ВоГТУ

Лекция 4

Колебания и волны

Кузина Л.А.,
к.ф.-м.н.,
доцент

2015 г.

План

1. Колебательные процессы. Гармонические колебания. Понятие о спектральном разложении.
2. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний.
3. Пружинный, физический и математический маятники.
4. Энергия гармонического осциллятора.
5. Сложение колебаний.

   5a. Сложение колебаний одинаковой частоты, происходящих вдоль одной прямой.

   5b. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний одинаковой частоты.

   5c. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний кратных частот. Фигуры Лиссажу.

1. Затухающие колебания.
2. Вынужденные колебания.
3. Упругие волны. Основные понятия.
4. Дифференциальное уравнение волны.
5. Стоячие волны.
6. Скорость упругих волн.
7. Энергия волны. Групповая скорость. Вектор плотности потока энергии (вектор Умова). Интенсивность волны.
8. Элементы акустики.
9. Эффект Доплера для звуковых волн.

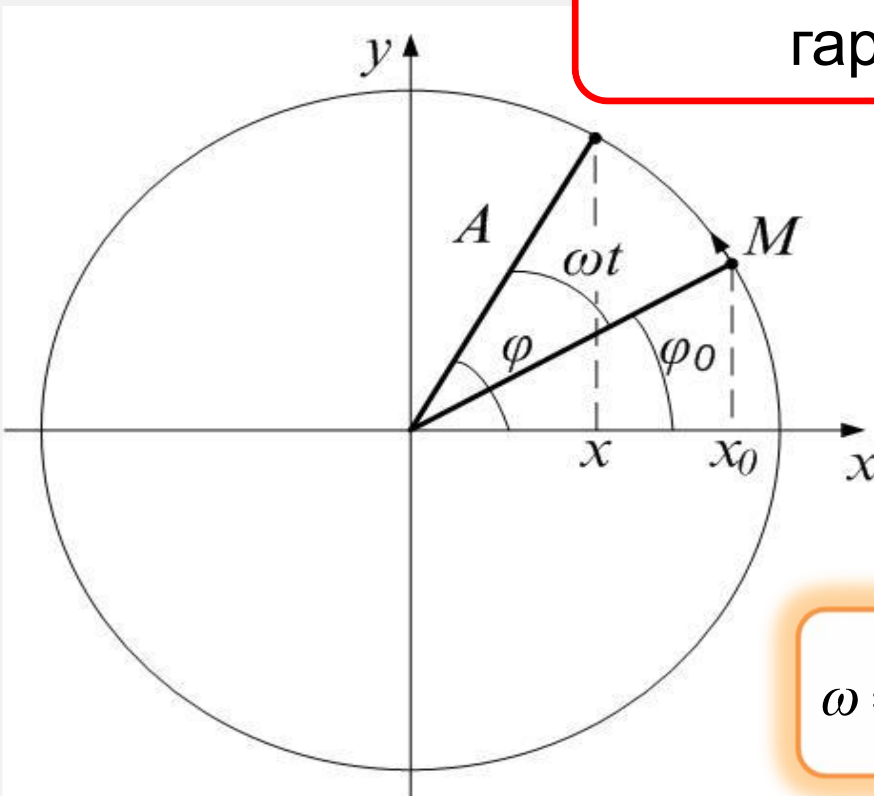
Колебательные процессы. Гармонические колебания

Колебания

Любой процесс, повторяющийся во времени, является колебательным

Гармонические колебания

Колеблющаяся величина изменяется по гармоническому закону (sin, cos)



$$x = A\cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

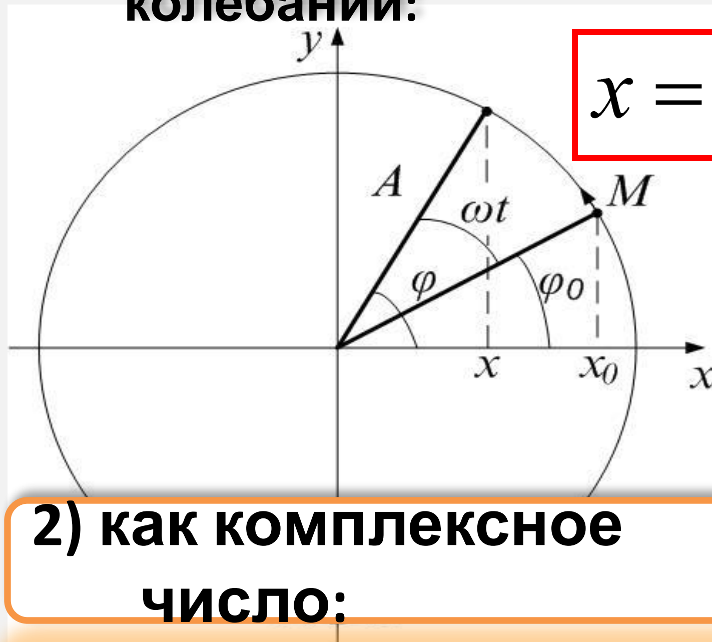
A - амплитуда

$\varphi = (\omega \cdot t + \varphi_0)$ - фаза

φ_0 - начальная фаза

$\omega = 2\pi\nu = \dfrac{2\pi}{T}$ - круговая частота

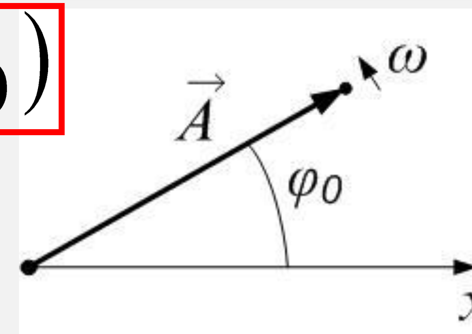
Представление гармонических колебаний:



1) по методу векторных диаграмм :

$$x = A\cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

$$\Leftrightarrow$$



2) как комплексное число:

$$S = Ae^{i(\omega \cdot t + \varphi_0)}$$

по формуле Эйлера:

$$S = Ae^{i(\omega \cdot t + \varphi_0)} = A\{\cos(\omega \cdot t + \varphi_0) + i\sin(\omega \cdot t + \varphi_0)\}$$

$$x = \operatorname{Re} S = A\cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

$$y = \operatorname{Im} S = A\sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

Понятие о спектральном разложении. Ряд Фурье

<u>Теорема Фурье</u>:

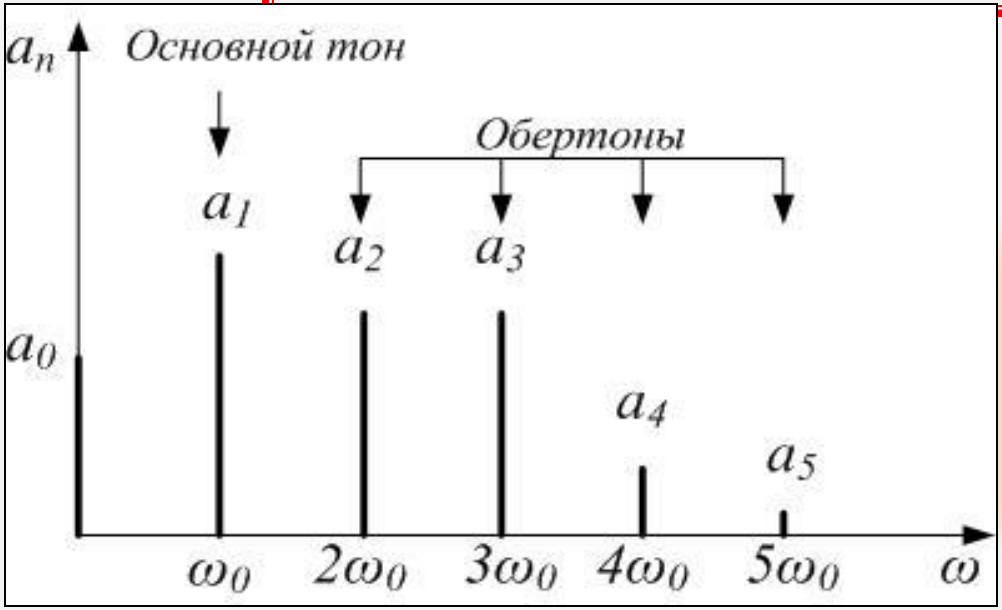
любую периодическую функцию можно представить в виде ряда Фурье

(разложить по гармоническим составляющим)

$$f(t) = f(t+T)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

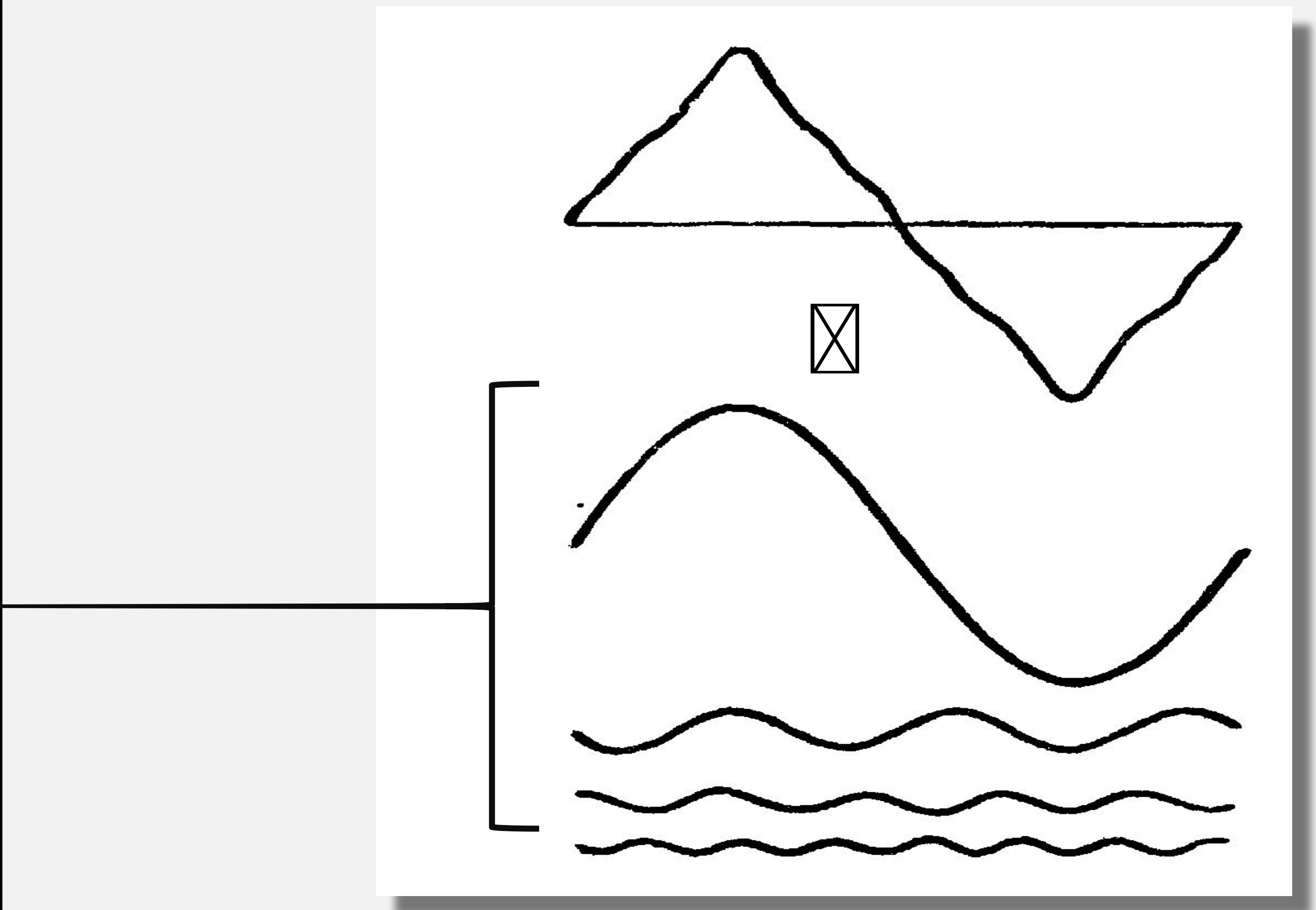
$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + b_n \cdot \sin(n\omega_0 t)\right)$$

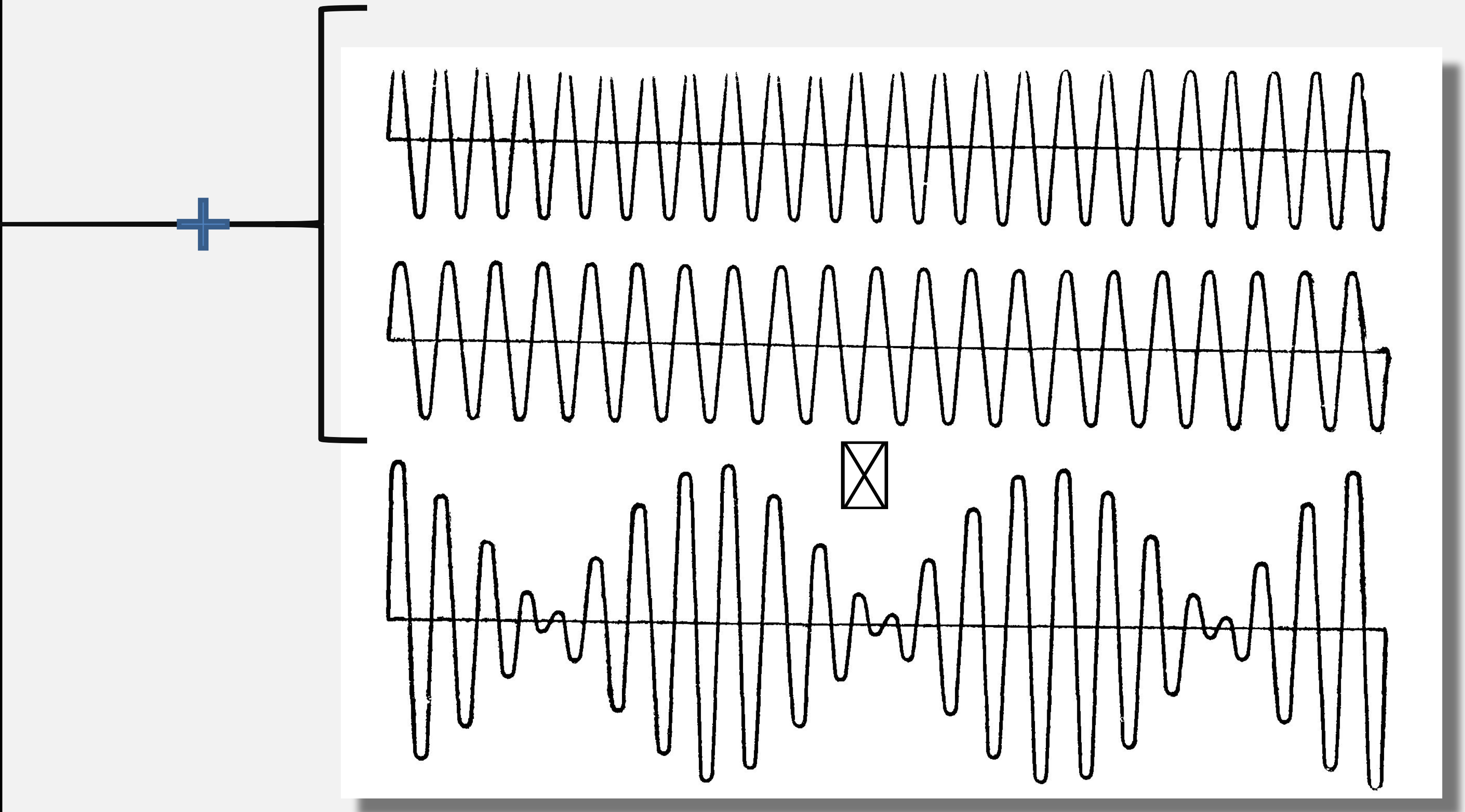


Для чётной функции:

$$f(t) = f(-t) \quad \Rightarrow \quad b_n = 0$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cdot \cos(n\omega_0 t)\right)$$





Дифференциальное уравнение гармонических колебаний

$$x = A\cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

$$\upsilon = x' = -\omega \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

$$a = x'' = -\omega^2 A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0) = -\omega^2 x$$

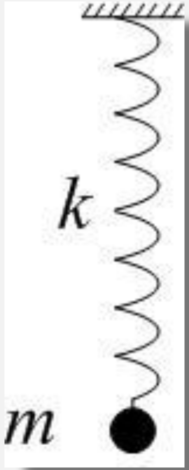
$$x'' + \omega^2 x = 0$$

Решение этого дифференциального уравнения – гармоническая функция:

Сила пропорциональна смещению (квазиупругая, возвращающая)

$$F = ma = -m\omega^2 x = -kx$$

$$k = m\omega^2$$



Колебательные системы:
1) пружинный маятник

$$\begin{cases} F = ma = mx'' \\ F = -kx \end{cases} \Rightarrow \boxed{mx'' = -kx}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{x'' + \frac{k}{m}x = 0}$$

$$\boxed{x'' + \omega^2 x = 0}$$

$$\boxed{\omega^2 = \frac{k}{m}}$$

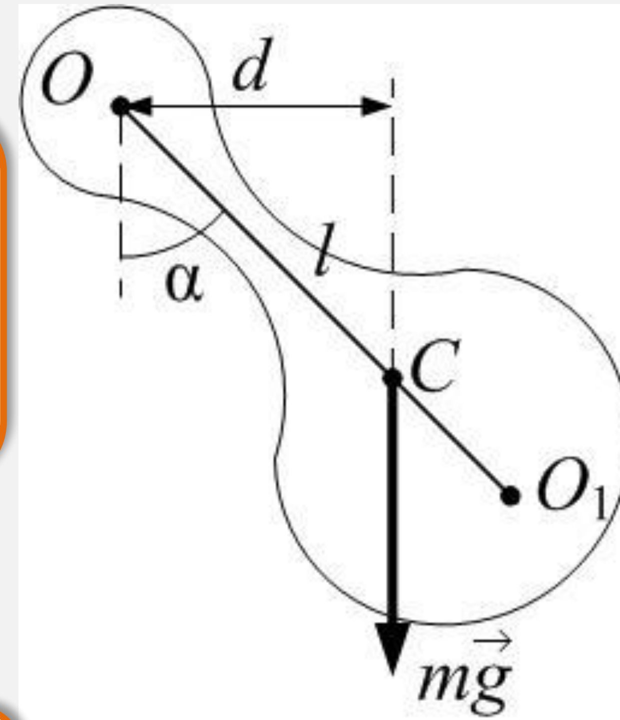
$$\boxed{x = A\cos(\omega \cdot t + \varphi_0)}$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Колебательные системы: 2) Физический маятник

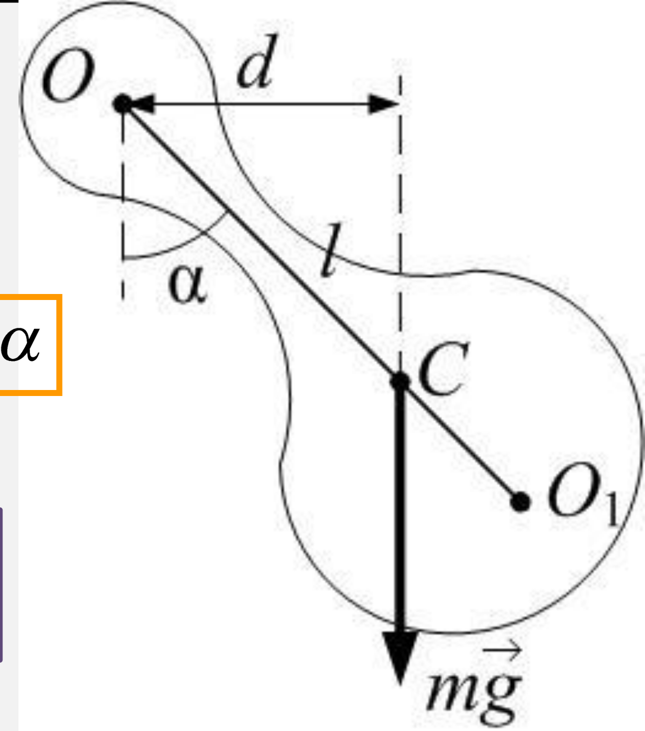
Физический маятник – твёрдое тело, способное колебаться в поле силы тяжести относительно оси, не проходящей через центр масс



$d = l \cdot \sin\alpha$ – плечо силы тяжести;

l – длина физического маятника (расстояние от точки подвеса до центра масс)

$d = l \cdot \sin\alpha$ – плечо силы тяжести;
l – длина физического маятника



Момент силы тяжести:

$$M = mg \cdot d = mg \cdot l \cdot \sin\alpha$$

Для малых углов $(\sin\alpha \approx \alpha)$
в проекциях на ось вращения:

$$M = -mg \cdot l \cdot \alpha$$

$$\varepsilon = \frac{M}{I}$$

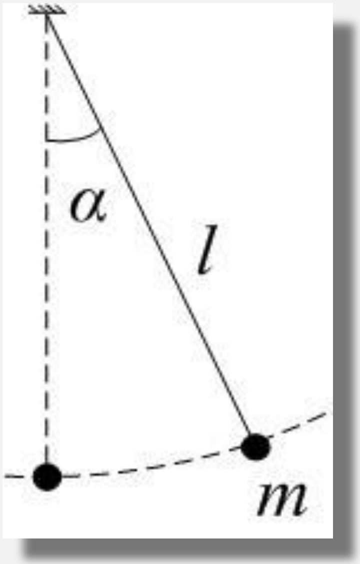
$$\varepsilon = \alpha''$$

$$M = I\varepsilon = I\alpha''$$

$$\alpha'' + \frac{mg \cdot l}{I} \cdot \alpha = 0$$

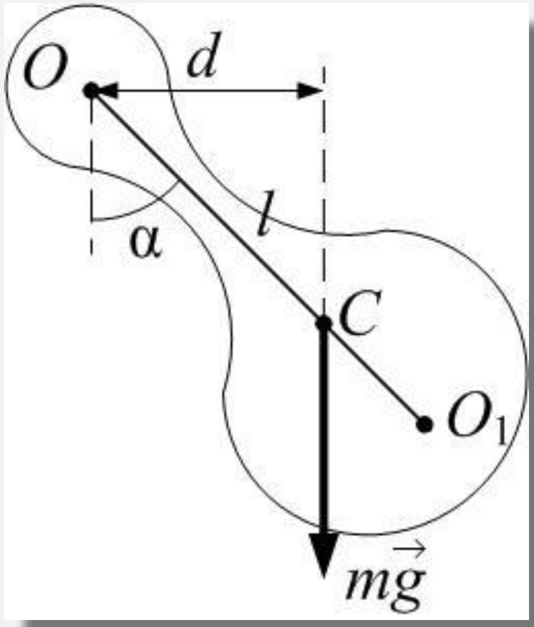
<u>Колебательные системы</u>: 3) Математический маятник

Математический маятник - материальная точка (тело, размерами которого можно пренебречь), подвешенная на нерастяжимой невесомой нити



Математический маятник - частный случай физического

Приведённая длина физического маятника – это длина такого математического маятника, который имеет тот же период колебаний:



По теореме Штейнера:

Энергия гармонического осциллятора

Полная энергия:

$$\upsilon = x' = -\omega \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

$$k = m\omega^2$$

Полная энергия сохраняется; переходит из кинетической в потенциальную и обратно

Максимальные значения:

Средние значения:

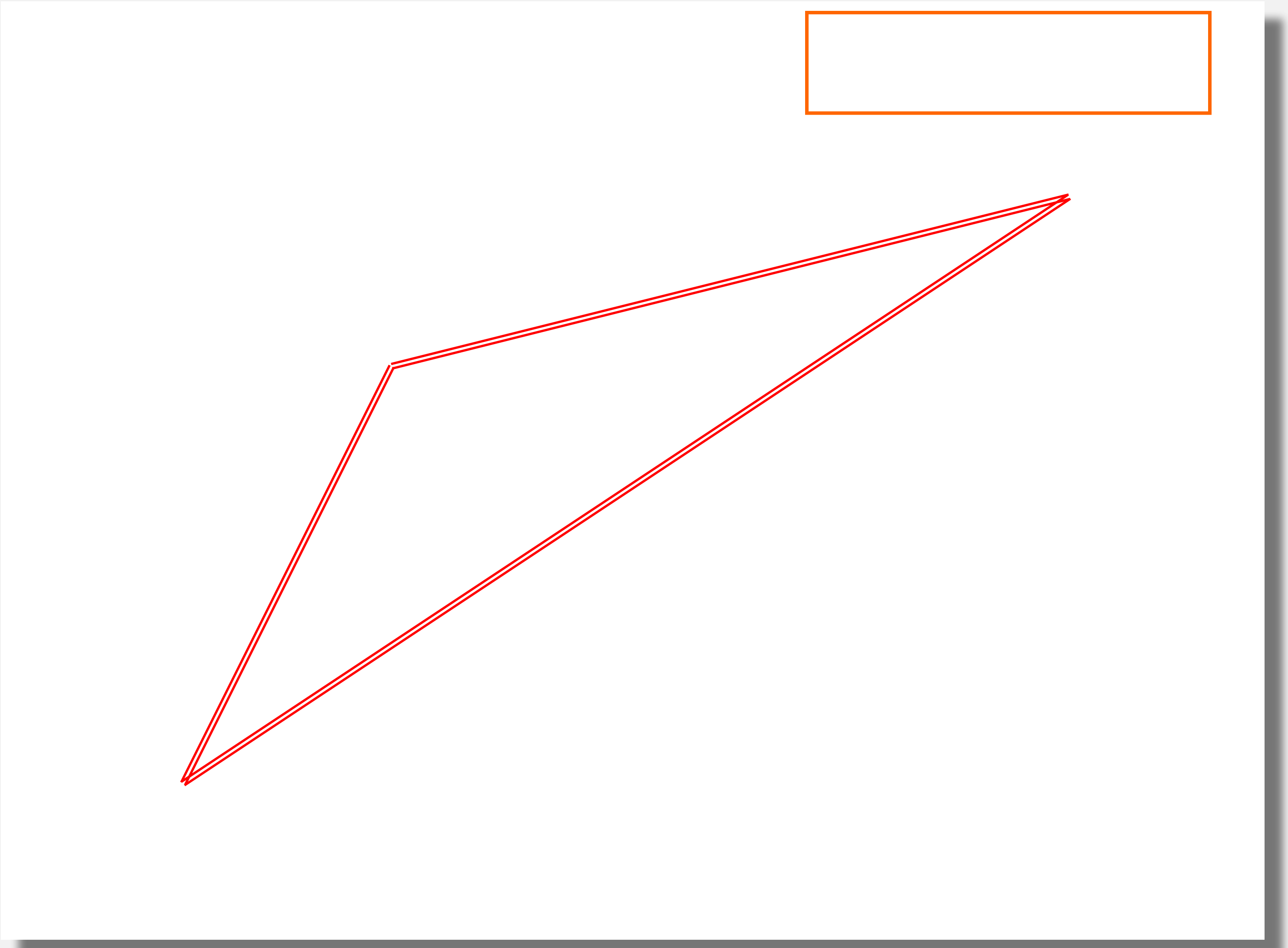
Сложение колебаний одинаковой частоты, происходящих вдоль одной прямой (по методу векторных диаграмм)

Точка одновременно участвует в двух колебаниях одинаковой частоты:

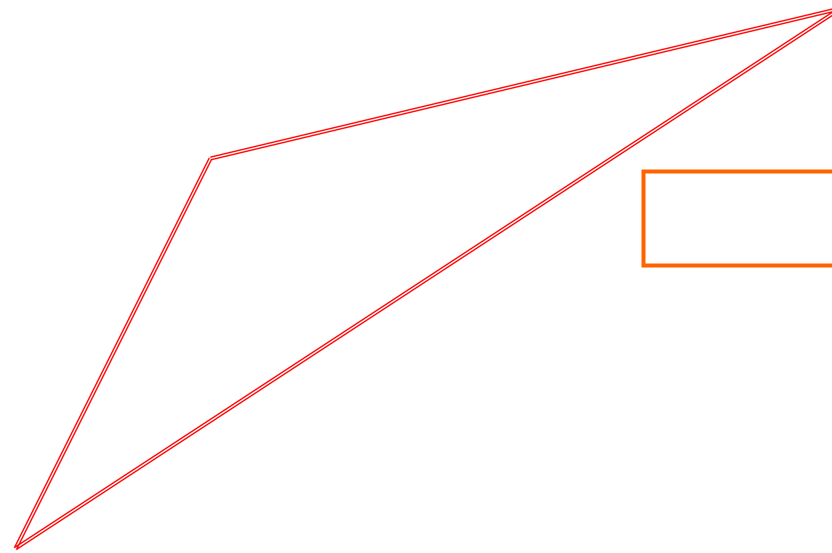
Результирующее колебание имеет ту же частоту:

Задача – определить амплитуду и начальную фазу результирующего колебания

Метод векторных диаграмм



Метод векторных диаграмм



По теореме косинусов:

Сложение взаимно перпендикулярных колебаний одинако

$\Rightarrow$

Сложение взаимно перпендикулярных колебаний одинаковой частоты

$\Rightarrow$

В общем случае это уравнение эллипса:

Частные случаи

1)

$\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow$

2)

$\Rightarrow$

Частные случаи

3) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$

Сложение взаимно перпендикулярных колебаний кратных частот (частные случаи). Фигуры Лиссажу

Условие замкнутости фигуры:

Метод фигур Лиссажу применяется для точного определения частоты

Затухающие колебания

На тело действуют силы:

- квазиупругая (возвращающая)

- сопротивления среды

По второму закону Ньютона:

Дифференциальное уравнение затухающих колебаний, где

прин … ия:

Здесь β – коэффициент затухания;

– циклическая частота собственных колебаний, то есть колебаний системы в отсутствие сил сопротивления

Затухающие колебания

Решение этого дифференциального уравнения затухающих колебаний при условии малости затухания

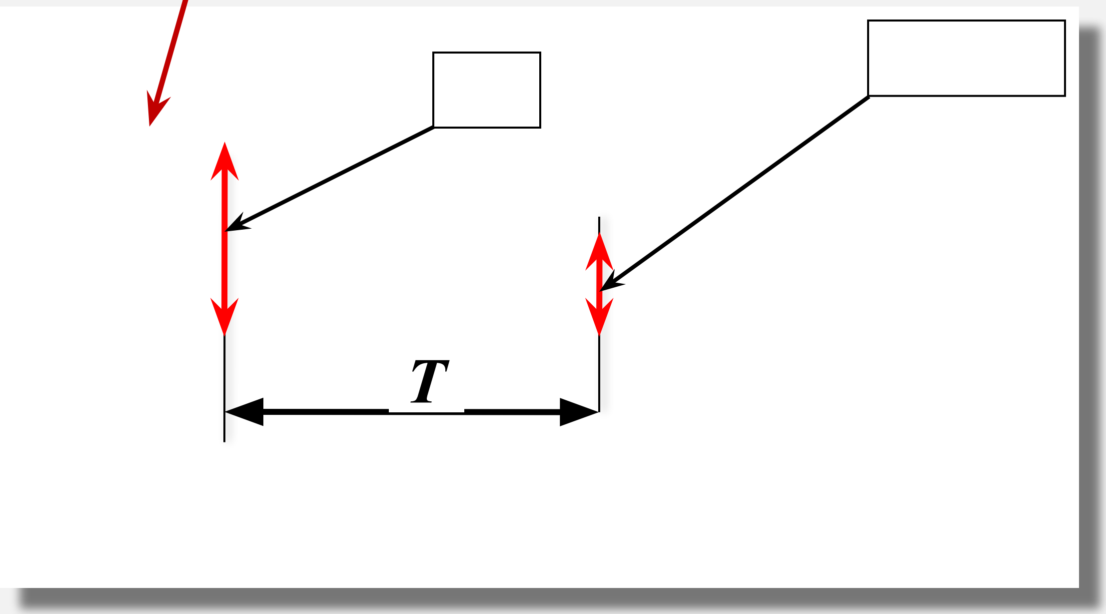
Если затухание велико ($\beta > \omega_0$), движение системы не имеет колебательного характера и будет апериодическим

– дифф.ур-е

– решение дифф. уравнения

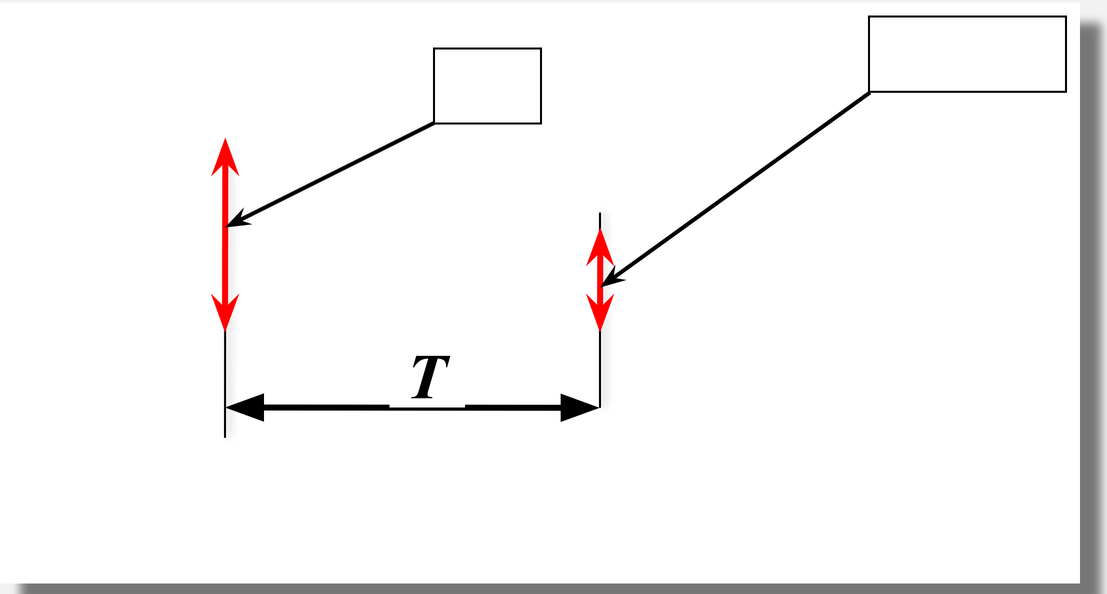
– частота затухающих меньше частоты собственных

– амплитуда уменьшается по экспоненте



– амплитуда

Логарифмический декремент затухания:



λ – натуральный логарифм отношения амплитуд двух следующих друг за другом колебаний, то есть амплитуд колебаний в моменты времени t и ($t+T$)

Док-во:

Величины, характеризующие затухание

1) Логарифмический декремент затухания

2) Время релаксации:

За время релаксации амплитуда уменьшается в e р

Число колебаний за время релаксации

3) Добротность:

3) Добротность:

Добротность пропорциональна числу колебаний за время релаксации:

При условии малости затухан

Добротность обратно пропорциональн
относительной убыли энергии колебан
за время, равное одному периоду:

Вынужденные колебания

Чтобы при наличии сил сопротивления колебания не затухали, колебательную систему нужно подпитывать энергией, - например, с помощью вынуждающей периодической силы:

По второму закону Ньютона:

Это - дифференциальное уравнение вынужденных колебаний, где приняты обозначения:

Вынужденные колебания

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний

Решение уравнения:

Амплитуда зависит от частоты:

Начальная фаза:

Вынужденные колебания. Резонанс

График амплитуды:

Явление резкого **возрастания амплитуды** вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к частоте собственных колебаний системы (резонансной частоте) называется **резонансом**

По этим ссылкам можно посмотреть видео

http://www.youtube.com/watch?v=093CzGsstv0 – свободные и вынужденные колебания, резонанс

http://www.youtube.com/watch?v=BAyt7KVtG58 – вынужденные колебания, резонанс

http://youtu.be/rdWWvjH8cPM - фигуры Лиссажу

Упругие волны. Основные понятия

Волна – это процесс распространения колебаний, периодический во времени и пространстве

Продольные волны

Поперечная волна

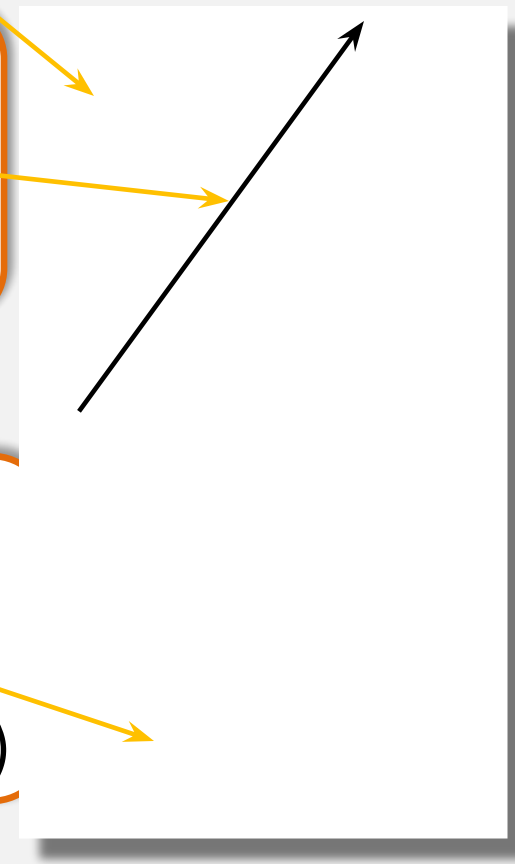
Упругие волны. Основные понятия

<u>Волновой фронт</u> – совокупность точек, до которых дошла волна в данный момент времени (сферический, плоский)

<u>Луч</u> – направление распространения волны.
В изотропной среде луч перпендикулярен волновому фронту

<u>Принцип Гюйгенса:</u>

любая точка волнового фронта является точечным источником вторичных сферических волн (объясняет процесс распространения волн)



Упругие волны. Уравнение плоской волны

Колебания любой новой частицы, захваченной волновым процессом, отстают по фазе от колебаний предыдущей частицы

Скорость перемещения фиксированной фазы называется <u>фазовой скоростью</u>

Уравнение плоской волны

Уравнение колебаний источника в точке x=(

В произвольной точке x колебания запаздывают по фазе

– время запаздывания (за это время волна дойдёт до и x)

Замена дaёт уравнение колебаний в точке x:

Уравнение плоской волны

Функция двух переменных: x и t

- **Волновой вектор (волновое число)**

Длина волны:

Фаза:

Длина волны – расстояние, на которое распространяется волна за время, равное периоду:

Длина волны – минимальное расстояние между точками, которые колеблются в одной фазе

Волны: фазовая скорость

***Круговая частота** характеризует быстроту изменения фазы с течением времени*

***Волновой вектор** (волновое число) характеризует быстроту изменения фазы в пространстве*

Скорость перемещения фиксированной фазы (фазовая скорость):

Дифференциальное уравнение волны

Это – дифференциальное уравнение волны, распространяющейся вдоль оси ОХ

– дифференциальное уравнение волны для более общего случая;

здесь – оператор Лапласа

Возможные решения уравнения:

Плоская волна бежит в положительном направлении оси OX

Плоская волна бежит в отрицательном направлении оси OX

Общий случай плоской волны

Сферическая волна

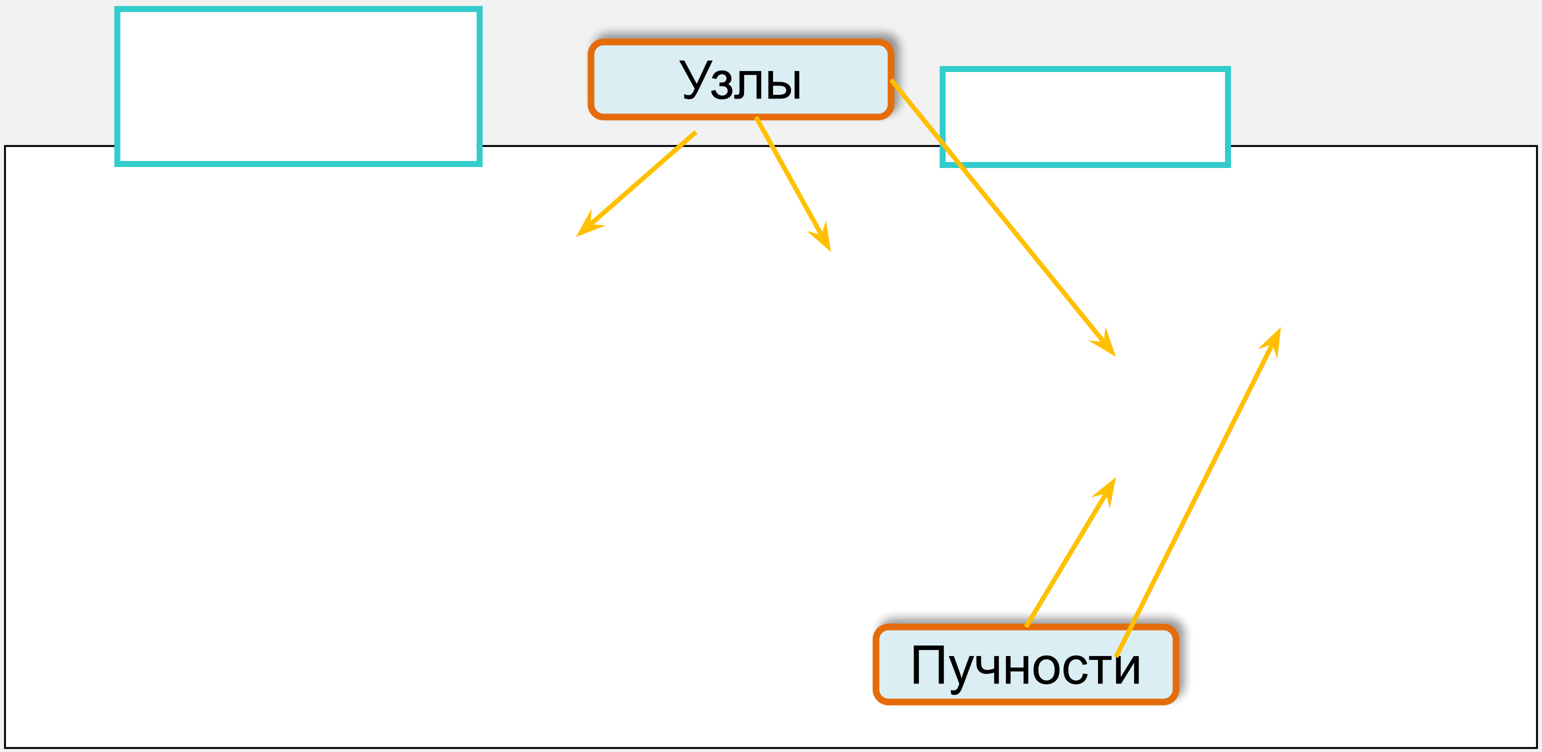
Стоячие волны

Результирующая стоячая волна:

Амплитуда стоячей волны

Длина стоячей волны

Узлы стоячей волны расположены на расстоянии, кратном длине стоячей волны, от закреплённого конца стержня:



Скорость упругих волн

скорость распространения упругих продольных волн

ρ – плотность, E – модуль Юнга, G – модуль сдвига

скорость распространения упругих поперечных волн

скорость распространения волн по натянутой струне

ρ – плотность, F – сила натяжения струны, S – её сечение

скорость звука в газе

R –универсальная газовая постоянная,
T – температура,
μ – молярная масса,
γ – показатель Пуассона (показатель адиабаты, константа для данного газа, например, для воздуха $\gamma=1.4$)

Энергия волны

Энергия упругой волны складывается из кинетической энергии колеблющихся частиц среды и потенциальной энергии упругой деформации:

Для объёмной плотности энергии :

Определяется скоростью колеблющихся частиц:

Определяется модулем Юнга и относительной деформацией:

Без доказательства

Энергия волны. Групповая скорость

Точки с максимальным значением объёмной плотности энергии перемещаются в пространстве со скоростью (***групповая скорость***).

<u>Групповая скорость</u> – скорость переноса энергии

<u>Групповая скорость</u> – скорость перемещения точки a с максимальной плотностью энергии (максимальной амплитудой)

Энергия волны. Групповая скорость

<u>Групповая скорость</u> – скорость переноса энергии

- для монохроматической волны

– если фазовая скорость волны зависит от часто и

Возможны оба случая

Без доказательства:

Для электромагнитных волн возможн - скорости света в вакууме, поскольку **фазовая скорость не связана с переносом энергии (или инфор**). Всегда - **нельзя передавать энергию или информацию быстрее скорости света в вакууме**.

Вектор плотности потока энергии (вектор Умова). Интенсивность волны

г р у п п о в а я с к о р о с т ь

Вектор плотности потока энергии численно равен энергии, перенесённой волной за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную лучу

…енсивность волны** (среднее значение плотности потока энергии)

Элементы акустики: характеристики звуковых волн

Диапазон частот слышимого звука Инфразвук

Ультра...

...нтенсивность волны

(Бел)

(дБ, децибел)

уровень интенсивности

(объективная характеристика)

Здесь – порог слышимости на частоте 1000 Гц

уровень громкости

Громкость – субъективная характеристика, учитывающая среднюю чувствительность человеческого уха к звукам разной частоты, выраженный в фонах (фон), на частоте 1000 Гц совпадает с уровнем интенсивности, выраженным в децибелах

Шкалы громкости и уровня интенсивности совпадают только при ν=1000 *Гц*.

Для других частот надо пользоваться кривыми равной громкости:

Элементы акустики: кривые равной громкости

Громкость $=$ уровню интенсивности только при $\nu=1000\ Гц$. Для других частот надо пользоваться кривыми равной громкости:

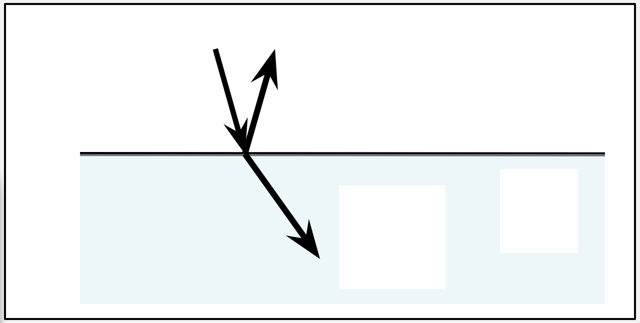
Элементы акустики: характеристики звуковых волн

Избыточное звуковое давление

Уровень избыточного звукового давления

Волновое сопротивление

Волновое сопротивление



От соотношения между волновыми сопротивлениями двух сред зависят **коэффициент отражения** r и **коэффициент проникновения** β на границе раздела

Из закона сохранения энергии

Эффект Доплера для звуковых волн

Эффект Доплера – ***изменение наблюдаемой частоты волны***
при относительном движении источника и/или наблюдателя.
(Рассматривается случай, когда скорости источника и наблюдателя
меньше скорости звука в данной среде.)

А) Пусть наблюдатель движется к источнику:

Период колебаний, который воспринимает наблюдатель, – это время
между прохождением мимо наблюдателя
двух последовательных гребней волны:

Эффект Доплера для звуковых волн

Эффект Доплера — ***изменение наблюдаемой частоты волны***
при относительном движении источника и/или наблюдателя

А) Наблюдатель движется к источнику:

Наблюдатель движется от источника:

Эффект Доплера для звуковых волн

Б) Источник движется к наблюдателю :

Волны «нагоняют» друг друга за один период на расстояние

Источник движется от наблюдателя :

Эффект Доплера для звуковых волн

Объединяем все четыре возможности:

Движется наблюдатель

Движется источник

Верхние знаки относятся к случаю сближения источника
и наблюдателя; нижние – удаления