

# Лекция № 7

## **МЕХАНИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ**

**Волна** — процесс распространения возмущений некоторой физической величины в пространстве.

**Механическая волна** — процесс распространения возмущений в среде.

**Волновой процесс** — сложная модель движения частиц среды, которые не движутся вместе с волной, а колеблются около своих положений равновесия. Вместе с волной от частицы к частице передается лишь состояние колебательного движения и его энергия и импульс.

**Упругость** – свойство протяженной среды восстанавливать свою форму и объём (твёрдые среды) после прекращения действия внешних сил или других воздействий, вызывающих её деформирование. Среда, обладающая такими свойствами – **упругая среда**.

**Волновая поверхность** – геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе.

**Волновое поле** – область среды, приведенная в возмущенное состояние распространяющейся волной.

**Волновой фронт** – геометрическое место точек, до которых к данному моменту времени дошло возмущение (или граница, отделяющая волновое поле от невозмущенной области). Его форма определяет вид волны:

- **плоская,**
- **цилиндрическая,**
- **сферическая** и т.д.

# ***Виды механических волн***

По своей мерности волны подразделяют на **одномерные волны** (волны в стержнях, струнах и т.п.); **поверхностные волны**, возникающие на границах раздела сред (волны на поверхности водоема) и **пространственные волны**, распространяющиеся в любой неограниченной среде.

По направлению возмущения различают **продольные и поперечные волны**.

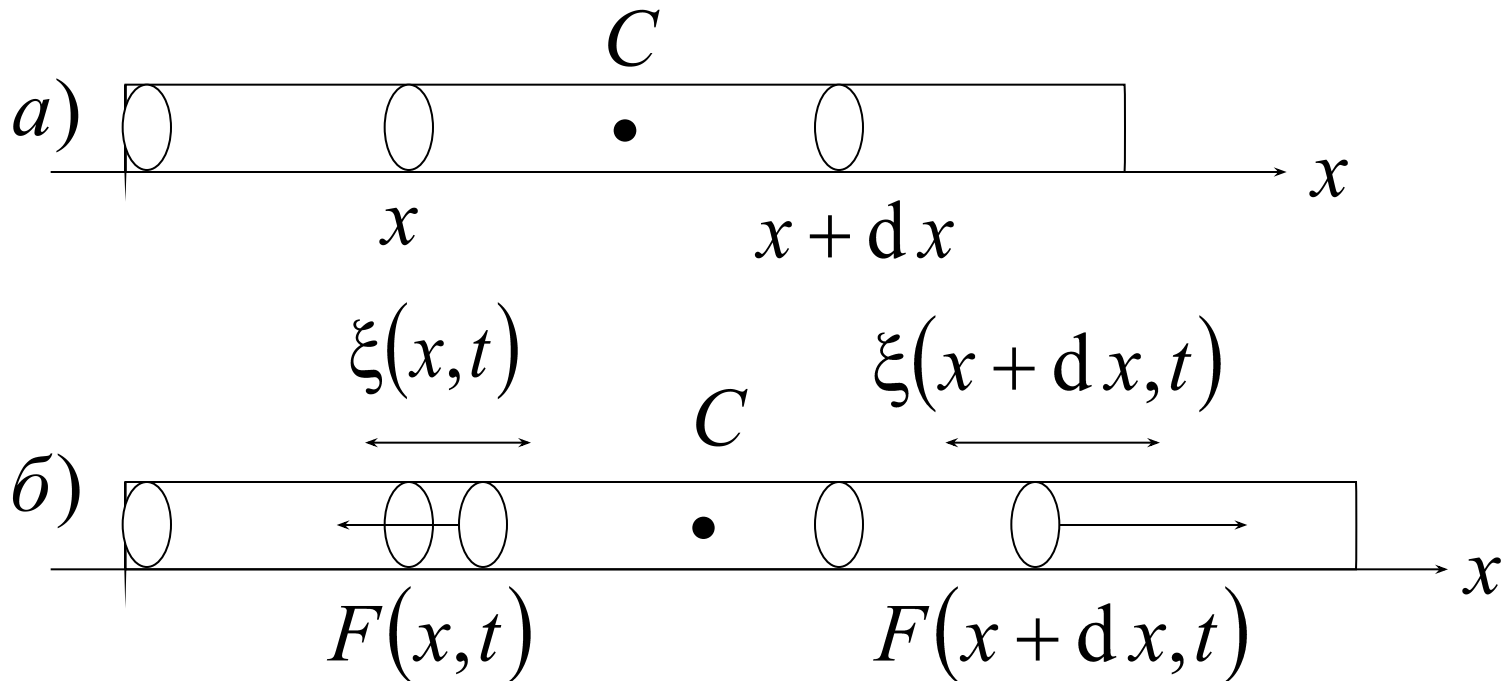
В **продольных волнах** возмущение направлено по направлению распространения волны (в жидких, твердых, газообразных средах). В **поперечных волнах** возмущение направлено перпендикулярно направлению распространения волны. К поперечным можно отнести поверхностные волны.

**Упругие волны** — процесс распространения механических возмущений в упругой среде (частный случай мех. волн).

Основное св-во всех **упругих волн** — **перенос энергии без переноса массы.**

# *Упругие волны в стержнях. Волновое уравнение*

Вдоль упругого стержня распространяется упругая волна.  $\xi(x, t)$  – смещение частицы стержня в момент времени  $t$



Основное ур-е динамики для элемента  $dx$ :

$$\rho S dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = F(x + dx, t) - F(x, t) \quad (7.1)$$

Здесь  $\rho$  – плотность материала,  $S$  – площадь поперечного сечения стержня,

$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$  – ускорение элемента.

Представим

$$F(x + dx, t) - F(x, t) \approx \frac{\partial F}{\partial x} dx \quad (7.2)$$

Напряжение в стержне

$$\sigma(x, t) = \frac{F(x, t)}{S} \quad (7.3)$$

Подставим (7.2) и (7.3) в (7.1):

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \quad (7.4)$$

Относительное удлинение элемента  
определяет величину деформации

$$\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (7.5)$$

С учетом (7.5)

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (7.6)$$

Подставив (7.6) в (7.4), получим **волновое уравнение**

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (7.7)$$

В (7.7) **скорость упругих волн в стержне**

$$v = \sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{d\sigma}{d\varepsilon}} \quad (7.8)$$

В случае линейно упругого материала стержня, подчиняющегося закону Гука  $\sigma = E\varepsilon$ ,  
*скорость продольных упругих волн в линейно-упругой среде*

$$v = \sqrt{E/\rho} \quad (7.9)$$

**Волновое уравнение,** описывающее распространение возмущения в неограниченной среде

$$\Delta \xi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (7.10)$$

где  $\xi(x, y, z)$  – смещение частиц среды,  $\Delta$  – оператор Лапласа.

В прямоугольной декартовой системе координат

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

*Скорость распространения поперечных упругих волн в неограниченной изотропной среде*

$$v = \sqrt{G/\rho}$$

где  $G$  – модуль сдвига среды,  $\rho$  – плотность среды.

# ***Плоская гармоническая волна, длина волны, фазовая скорость***

Если на торце полубесконечного стержня действует источник гармонических колебаний  $\xi = A \cos \omega t$ , по стержню будет распространяться **гармоническая волна:**  
*прямая волна*

$$\xi = A \cos \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) = A \cos \frac{\omega}{v} (vt - x) \quad (7.11)$$

*и обратная волна*

$$\xi' = A \cos \omega \left( t + \frac{x}{v} \right) = A \cos \frac{\omega}{v} (vt + x) \quad (7.12)$$

**Фазы волн**  $\Phi = \omega \left( t - \frac{x}{v} \right)$  и  $\Phi' = \omega \left( t + \frac{x}{v} \right)$

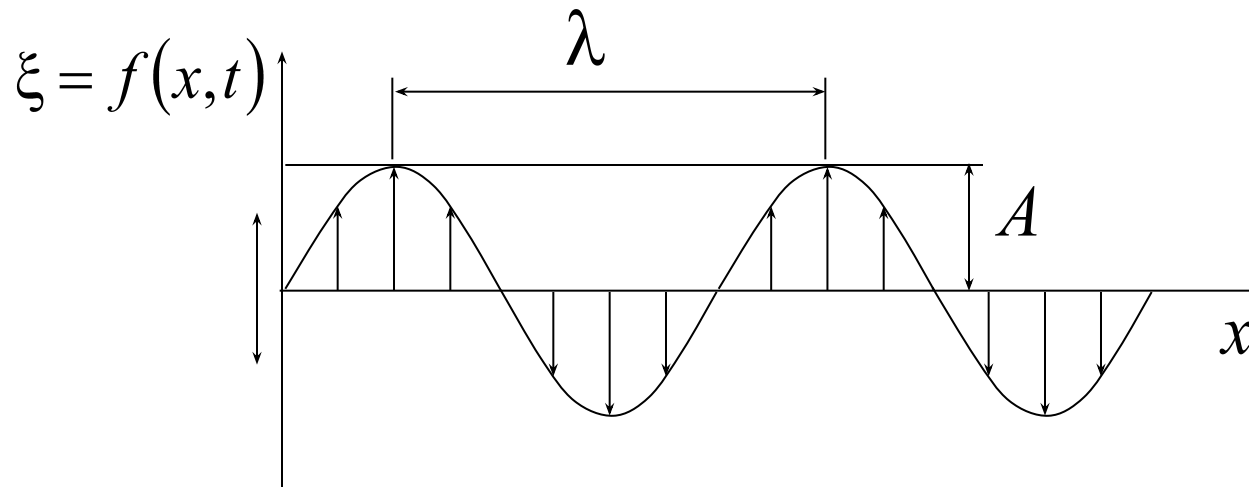
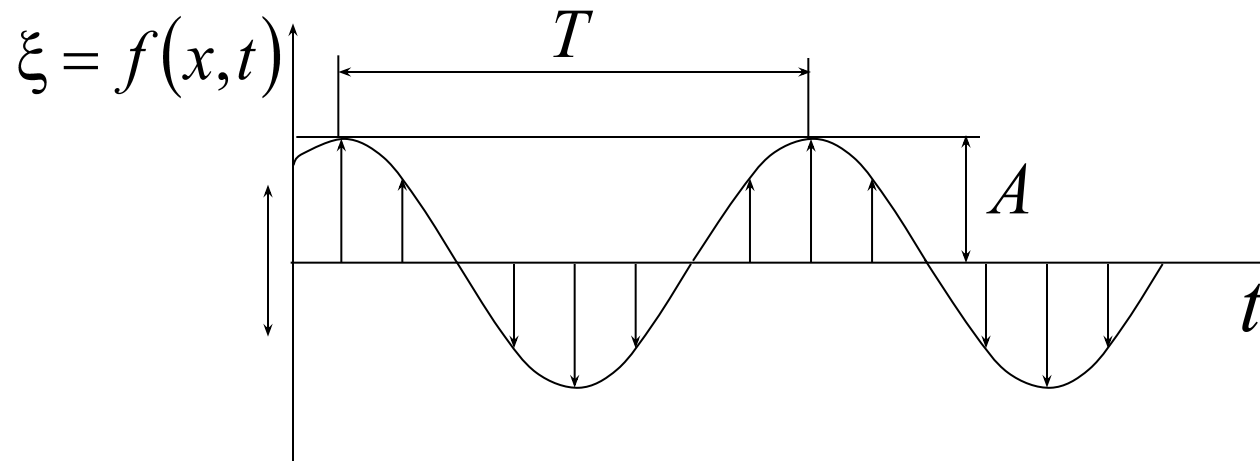
**Гармонические волны** создают такое волновое движение в данной точке, которое можно рассматривать как гармонические колебания частиц среды.

**Длина волны** – расстояние между двумя ближайшими точками среды, колеблющимися в одинаковой фазе

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = vT, \quad (7.13)$$

где  $\nu = \omega/(2\pi)$  – частота колебаний,  $T=1/\nu$  – период колебаний.

**Монохроматическая волна** —  
гармоническая волна, распространяющаяся  
с постоянной амплитудой  $A$  и частотой  $\omega$



**Решение ур-я (7.7) – ур-е плоской монохроматической волны, распространяющейся вдоль оси  $x$**

$$\xi(x, t) = A \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) + \varphi \right], \quad (7.14)$$

где  $A = \text{const}$ ,  $\omega = \text{const}$ ,  $\varphi$  – начальная фаза. Далее считаем  $\varphi=0$ . Уравнение прямой волны

$$\xi(x, t) = A \cos \left( \omega t - \frac{\omega}{v} x \right) = A \cos \left( \omega t - \frac{2\pi\nu}{v} x \right)$$

$$\xi(x, t) = A \cos(\omega t - k x),$$

где  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  – **волновое число**

Тогда **фаза волны**

$$\Phi = \omega t - k x \quad (7.15)$$

Откуда

$$x = \frac{1}{k} (\omega t - \Phi)$$

**Фазовая скорость** — скорость  
распространения фазы

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = 2\pi\nu \frac{\lambda}{2\pi} = \lambda\nu = v \quad (7.16)$$

# *Сферические волны*

*Самостоятельно*

Продольная волна является сферической, если

$$\xi(r, t) = \frac{1}{r} f_1(\upsilon t - r) + \frac{1}{r} f_2(\upsilon t + r) \quad (7.17)$$

где  $f_1$  и  $f_2$  относятся к расходящимся и сходящимся сферическим волнам соответственно. Если в центре волны расположен источник гармонических колебаний  $\xi = A \cos \omega t$ , то уравнение расходящейся гармонической волны:

$$\xi(r, t) = \frac{A}{r} \cos(\omega t - k r)$$

# ***Объемная плотность энергии волны***

Плоская волна распространяется в упругой среде, плотность которой  $\rho$

$$\xi = A \cos(\omega t - k x) \quad (7.18)$$

Скорость

$$u = \frac{\partial \xi}{\partial t} = -A \omega \sin(\omega t - k x) \quad (7.19)$$

и деформация

$$\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x} = A k \sin(\omega t - k x) \quad (7.20)$$

всех частиц в пределах выделенного объема  $\Delta V$  одинаковы.

Кинетическая  $\Delta E_k$  и потенциальная  $\Delta E_p$  энергии частиц объема  $\Delta V$ :

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} \rho u^2 \Delta V \quad (7.21)$$

$$\Delta E_p = \frac{E \varepsilon^2}{2} \Delta V = \frac{1}{2} \rho v^2 \varepsilon^2 \Delta V \quad (7.22)$$

где  $v = \sqrt{E/\rho}$

$$\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_p = \frac{1}{2} \rho [u^2 + v^2 \varepsilon^2] \Delta V \quad (7.23)$$

$$\Delta E = \frac{1}{2} \rho \left[ \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + v^2 \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right] \Delta V$$

или с учетом (7.19), (7.20) и (7.16) выражение (7.23) примет вид

$$\Delta E = \rho A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx) \Delta V \quad (7.24)$$

***Объемная плотность энергии***

$$w = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta E}{\Delta V} = \frac{dE}{dV} \quad (7.25)$$

Согласно (7.24) и (7.25) **объемная плотность энергии упругой волны**

$$w = \rho A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx) \quad (7.26)$$

Среднее значение плотности энергии за период

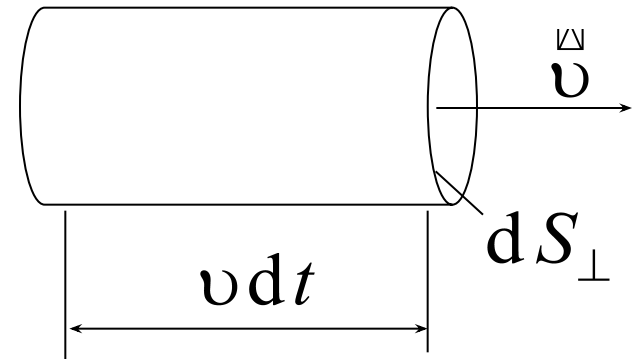
$$\langle w \rangle = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 \quad (7.27)$$

Выражение (7.27) показывает, что *волна переносит энергию*; все частицы среды получают энергию в результате распространения волны.

# ***Вектор Умова – вектор плотности потока энергии***

**Плотность потока энергии** – *поток энергии через единичную площадку  $dS_{\perp}$ , перпендикулярную к направлению переноса энергии*

$$j = \frac{dE}{dS_{\perp} dt}, \quad [j] = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2 \text{с}}$$



Бегущая волна переносит с собой энергию. За время  $dt$  волна распространится на расстояние  $v dt$ . За  $dt$  через малую площадку  $dS_{\perp}$ , перпендикулярную скорости волны пройдут только те возмущения, которые

находятся в объеме  $dV = v dt dS_{\perp}$ , перенеся с собой заключенную в нём энергию:

$$dE = w dV = w dS_{\perp} v dt = j dS_{\perp} dt,$$

где  $j = wv$

Для определения направления плотности потока энергии вводят **вектор Умова**

$$\vec{j} = w\vec{v} \quad (7.28)$$

$\vec{v}$  – вектор скорости, нормальной к волновой поверхности в данном месте.

Поток энергии сквозь поверхность  $S$  равен потоку вектора  $\vec{j}$  сквозь эту поверхность.

Поток энергии  $\Phi$  через произвольную поверхность  $S$ :

$$\Phi = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_S j_n dS$$

где  $j_n$  – проекция вектора Умова на нормаль к поверхности.

*Среднее во времени значение плотности потока энергии называется*  
**ИНТЕНСИВНОСТЬЮ ВОЛНЫ**

$$I = \langle j \rangle = \langle w \rangle v$$

Единица интенсивности в СИ – ватт на квадратный метр (Вт/м<sup>2</sup>)

# ***Когерентные волны.***

## ***Интерференция волн. Стоячая волна***

**Когерентные волны** — монохроматические волны одинаковой частоты. У таких волн разность фаз  $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$  не меняется во времени ( $\Delta\Phi = \text{const}$ ).

**Интерференция волн** — результат суперпозиции когерентных волн. В зависимости от  $\Delta\Phi$  в пространстве происходит устойчивое во времени взаимное усиление или ослабление волн, т.е. происходит перераспределении энергии в

*пространстве; возникает устойчивая картина распределения амплитуды результирующего колебания с характерным чередованием максимумов и минимумов.*

**Стоячая волна** — частный случай интерференции волн, результат сложения двух гармонических волн с одинаковыми амплитудами и частотами, распространяющихся вдоль оси  $x$  в противоположных направлениях. Например, *наложение прямой и обратной волны*. При  $\varphi = 0$  ур-я этих волн:

$$\xi_1 = A \cos(\omega t - k x) \quad \xi_2 = A \cos(\omega t + k x)$$

Ур-е стоячей волны

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A \cos kx \cos \omega t = A_{\text{ст}} \cos \omega t, \quad (7.29)$$

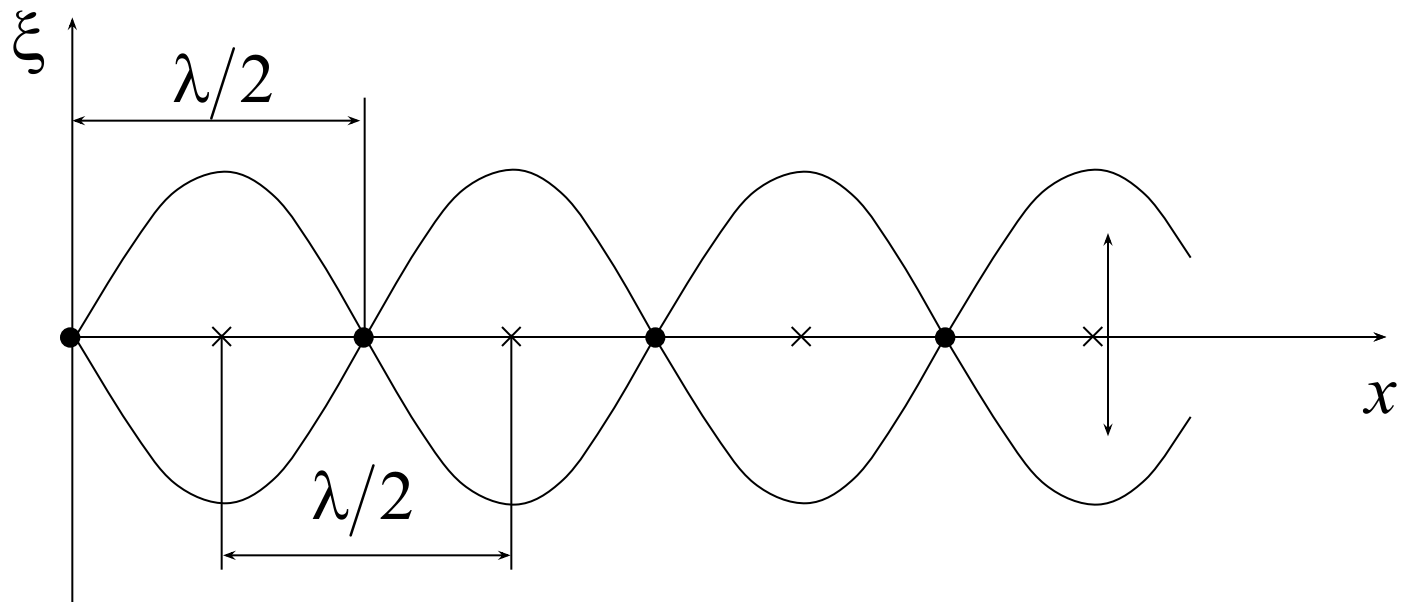
где  $A_{\text{ст}} = 2A \cos kx$  – амплитуда стоячей волны.

$$A_{\text{ст}}^{\text{max}} = 2A \quad \text{при} \quad |\cos kx| = 1$$

$$kx = \frac{2\pi}{\lambda} x = \pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Откуда координаты точек, в которых расположены **пучности** стоячей волны (амплитуда колебаний в них максимальна):

$$x_n = n \frac{\lambda}{2}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$



• — узлы

× — пучности

$$A_{\text{ст}}^{\min} = 0 \quad \text{при} \quad \cos(kx) = 0$$

$$kx = \frac{2\pi}{\lambda}x = (2n + 1)\frac{\pi}{2}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

**Узлы** стоячей волны, амплитуда колебаний в которых минимальна, имеют координаты:

$$x_n = (2n + 1)\frac{\lambda}{4}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Расстояние между двумя ближайшими узлами (и пучностями)

$$\Delta = x_{n+1} - x_n = \lambda/2$$

$$\Delta = \lambda/2$$

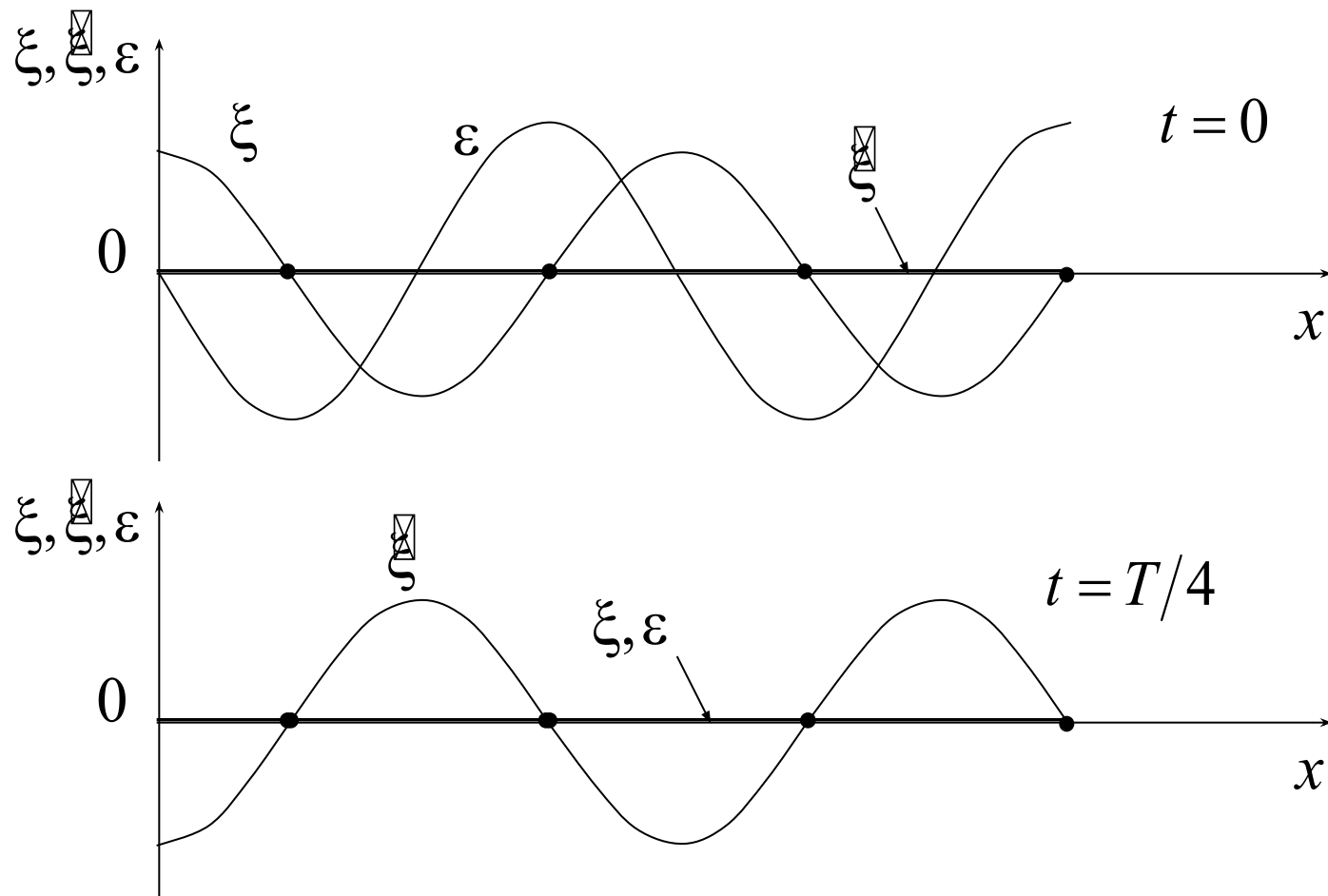
*Между двумя соседними узлами все точки среды колеблются синфазно, при переходе же через узел фаза изменяется на  $\pi$ .*

*Узлы смещения как бы разделяют среду на автономные области, в которых гармонические колебания совершаются независимо.*

*В стоячей волне нет переноса возмущения вдоль оси  $x$ , в отличие от бегущей волны. Отсюда – название волны. Формула стоячей волны (7.22) также является решением волнового уравнения (7.7)*

*В стоячей волне*

$$\xi = -2A\omega \cos kx \sin \omega t$$
$$\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x} = -2Ak \sin kx \cos \omega t$$



Это тоже стоячие волны, причем они сдвинуты относительно друг друга по фазе на  $\pi/2$  как в пространстве, так и во времени.