РЕШЕНИЕ СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ КООРДИНАТ

Основные виды задач

Нахождение угла

1) между прямыми;
2) между прямой и плоскостью;
3) между плоскостями;

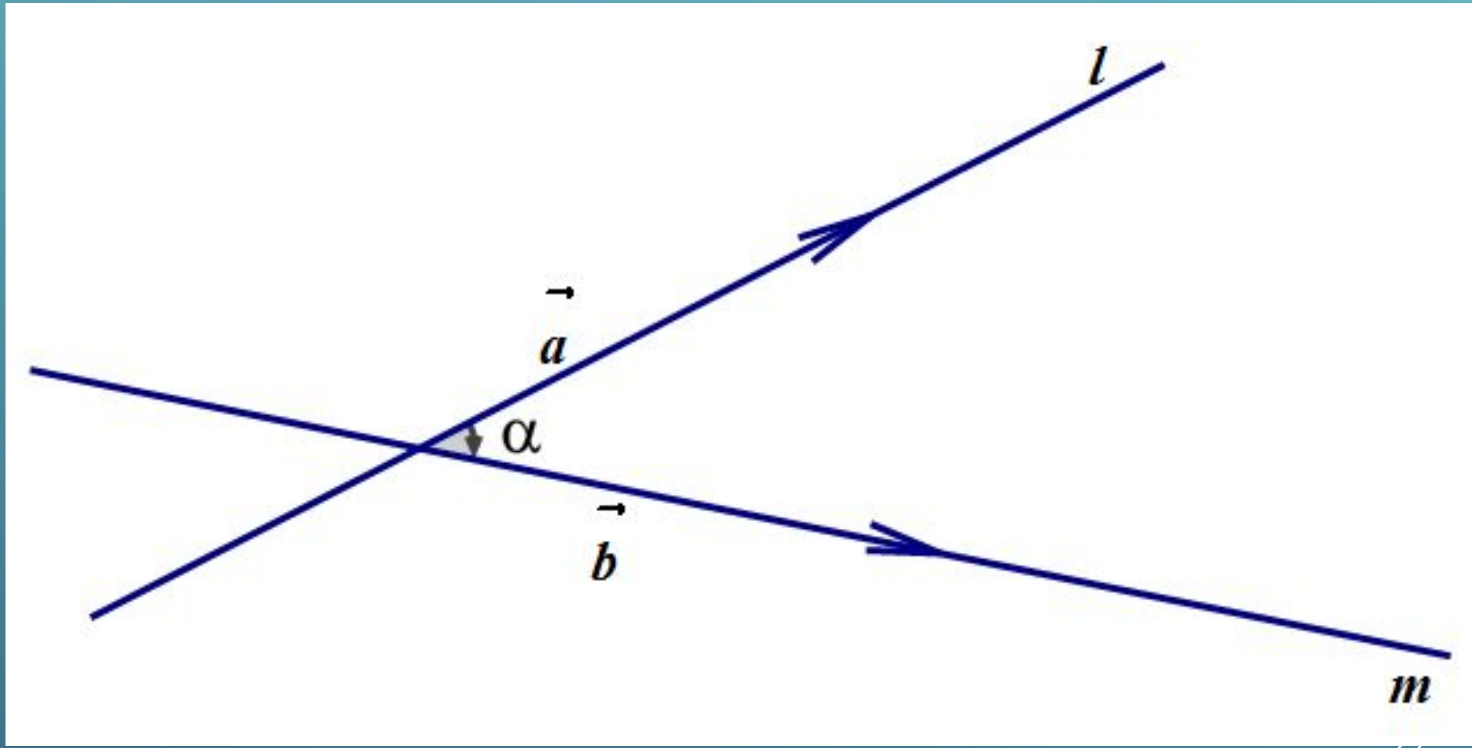
Нахождение расстояния

4) от точки до прямой;
5) от точки до плоскости;
6) между двумя скрещивающимися прямыми.

Угол между прямыми

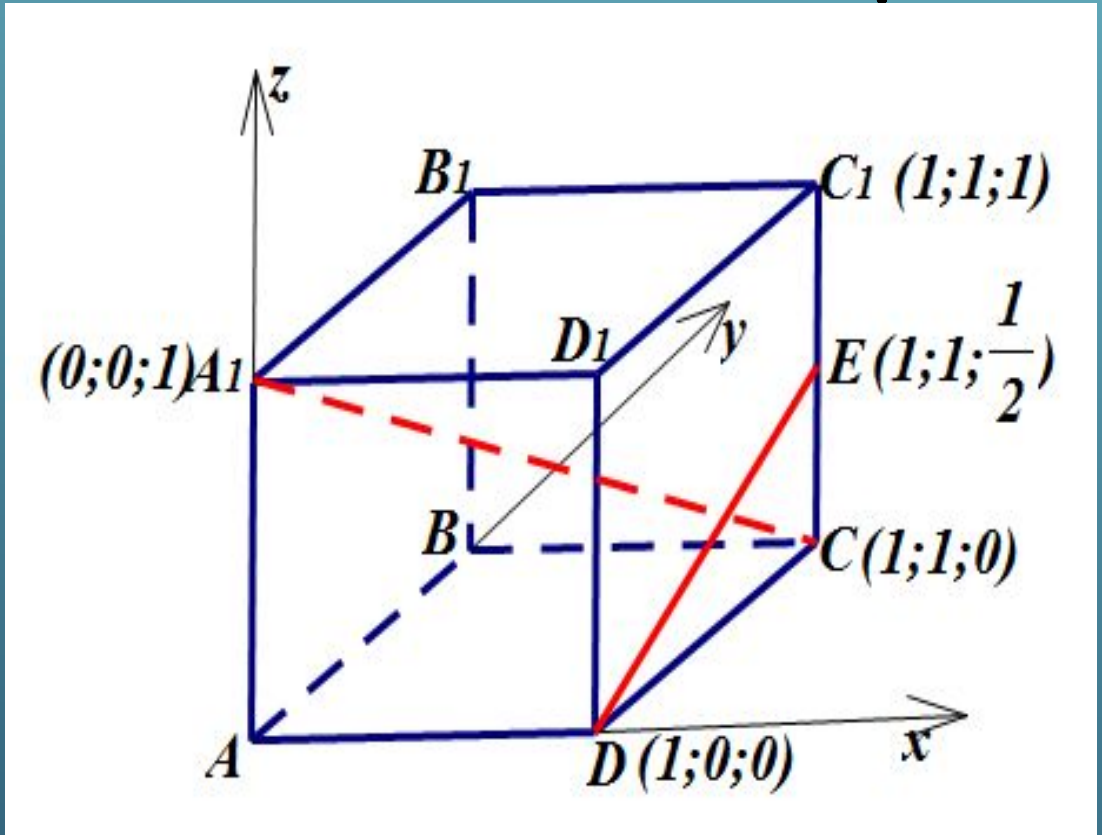
$\vec{a}\{x_1, y_1, z_1\}$

и $\vec{b}\{x_2, y_2, z_2\}$



$$\cos\alpha = \frac{\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|} = \frac{\left|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2\right|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

№1. В кубе ABCDA1B1C1D1 найдите угол между прямыми A_1C и DE, если E - середина ребра CC_1



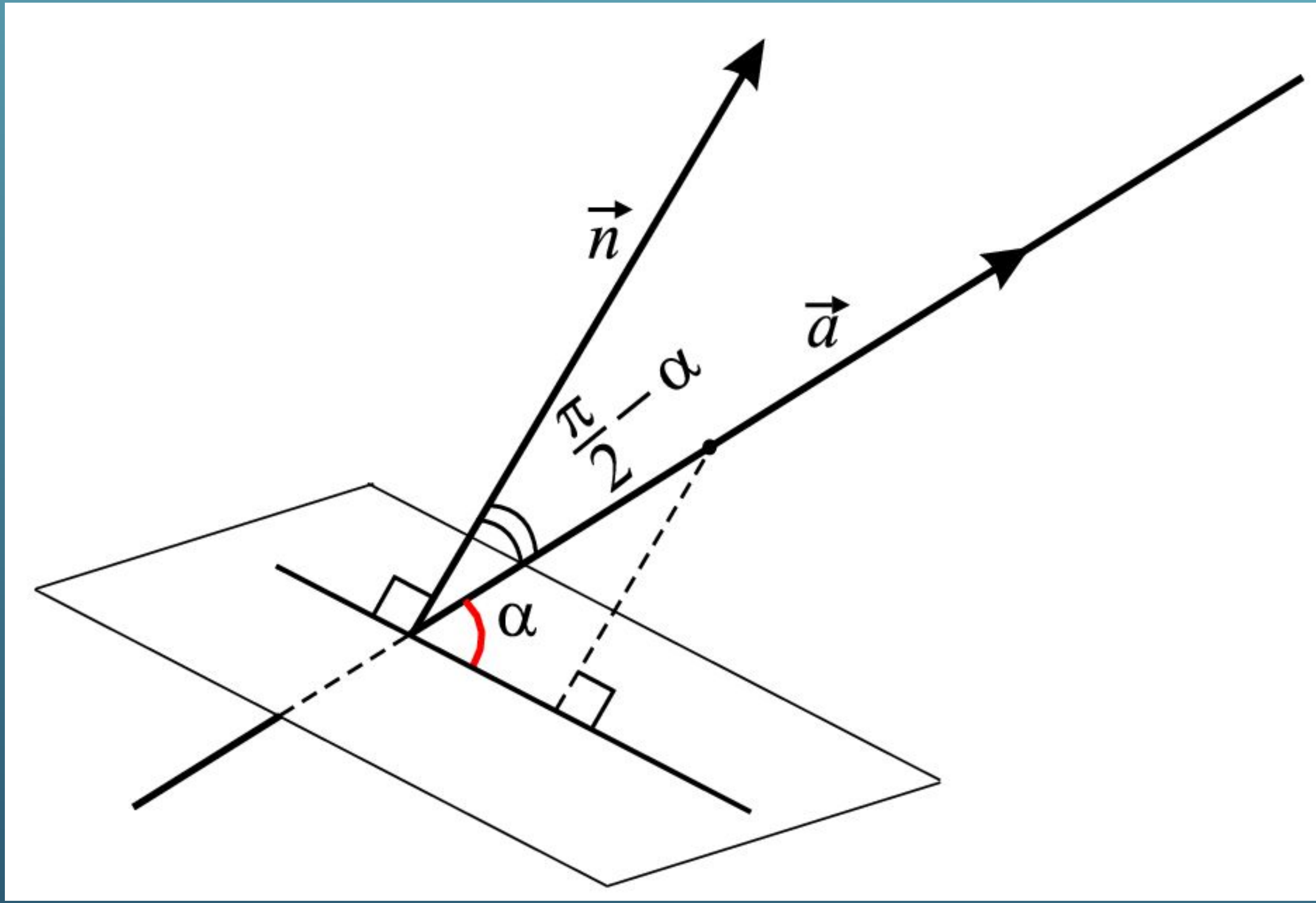
$$\overrightarrow{A_1C}\{1;1;-1\}$$

$$\overrightarrow{DE}\left\{0;1;\frac{1}{2}\right\}$$

$$\cos\alpha = \frac{|1\cdot 0 + 1\cdot 1 - 0{,}5|}{\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{15}}$$

Ответ: $arccos\ \frac{\sqrt{15}}{15}$

Угол между прямой и плоскостью



$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha=\frac{\left|\vec{a}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}$$

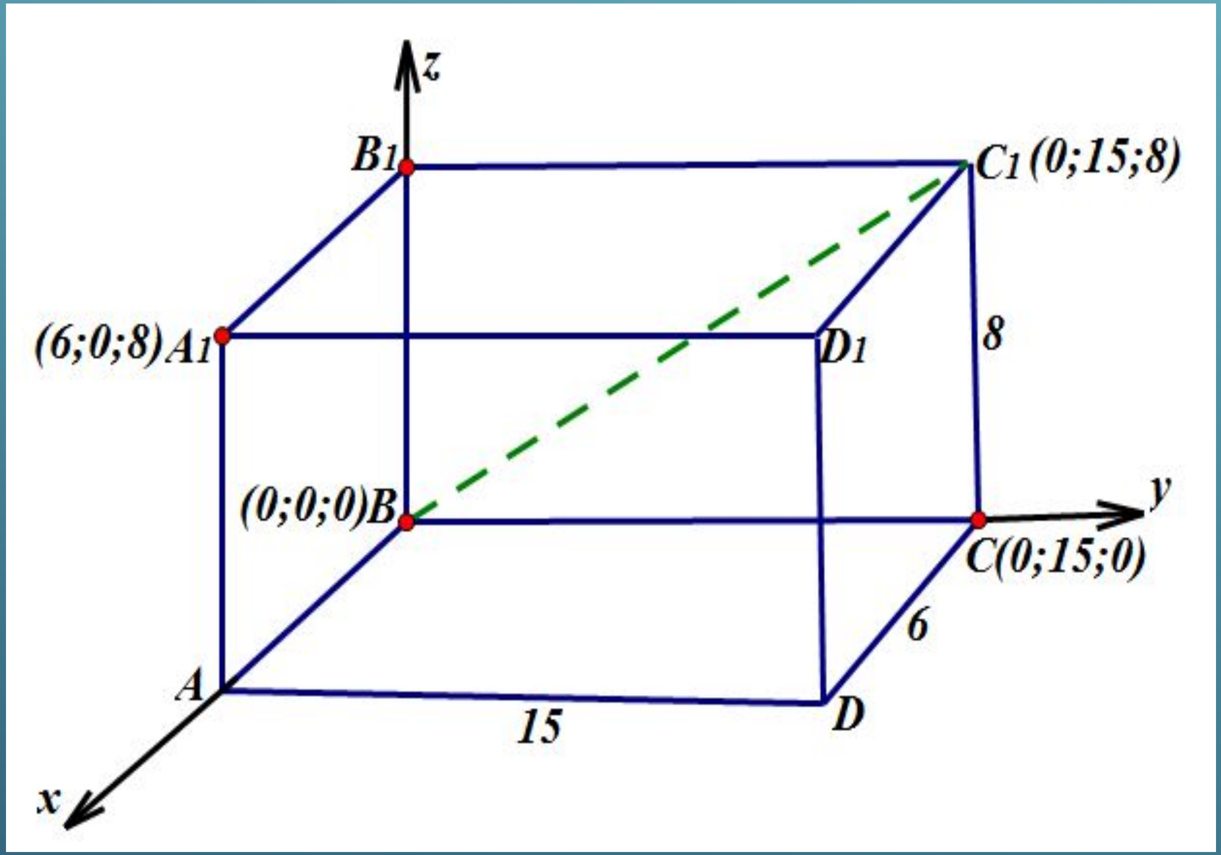
$\vec{a}$ – **направляющий вектор прямой**

$\vec{n}$ – **вектор нормали к плоскости**

Уравнение плоскости:
ax+by+cz+d=0

$\vec{n}\{a;b;c\}$

№2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостью A_1BC и прямой BC_1, если $AA_1 = 8$, $AB = 6$,



Уравнение плоскости: $ax+by+cz+d=0$ (1)

$B(0;0;0)$: $a0+b0+c0+d=0$, $d=0$

$A_1(6;0;8)$: $6a+b0+8c+0=0$, $6a+8c=0$

$C(0;15;0)$: $0a+15b+0c+0=0$, $15b=0$, $b=0$

$6a+8c=0$ $\quad a=-\frac{4}{3}c$

BA_1C: $4x-3z=0$ $\quad \vec{n}\{4;0;-3\}$

$\overrightarrow{BC_1}\{0;15;8\}$

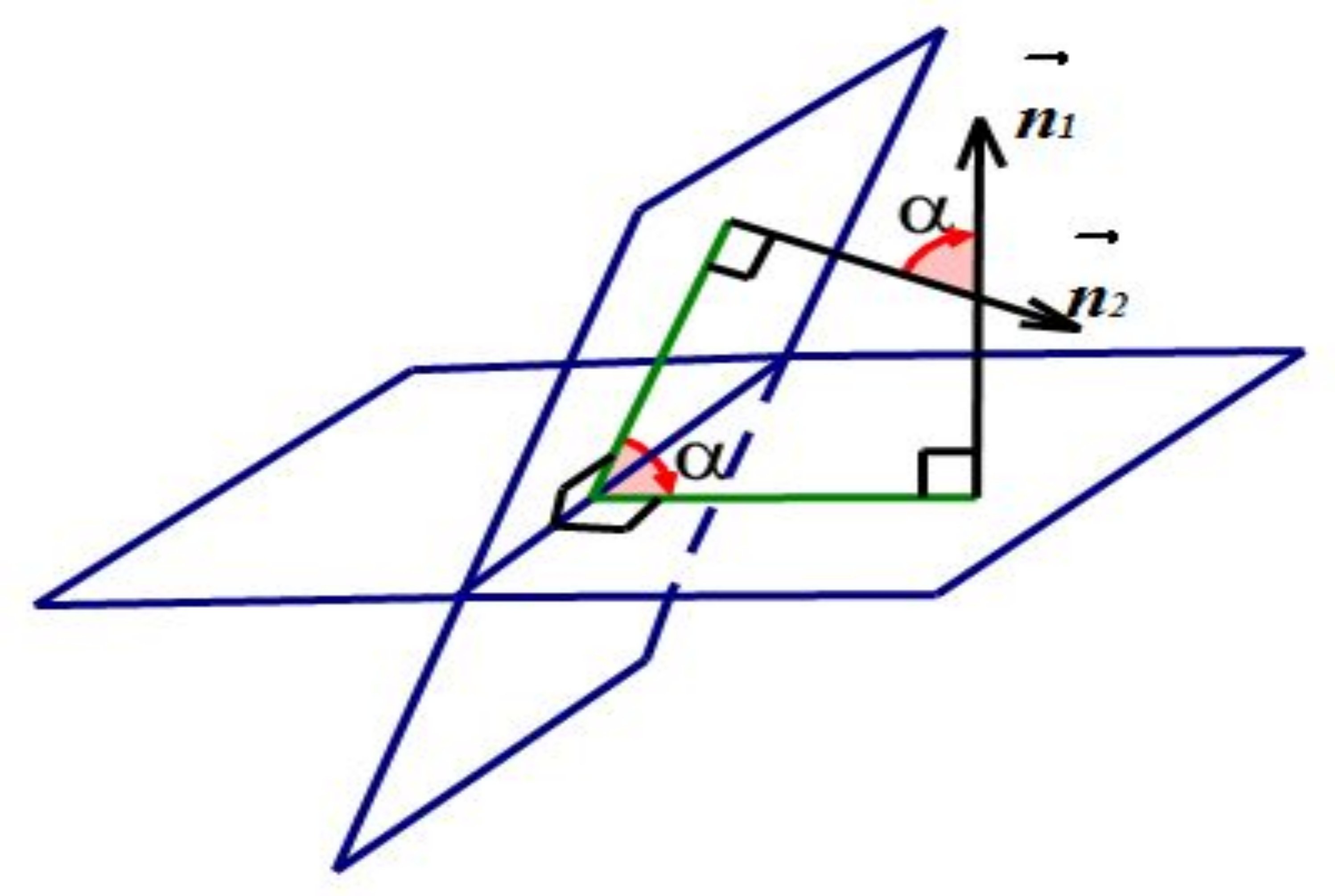
Пусть α – угол между BC_1 и плоскостью BA_1C

$$\sin\alpha=\frac{|-24|}{5\cdot 17}=\frac{24}{85}$$

$$\alpha=\arcsin\frac{24}{85}$$

Ответ: $\arcsin\frac{24}{85}$

Угол между поскостями

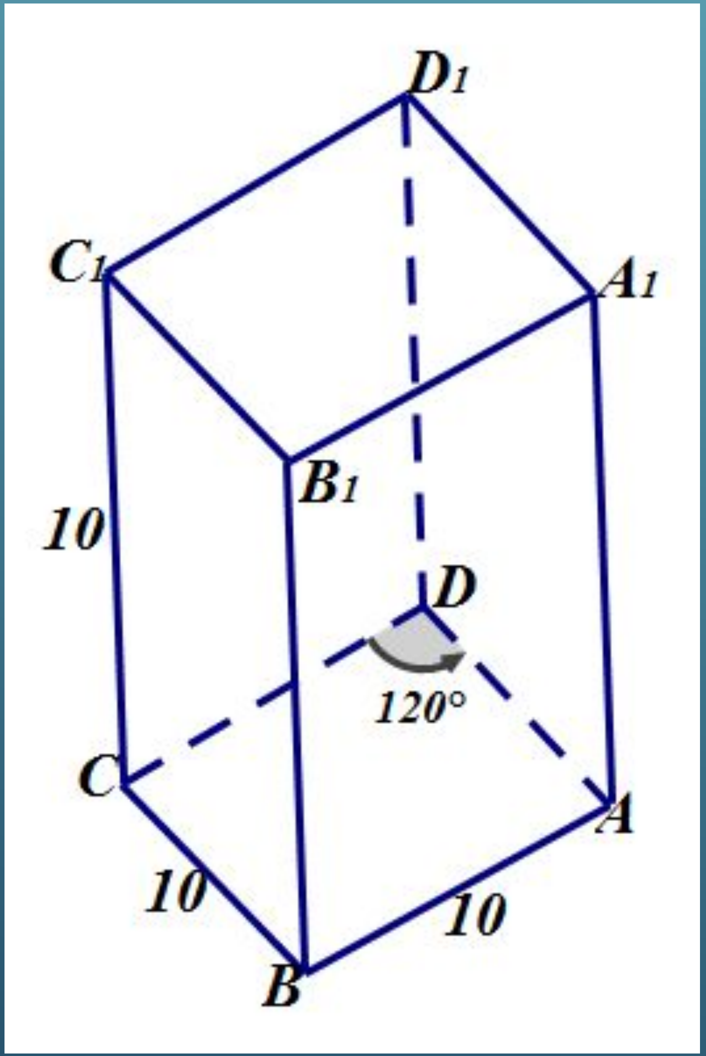


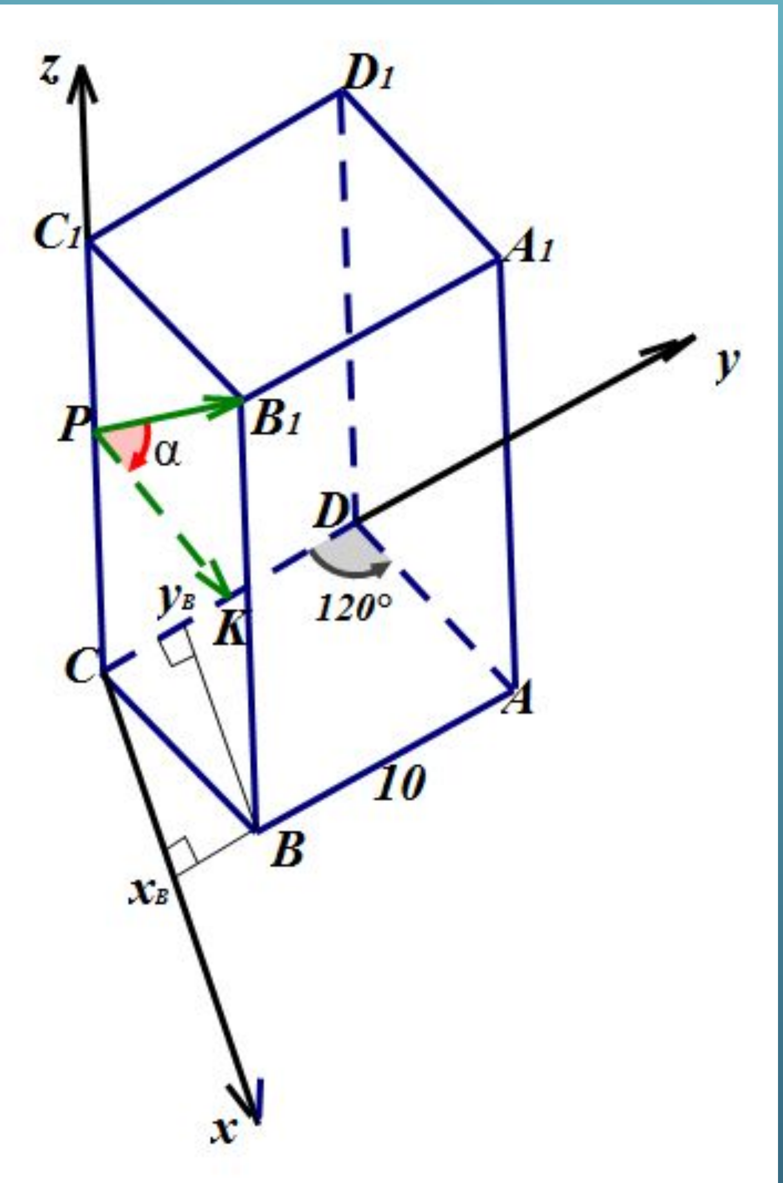
$$\cos\alpha = \frac{\left|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2\right|}{\left|\vec{n}_1\right| \cdot \left|\vec{n}_2\right|}$$

№3.Основанием прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является ромб с тупым углом B, равным 120°. Все ребра этой призмы равны 10. Точки P и K – середины ребер CC_1 и CD соответственно.

а) Докажите, что P K и PB_1 перпендикулярны.

б) Найдите угол между плоскостями PKB_1 и C_1B_1B.





а) C(0;0;0), C1(0;0;10), P(0;0;5), K(0;5;0),

B$(5\sqrt{3}; 5{,}0)$, B1$(5\sqrt{3}; 5; 10)$.

$$\overrightarrow{PK}\{0;5;-5\}, \overrightarrow{PB_1}\{5\sqrt{3};5;5\}$$

$$\cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{PK}\cdot\overrightarrow{PB_1}\right|}{\left|\overrightarrow{PK}\right|\cdot\left|\overrightarrow{PB_1}\right|} = \frac{\left|0\cdot 5\sqrt{3}+5\cdot 5+(-5)\cdot 5\right|}{\sqrt{0^2+5^2+(-5)^2}\cdot\sqrt{(5\sqrt{3})^2+5^2+5^2}} = 0$$

$$\alpha = 90^{\circ}$$

б) $\overrightarrow{n_1} \perp PKB_1 \Rightarrow \overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{PK}, \overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{PB_1}, \overrightarrow{n_1}\{x, y, z\}$

$$\begin{cases} \overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{PK} = 0 \\ \overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{PB_1} = 0 \end{cases} \begin{cases} 0 \cdot x + 5 \cdot y - 5 \cdot z = 0 \\ 5\sqrt{3}x + 5y + 5z = 0 \end{cases}$$

$$y = z, 5\sqrt{3}x + 5z + 5z = 0, 5\sqrt{3}x = -10z, x = \frac{-2z}{\sqrt{3}}$$

$$y = 1, z = 1, x = \frac{-2}{\sqrt{3}},$$

$$\boxed{\overrightarrow{n_1}\left\{\frac{-2}{\sqrt{3}};1;1\right\}}$$

$$\overrightarrow{n_2} \perp BC_1B_1 \Rightarrow \overrightarrow{n_2} \perp \overrightarrow{CC_1}, \overrightarrow{n_2} \perp \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{n_2}\{x, y, z\},$$

$$\overrightarrow{CC_1}\{0;0;10\}, \overrightarrow{CB}\{5\sqrt{3};5;0\}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{n_2} \cdot \overrightarrow{CC_1} = 0 \\ \overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \end{cases} \begin{cases} 0 \cdot x + 0 \cdot y + 10 \cdot z = 0 \\ 5\sqrt{3}x + 5y + 0z = 0 \end{cases} \quad \frac{\quad z = 0}{y = -\sqrt{3}x}$$

$$\overrightarrow{n_2}\{1;-\sqrt{3};0\}$$

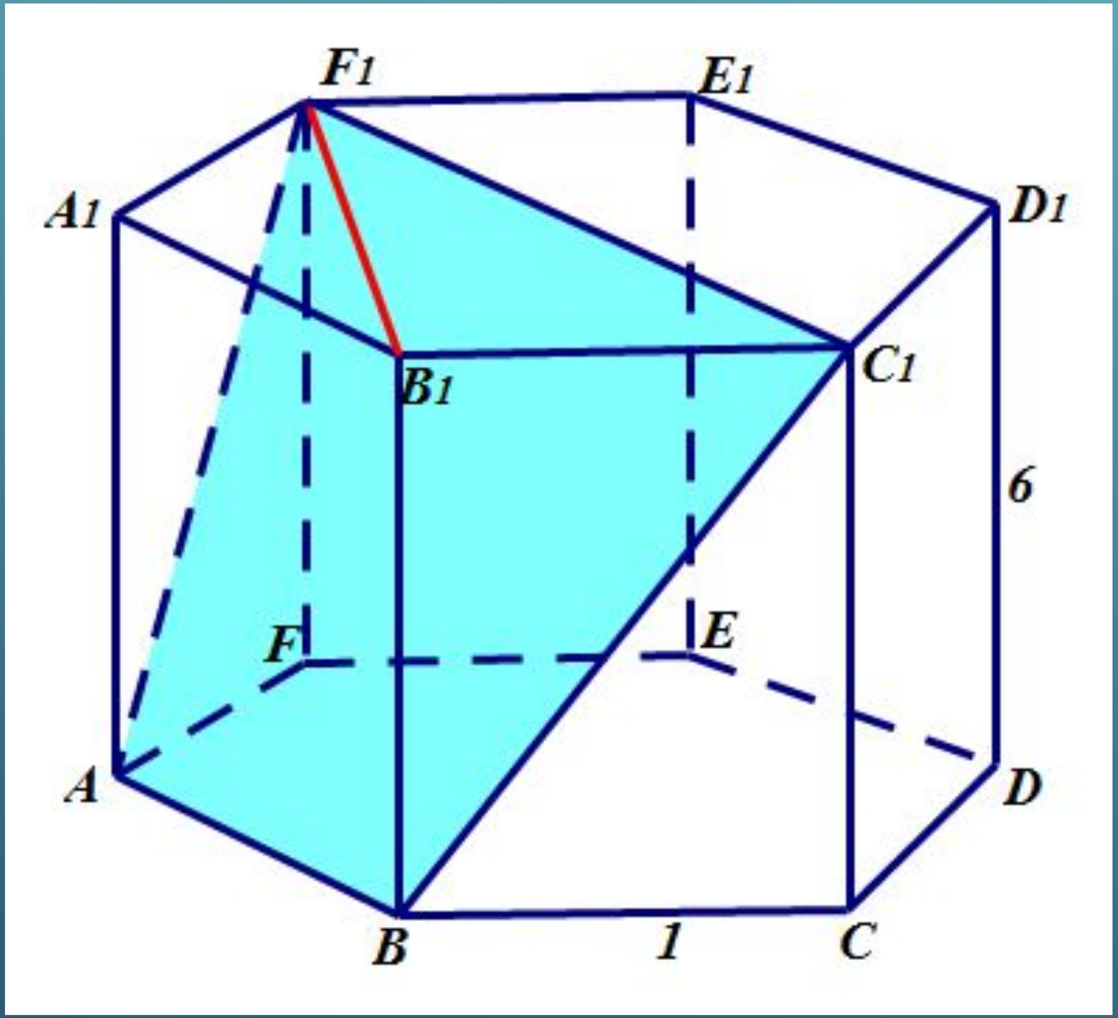
$$x = 1, y = -\sqrt{3}, z = 0$$

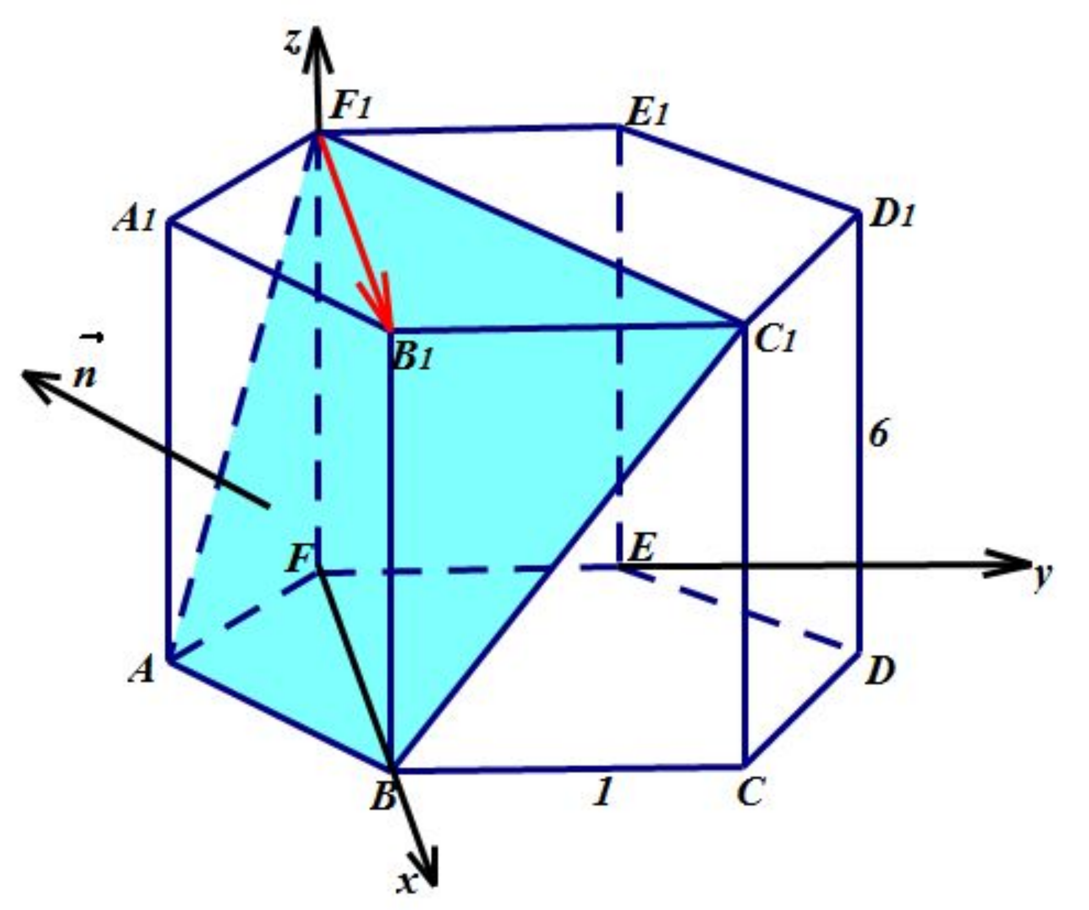
φ – *угол между плоскостями* BB_1C_1 *и* PKB_1

$$\cos\varphi = \frac{\left|1 \cdot \frac{-2}{\sqrt{3}} + 1 \cdot (-\sqrt{3}) + 1 \cdot 0\right|}{\sqrt{\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2 + 0^2}} = \frac{\frac{5\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{\frac{10}{3}}} = \frac{5}{2\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{4}$$

$$\varphi = \arccos\frac{\sqrt{10}}{4}$$

№5. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ сторона основания равна 1, а высота равна 6. Найдите угол между прямой B_1F_1 и плоскостью AF_1C_1.





$F(0;0;0), F_1(0;0;6)$

$\triangle ABF \quad AF = BF = 1 \quad \angle A = 120^\circ$

По теореме косинусов $BF^2 = AF^2 + AB^2 - 2 \cdot AF \cdot AB \cdot \cos A =$

$= 1+1-2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 120^\circ = 1+1+2 \cdot \frac{1}{2} = 3$, $BF = \sqrt{3}$

Аналогично находим EC, $EC = \sqrt{3}$

$B_1(\sqrt{3};0;6)$, $C_1(\sqrt{3};1;6)$

$\overrightarrow{F_1B_1}\{\sqrt{3};0;0\}$

$\vec{n} \perp BF_1C_1 \Rightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{BC_1}, \vec{n} \perp \overrightarrow{BF_1}, \vec{n}\{x,y,z\}$

$\overrightarrow{BC_1}\{0;1;6\}, \quad \overrightarrow{BF_1}\{-\sqrt{3};0;6\}$

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{BC_1} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BF_1} = 0 \end{cases} \begin{cases} 0 \cdot x + 1 \cdot y + 6 \cdot z = 0 \\ -\sqrt{3}x + 0 \cdot y + 6z = 0 \end{cases} \begin{cases} y = -6z \\ x = \dfrac{6z}{\sqrt{3}} \end{cases} \quad z =$$

$y = -6, x = \dfrac{6}{\sqrt{3}}, z = 1 \quad \vec{n}\left\{\dfrac{6}{\sqrt{3}}; -6; 1\right\}$

α – *угол между плоскостью* BF_1C_1 *и прямой* B_1F_1

$$\sin\alpha = \frac{\left|\sqrt{3}\cdot\frac{6}{\sqrt{3}}+0\cdot(-6)+0\cdot 1\right|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+0^2+0^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{6}{\sqrt{3}}\right)^2+(-6)^2+1^2}} = \frac{6}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{49}} = \frac{6}{7\cdot\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{7}$$

$$\boxed{\alpha = \arcsin\frac{2\sqrt{3}}{7}}$$