,33	y_3
4		-1	-1	+1	+0,33	+0,33	y_4
5	«Звездные» точки	+1	0	0	+0,33	-0,67	y_5
6		-1	0	0	+0,33	-0,67	y_6
7		0	+1	0	-0,67	+0,33	y_7
8		0	-1	0	-0,67	+0,33	y_8
9	Центр	0	0	0	-0,67	-0,67	y_9

$$x_1^* = x_1^2 - \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} x_{1i}^2 = x_1^2 - \frac{2}{3};\qquad x_2^* = x_2^2 - \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} x_{2i}^2 = x_2^2 - \frac{2}{3}.$$

Матрица планирования трёхфакторного *ОЦКП* и результаты
эксперимента

Фрагмент плана	Номер опыта	Матрица планирования										Целевая функция	
		x_0	x_1	x_2	x_3	x_1^*	x_2^*	x_3^*	$x_1 * x_2$	$x_1 * x_3$	$x_2 * x_3$	$y_э$	$y_р$
Ядро плана	1	1	1	1	1	0,27	0,27	0,27	1	1	1	82	79,0
	2	1	-1	1	1	0,27	0,27	0,27	-1	-1	1	82	85,2
	3	1	1	-1	1	0,27	0,27	0,27	-1	1	-1	42	43,0
	4	1	-1	-1	1	0,27	0,27	0,27	1	-1	-1	70	64,2
	5	1	1	1	-1	0,27	0,27	0,27	1	-1	-1	60	67,2
	6	1	-1	1	-1	0,27	0,27	0,27	-1	1	-1	80	80,4
	7	1	1	-1	-1	0,27	0,27	0,27	-1	-1	1	48	46,1
	8	1	-1	-1	-1	0,27	0,27	0,27	1	1	1	70	74,3
Опыты в звёзд точках	9	1	-1,215	0	0	0,746	-0,73	-0,73	0	0	0	80	78,6
	10	1	1,215	0	0	0,746	-0,73	-0,73	0	0	0	60	57,7
	11	1	0	-1,215	0	-0,73	0,746	-0,73	0	0	0	54	56,3
	12	1	0	1,215	0	-0,73	0,746	-0,73	0	0	0	88	81,9
	13	1	0	0	-1,215	-0,73	-0,73	0,746	0	0	0	85	77,1
	14	1	0	0	1,215	-0,73	-0,73	0,746	0	0	0	74	78,1
Центр	15	1	0	0	0	-0,73	-0,73	-0,73	0	0	0	70	75,7
		69,67	- 8,61	10,53	0,42	- 5,12	- 4,45	1,31	3,75	1,75	3,75		
		b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9		