Тема 2. КИНЕМАТИКА ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

2.1. Понятие механики, разделы в механике

Механика - часть физики, которая изучает закономерности механического движения и причины, вызывающие или изменяющие это движение.

Механическое движение - изменение взаимного положения тел или их частей в пространстве со временем.

Механика

Классическая
(механика Галилея-Ньютона)
Изучает законы движения макроскопических тел, скорости которых малы по сравнению со скоростью света в вакууме *c*.

$v/c \ll 1$

Релятивистская – изучает законы движения макроскопических тел со скоростями, сравнимыми с *c*. Основана на СТО.

Квантовая – Изучает законы движения микроскопических тел (отдельных атомов и элементарных частиц)

Предметом классической механики является механическое движение взаимодействующих между собой макротел при скоростях, много меньше скорости света и в условиях, когда переходом механической энергии в другие ее формы можно пренебречь.

Разделы классической механики

Кинематика
Изучает движение тел,
не рассматривая причины,
которые это движение
обусловливают

Динамика
Изучает законы движения
тел
и причины,
которые вызывают или
изменяют это движение

Статика
Изучает законы равновесия
системы тел.
Если известны законы движения тел,
то из них можно установить и
законы равновесия.

Кинематика (*от греческого слова kinema – движение*) *– раздел механики, в котором изучаются геометрические свойства движения тел без учета их массы и действующих на них сил.*

Динамика (*от греческого dynamis – сила*) изучает движения тел в связи с теми причинами, которые обуславливают это движение.

Статика (*от греческого statike – равновесие*) изучает условия равновесия тел.

Поскольку равновесие – есть частный случай движения, законы статики являются естественным следствием законов динамики и в данном курсе не изучается.

Модели в механике

Материальная точка - тело, размерами, формой и внутренним строением которого в данной задаче можно пренебречь

Абсолютно твердое тело - тело, которое ни при каких условиях не может деформироваться и при всех условиях расстояние между двумя точками этого тела остается постоянным

Абсолютно упругое тело - Тело, деформация которого подчиняется закону Гука, а после прекращения действия внешних сил принимает свои первоначальные размеры и форму.

Основные законы механики установлены итальянским физиком и астрономом **Г. Галилеем** (1564 – 1642) и окончательно сформулированы английским физиком **И. Ньютоном** (1643 – 1727).

Механика Галилея и Ньютона называется ***классической***, *т.к. она рассматривает* ***движение макроскопических тел со скоростями, значительно меньшими скорости света в вакууме*****.**

2.2. Система отсчета, тело отсчета

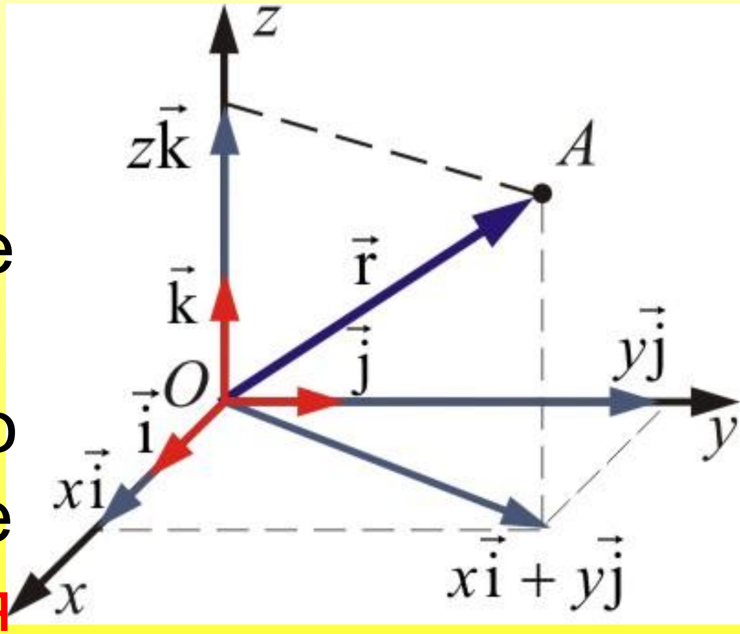
Всякое движение *относительно,* поэтому для описания движения необходимо условиться, относительно какого другого тела будет отсчитываться перемещение данного тела. *Выбранное для этой цели тело называют* ***телом отсчета.***

Практически, для описания движения приходится связывать с телом отсчета ***систему координат*** (декартова, сферическая, цилиндрическая и т.д.).

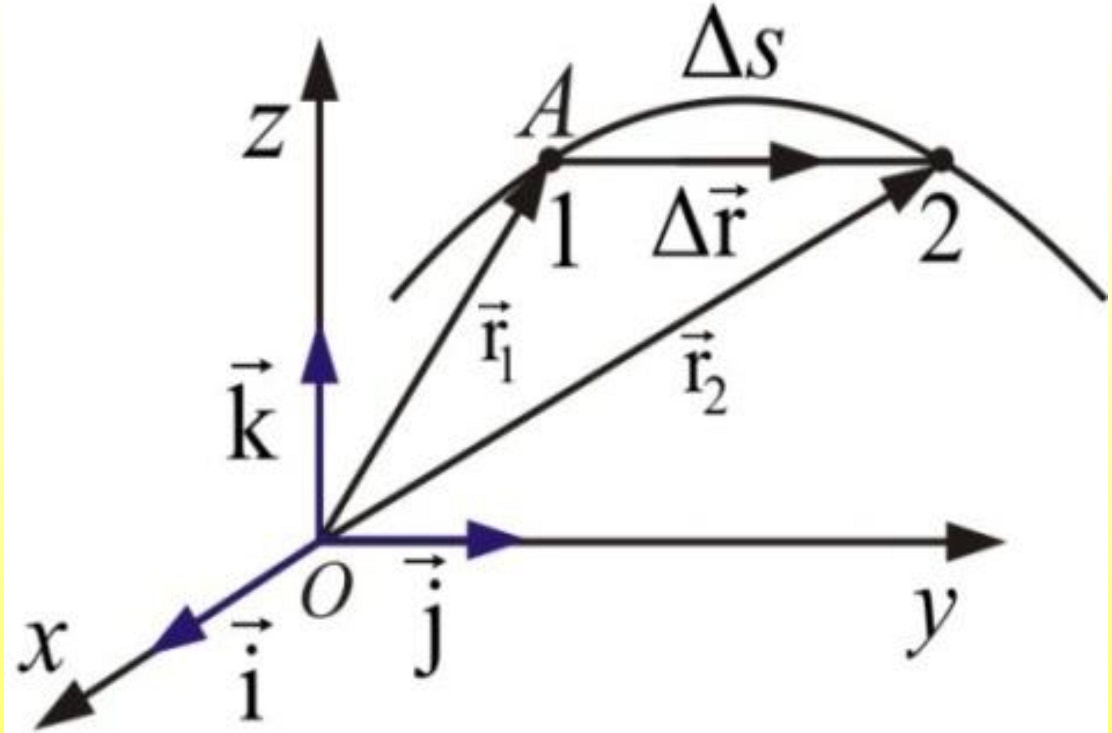
Система отсчета – совокупность системы координат и часов*, связанных с телом по отношению к которому изучается движение.*

Движения тела, как и материи, вообще не может быть вне времени и пространства. Материя, пространство и время неразрывно связаны между собой (нет пространства без материи и времени и наоборот).

Пространство трехмерно, поэтому «естественной» системой координат является, **декартова** или прямоугольная система координат, которой мы в основном и будем пользоваться.



В декартовой системе координат, положение точки ***A*** в данный момент времени по отношению к этой системе характеризуется тремя координатами *x, y, z* или радиус-вектором $\vec{r}$ проведенным из начала координат в данную точку



2.1

При движении материальной точки её координаты с течением времени изменяются.

В общем случае её движение определяется скалярными или векторными уравнениями:

Кинематические уравнения движения материальной точки:

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t).$$

Эти уравнения эквивалентны векторному уравнению

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

где *x*, *y*, *z* – проекции радиус-вектора $\vec{r}$ на оси координат, а **i**, **j**, **k** – ***единичные векторы*** (***орты***), направленные по соответствующим осям

11

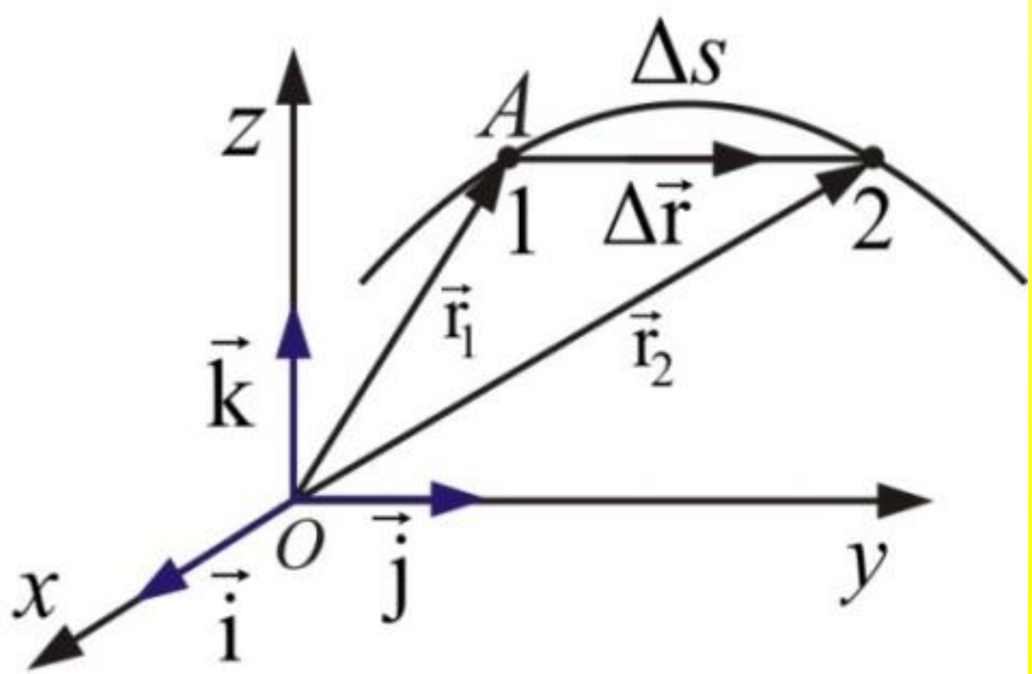
Число независимых координат, полностью определяющих положение точки в пространстве, называется ***числом степеней свободы i***

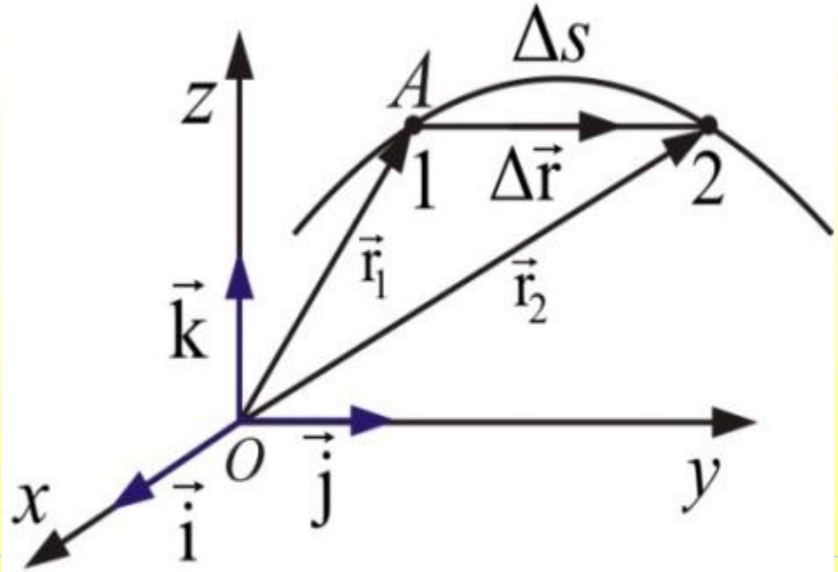
Если материальная точка движется в пространстве, то она имеет три степени свободы $i=3$ (координаты x, y, z). Если она движется на плоскости – две степени свободы $i=2$. Если вдоль линии – одна степень свободы $i=1$.

2.3. Кинематика материальной точки

2.3.1. Путь, перемещение

Положение точки *A* в пространстве можно задать с помощью радиус-вектора $\vec{r}_1$ проведенного из точки отсчета *O* или начала координат





При движении точки *A* из точки 1 в точку 2 её радиус-вектор изменяется и по величине, и по направлению, т.е. $\vec{r}$ зависит от времени *t*.

Геометрическое место точек концов $\vec{r}$ *называется* ***траекторией точки***.

Длина траектории есть путь **Δ*s***. Если точка движется по прямой, то приращение $\Delta\vec{r}$ равно пути **Δ*s***.

Пусть за время Δt точка A переместилась из точки 1 в точку 2.

Вектор перемещения $\Delta\vec{r}$ есть приращение $\vec{r}_1$ за время Δt

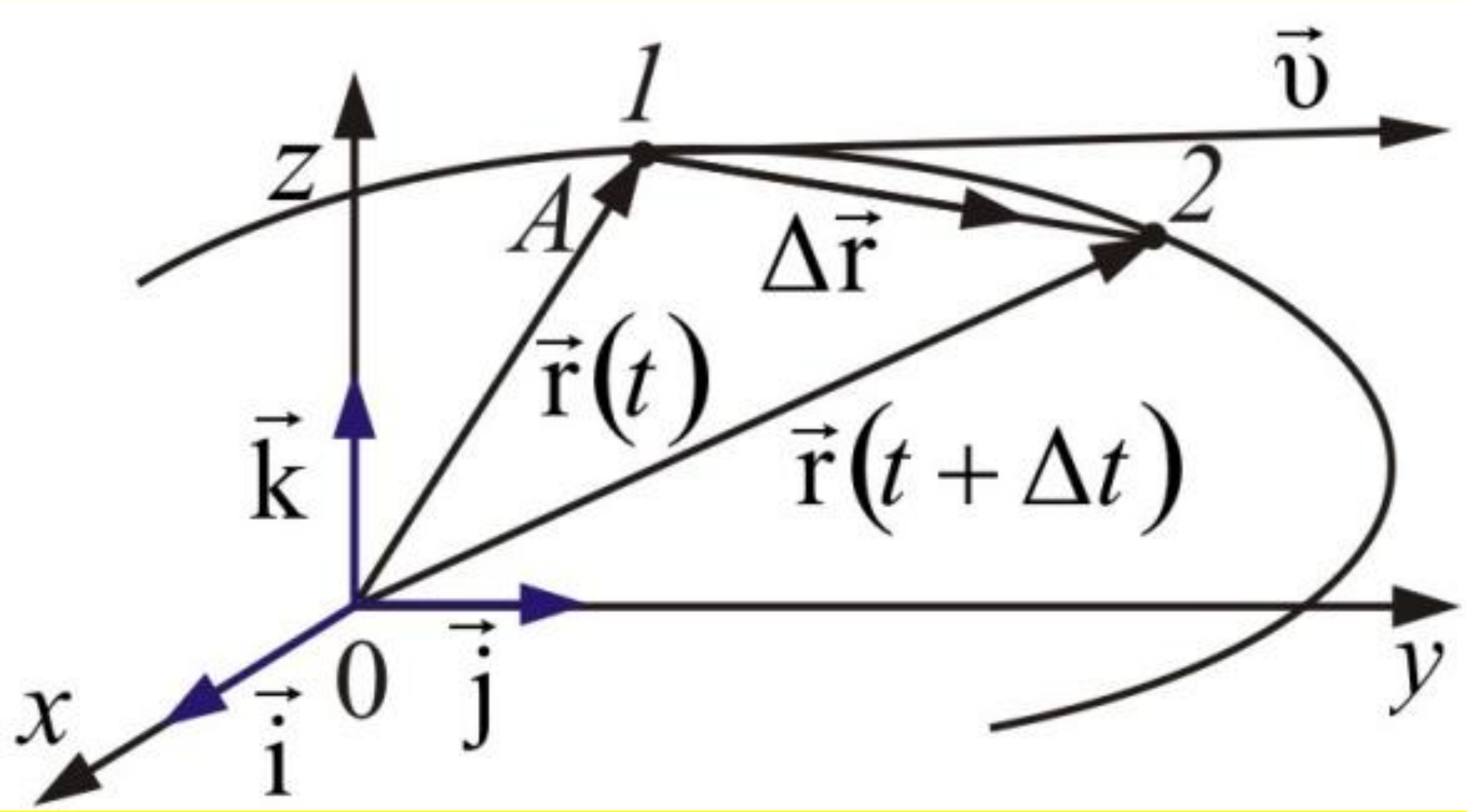
$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k}; \quad (2.3.1)$$

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k} \quad (2.3.2)$$

Модуль вектора:

$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}. \quad (2.3.3)$$

2.3.2. Скорость

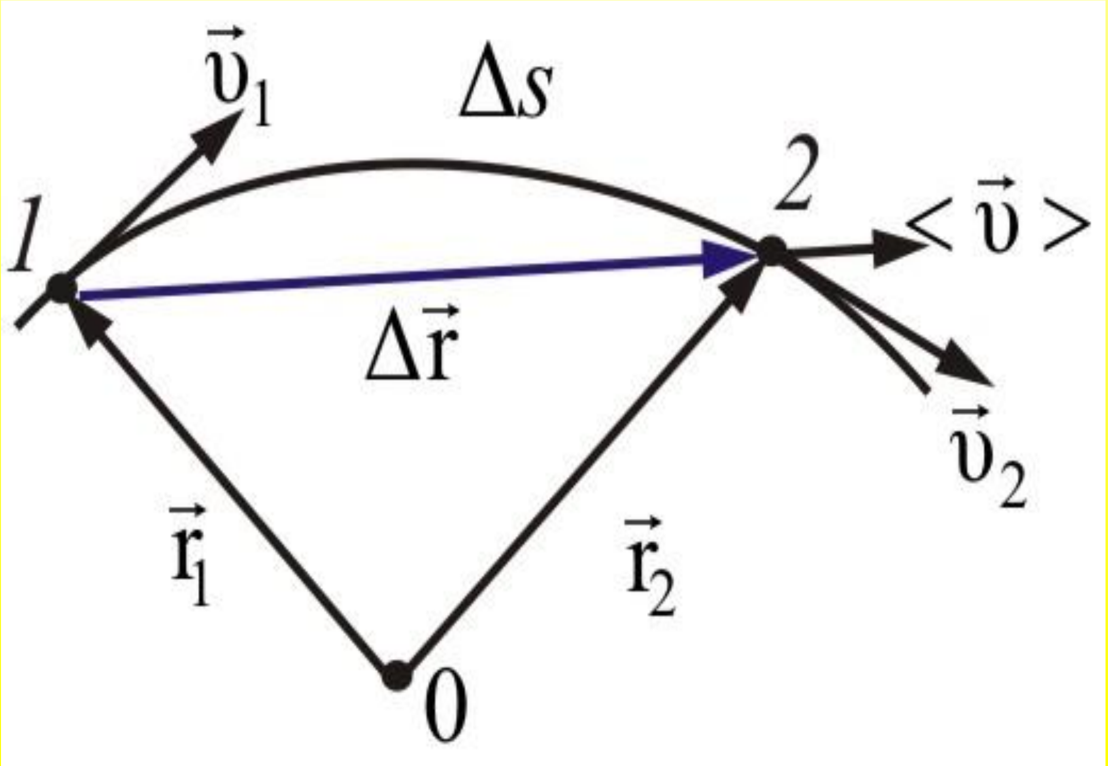


Скорость

Средний вектор скорости определяется как отношение вектора перемещения $\Delta\vec{r}$ ко времени Δt, за которое это перемещение произошло

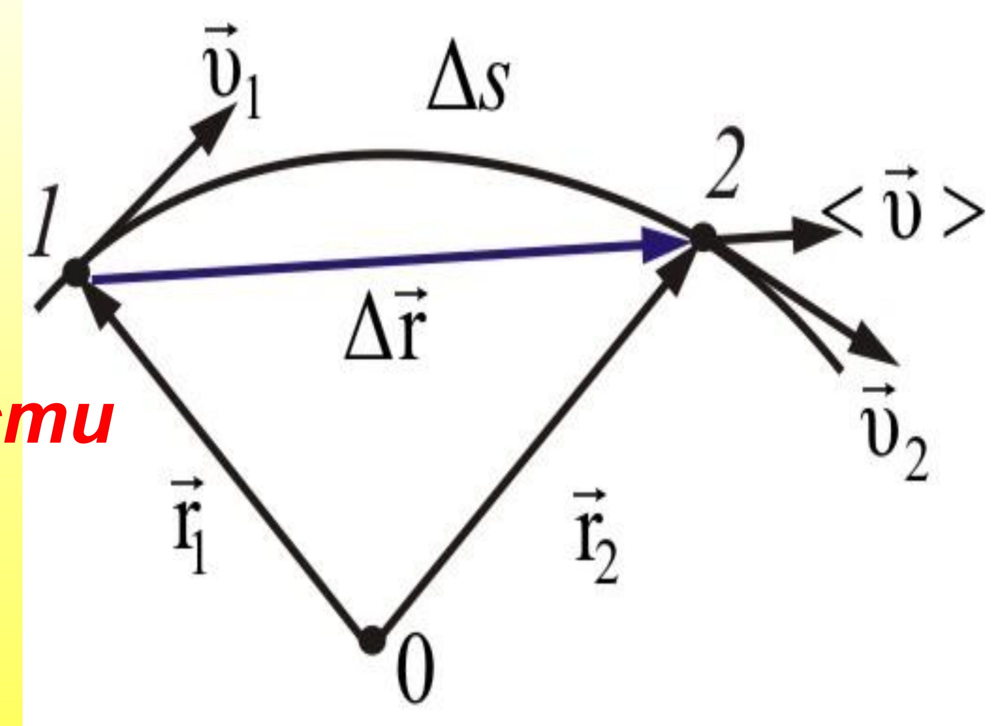
$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \langle \vec{\upsilon} \rangle$$

Вектор $\Delta\vec{r}$ совпадает с направлением вектора $\langle \vec{\upsilon} \rangle$



Мгновенная скорость в точке 1:

$$\vec{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

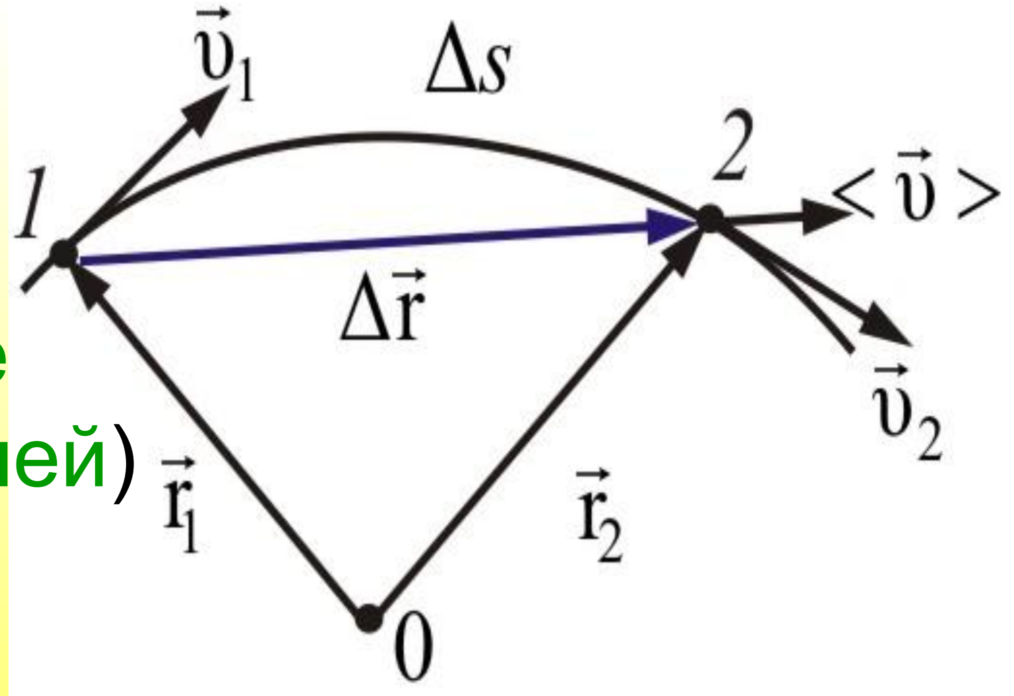


Модуль вектора скорости

$$\upsilon \equiv \left|\vec{\upsilon}\right| = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|.$$

Мгновенная скорость $\vec{\upsilon}$-*вектор скорости в данный момент времени равен первой производной от* $\vec{r}$ *по времени и направлен по касательной к траектории в данной точке в сторону движения точки А.*

При Δ*t* → 0 т.е. на бесконечно малом участке траектории Δ*S* = Δ*r* (перемещение совпадает с траекторией)



В этом случае мгновенную скорость можно выразить через скалярную величину – ***путь:***

$$\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}; \qquad \text{или} \qquad \upsilon = \frac{ds}{dt}.$$

Так вычислять скорость проще, т.к. *S* – скаляр

Обратное действие – интегрирование

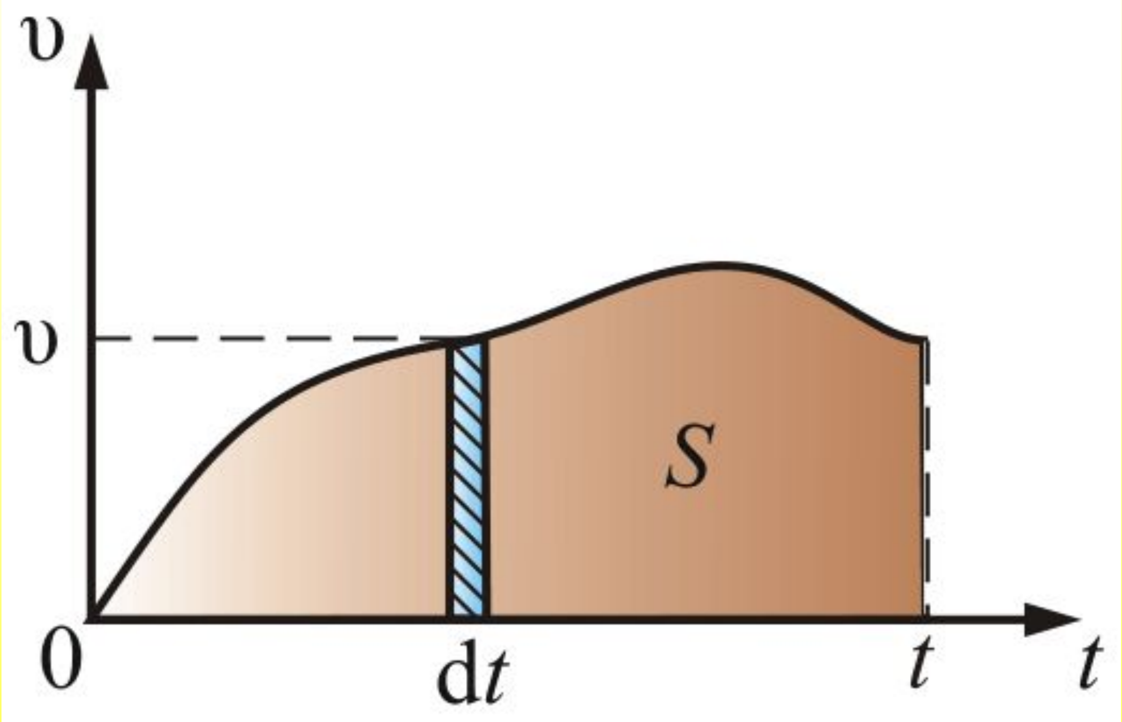
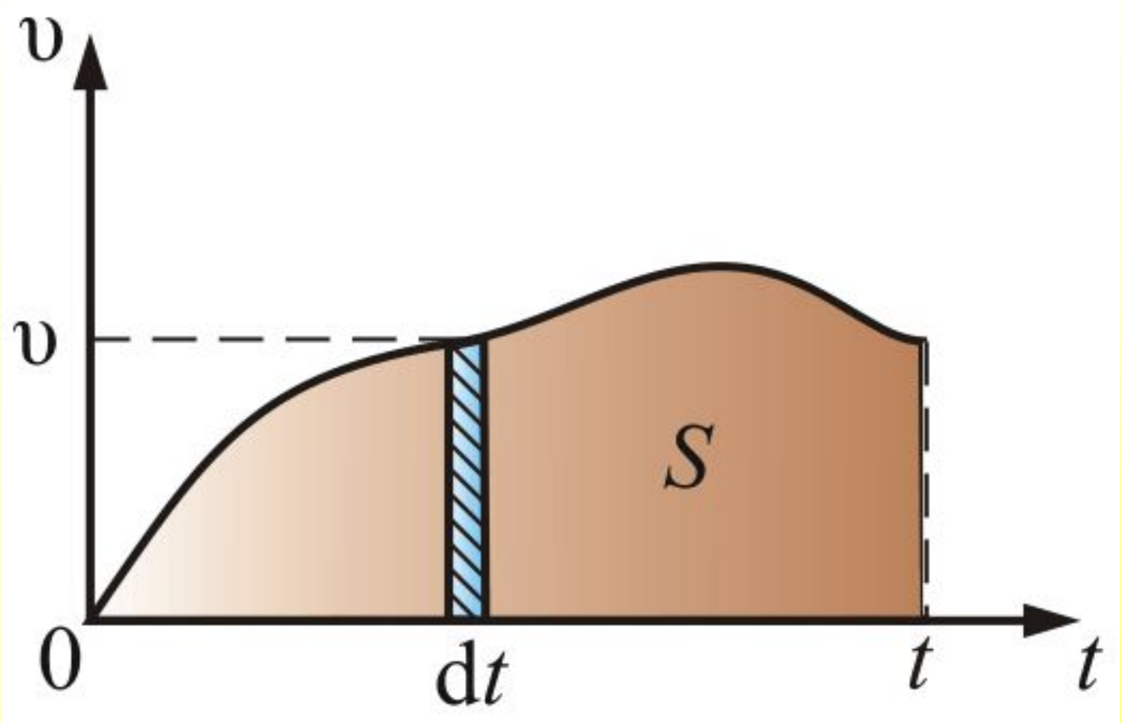


Рисунок 2.5

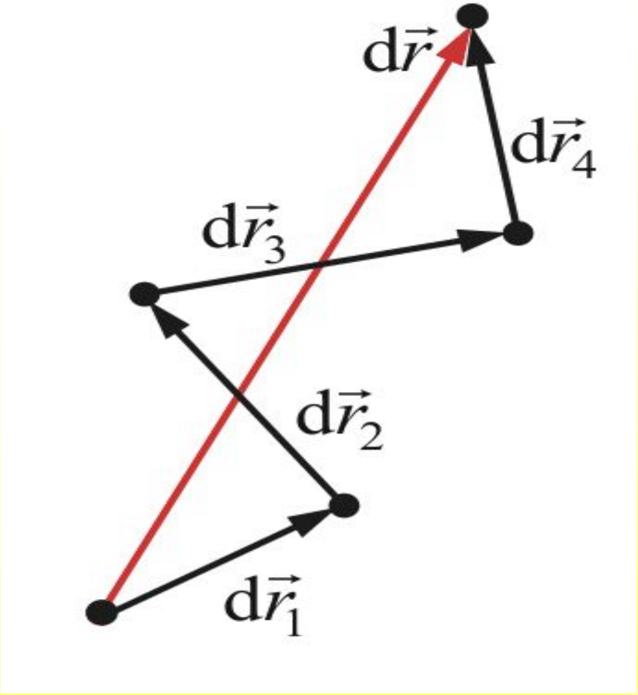
$ds = \upsilon dt$ – площадь бесконечно узкого прямоугольника. Чтобы вычислить весь путь *S* за время *t*, надо сложить площади всех прямоугольников.



$$S = \int_0^t \upsilon \mathrm{d}t. \qquad (2.3.5)$$

Геометрический смысл этого интеграла в том, что ***площадь под кривой*** $\upsilon(t)$ ***есть путь тела за время t.***

Принцип независимости движения (действия сил)



- Если материальная точка участвует в нескольких движениях, то ее *результирующее перемещение* $d\vec{r}$ *равно векторной сумме перемещений*, обусловленных каждым из этих движений в отдельности:

$$d\vec{r} = d\vec{r}_1 + d\vec{r}_2 + \ldots + d\vec{r}_i + d\vec{r}_n = \sum_{i=1}^{n} d\vec{r}_i,$$

Так как $\vec{\upsilon} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$

Тогда $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2 + \ldots + \vec{\upsilon}_i + \vec{\upsilon}_n$

$$\vec{\upsilon} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\upsilon}_{\mathrm{i}}.$$

Таким образом, *скорость тоже подчиняется принципу независимости движения.*

В дальнейшем мы подробнее рассмотрим принцип независимости действия сил.

В физике существует общий принцип, который называется

принцип суперпозиции

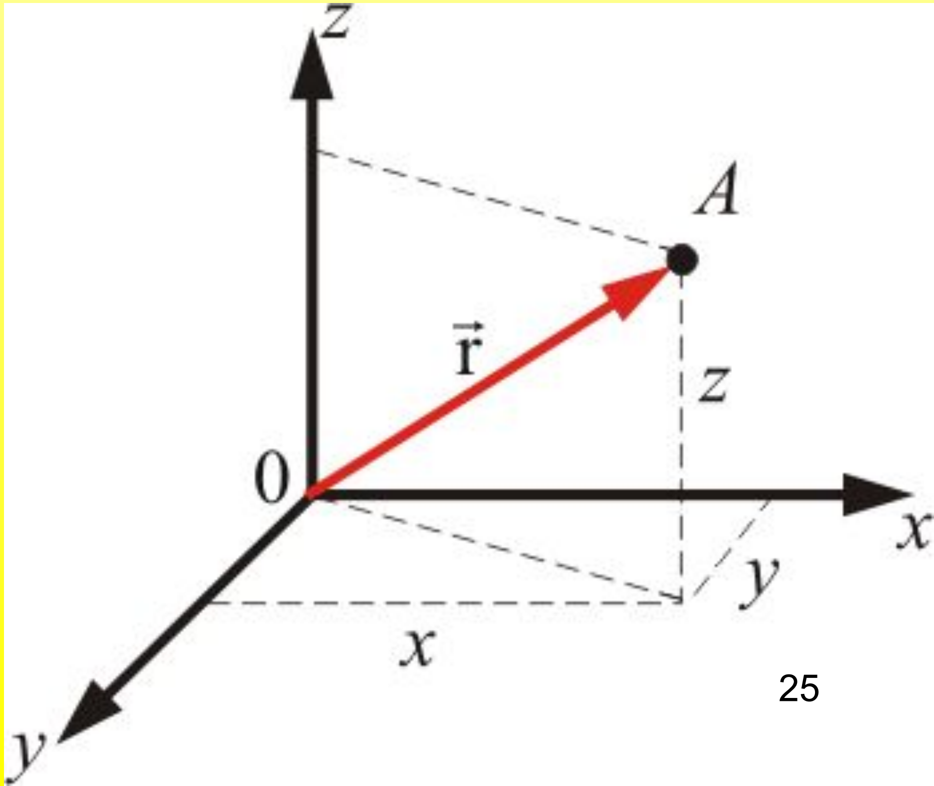
результирующий эффект сложного процесса взаимодействия представляет собой сумму эффектов, вызываемых каждым воздействием в отдельности, *при условии, что последние взаимно не влияют друг на друга.*

Принцип суперпозиции играет большую роль во многих разделах физики и техники.

2.3.3. Проекция вектора скорости на оси координат

В векторной форме уравнения записываются легко и кратко. Но для практических вычислений нужно знать проекции вектора на оси координат выбранной системы отсчета.

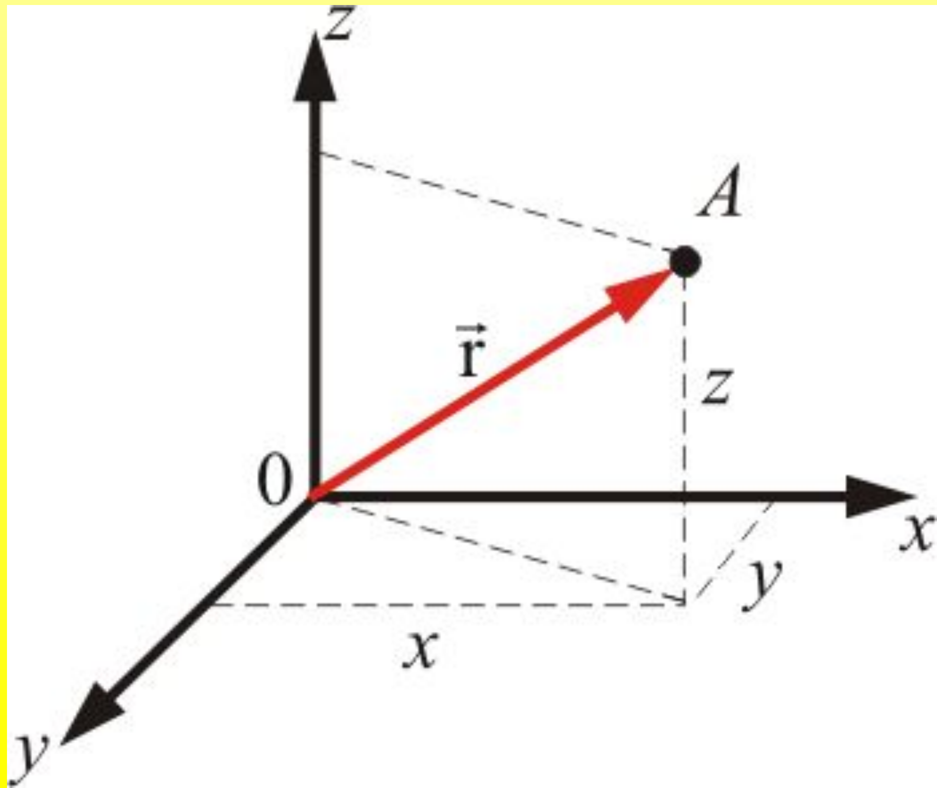
Положение точки *A* задается радиус-вектором $\vec{r}$. Спроецируем вектор $\vec{r}$ на оси – *x*, *y*, *z*.



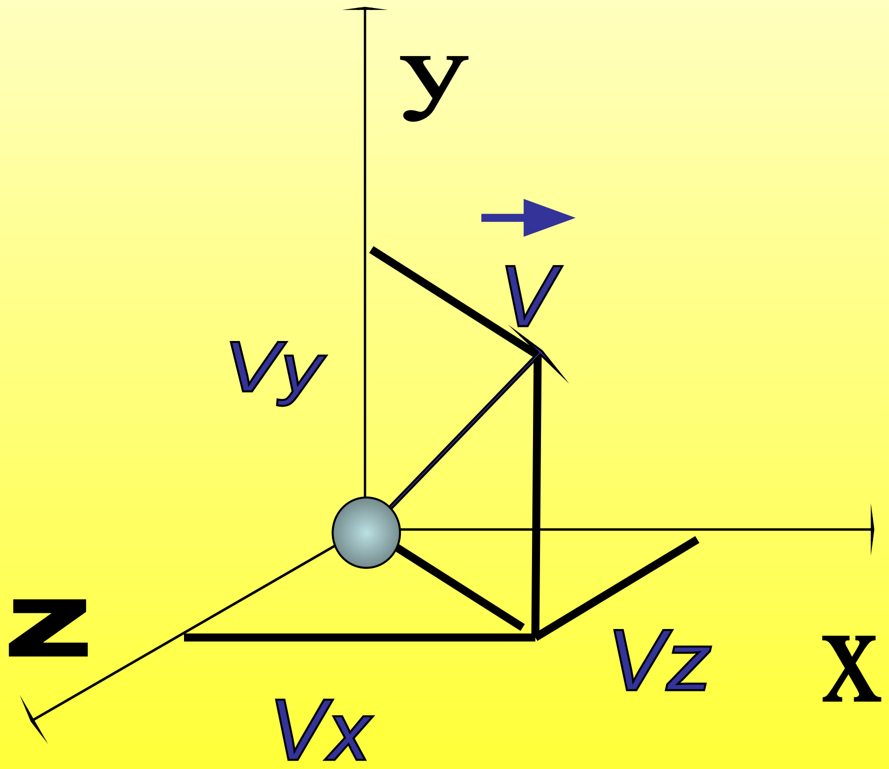
Понятно, что *x*, *y*, *z* зависят от времени *t*, т.е. *x*(*t*), *y*(*t*), *z*(*t*). Зная зависимость этих координат от времени (закон движения точки) можно найти в каждый момент времени скорость точки.

Проекция вектора скорости на ось *x* равна:

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt}$$



Проекции вектора скорости на оси равны:



$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt}$$

$$\upsilon_y = \frac{dy}{dt}$$

$$\upsilon_z = \frac{dz}{dt}.$$

Так как $\vec{\upsilon}$ вектор, то (2.3.6)

$$\boxed{\vec{\upsilon} = \upsilon_x \vec{i} + \upsilon_y \vec{j} + \upsilon_z \vec{k} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k},}$$

где **i, j, k** единичные векторы – орты.

$$\vec{\upsilon} = \upsilon_x \vec{i} + \upsilon_y \vec{j} + \upsilon_z \vec{k}$$

Модуль вектора скорости:

$$\boxed{\upsilon = \sqrt{\upsilon^2{}_x + \upsilon^2{}_y + \upsilon^2{}_z}}$$

2.3.4. Ускорение. Нормальное и тангенциальное ускорения

В произвольном случае движения скорость не остается постоянной. *Быстрота изменения скорости по величине и направлению характеризуются* ***ускорением***:

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}} \qquad (2.3.7)$$

Введем *единичный вектор* $\vec{\tau}$ (рисунок 2.9), связанный с точкой 1 и направленный по касательной к траектории движения точки 1 (векторы $\vec{\upsilon}$ и $\vec{\tau}$ в точке 1 совпадают). Тогда можно записать:

$$\boxed{\vec{\upsilon} = \upsilon\vec{\tau},}$$

Где $\upsilon = \left|\vec{\upsilon}\right|$ – модуль вектора скорости.

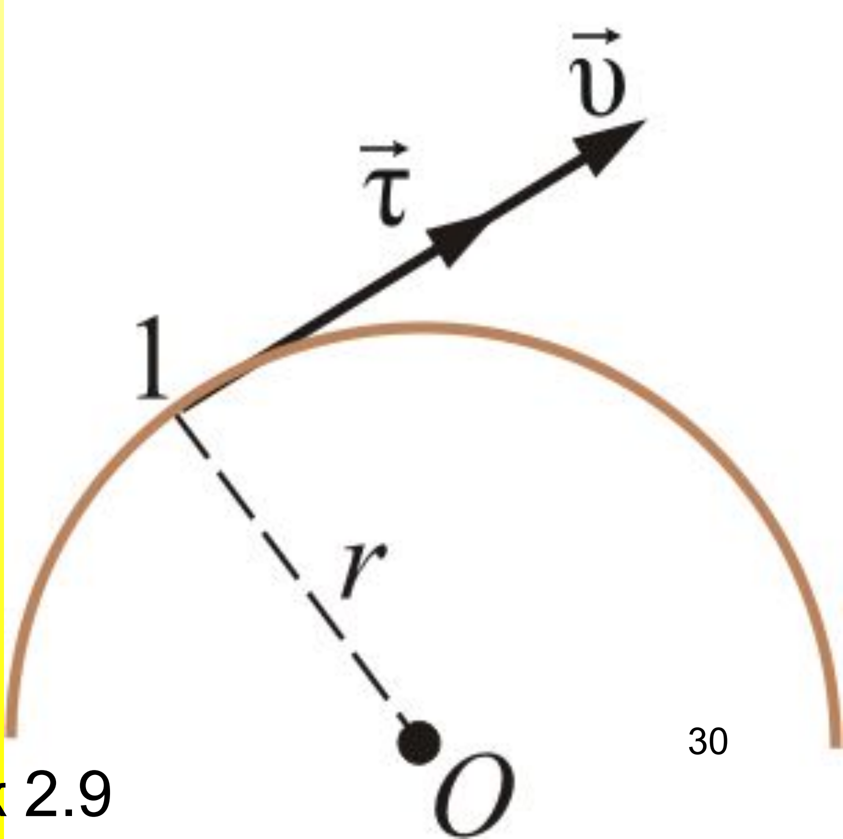


Рисунок 2.9

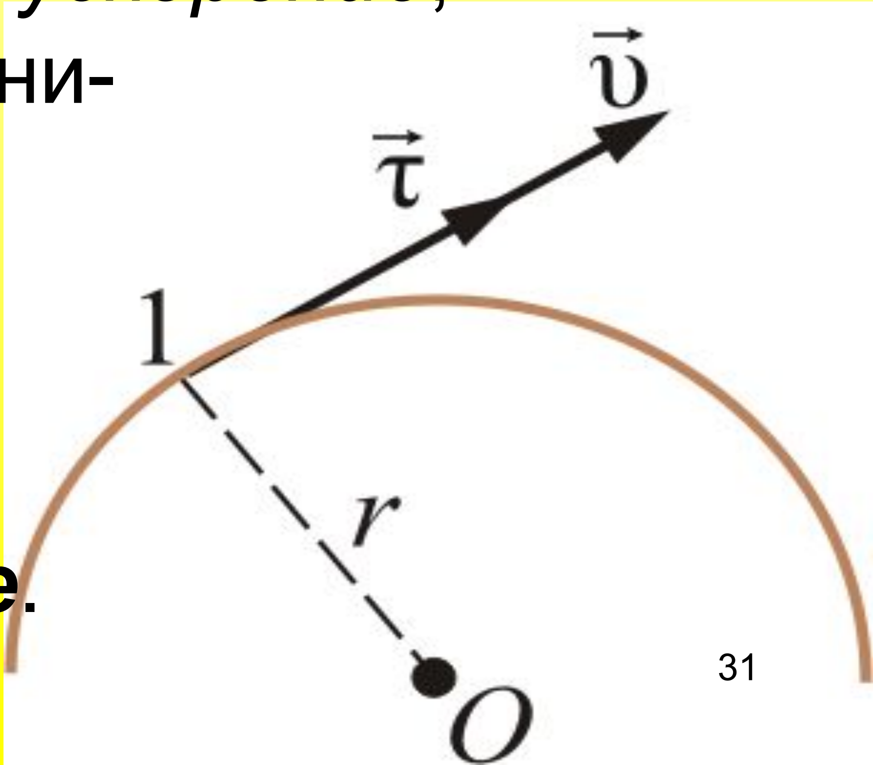
Найдем общее ускорение (как производную):

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d\upsilon}{dt}\vec{\tau} + \upsilon\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n.} \qquad (2.3.8)$$

Получили два слагаемых ускорения:

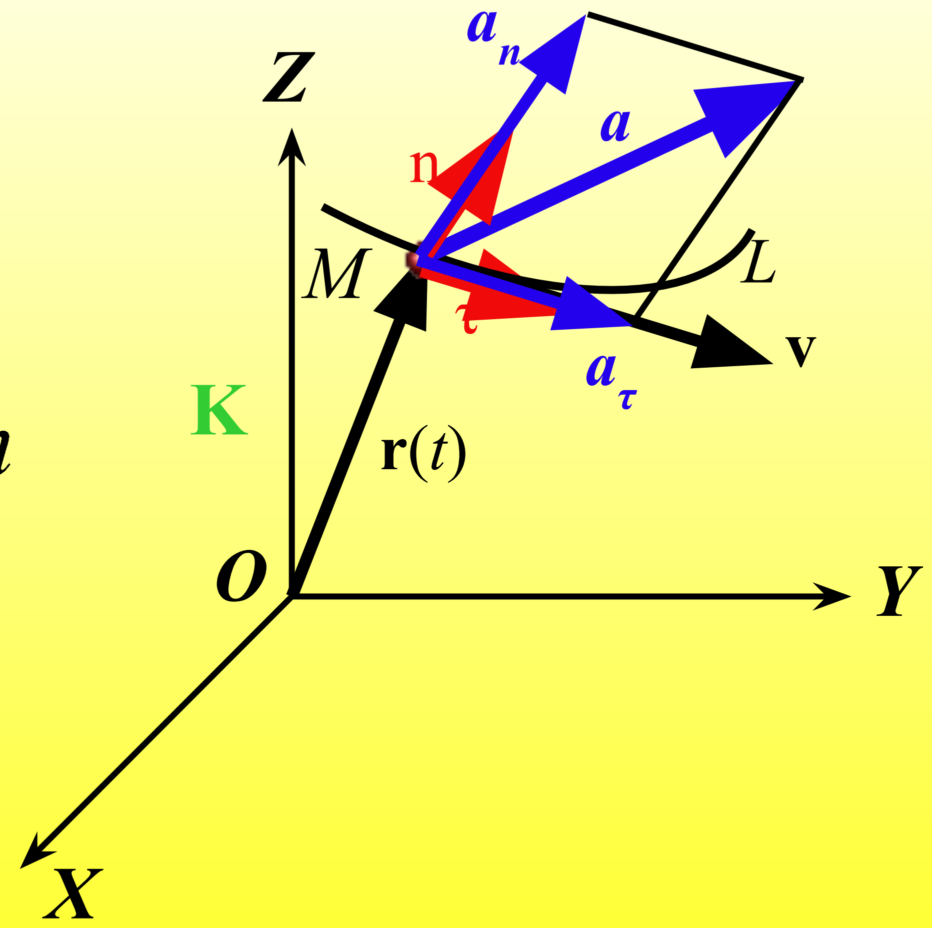
$\vec{a}_\tau$ – **тангенциальное** *ускорение*, совпадающее с направлением $\vec{\upsilon}$ в данной точке.

$\vec{a}_n$ – ***нормальное ускорение*** или ***центростремительное***.



При произвольном движении точки имеем:

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$$



$$\boxed{\vec{a}_\tau = \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}}$$ или по модулю $$\boxed{a_\tau = \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}}$$

$\vec{a}_\tau$-показывает изменение вектора скорости по величине:

- если $\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} > 0$ то $\vec{a}_\tau$ направлено в ту же сторону, что и вектор $\vec{\upsilon}$ т.е. ускоренное движение;

- если $\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} < 0$ то $\vec{a}_\tau$ направлено в противоположную сторону $\vec{\upsilon}$, т.е. замедленное движение;

- при $\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = 0$ то $\vec{a}_\tau = 0$, $\vec{\upsilon} = \mathrm{const}$ – движение постоянной по модулю скоростью.

Рассмотрим подробнее второе слагаемое уравнения $\vec{a}(t) = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$

т.е. *нормальное ускорение:*

$$\boxed{\vec{a}_n = \upsilon \frac{\mathrm{d}\vec{\tau}}{\mathrm{d}t}.}$$

Быстрота изменения направления касательной $(\mathrm{d}\vec{\tau}/\mathrm{d}t)$ к траектории определяется скоростью движения точки по окружности и степенью искривленности траекторий.

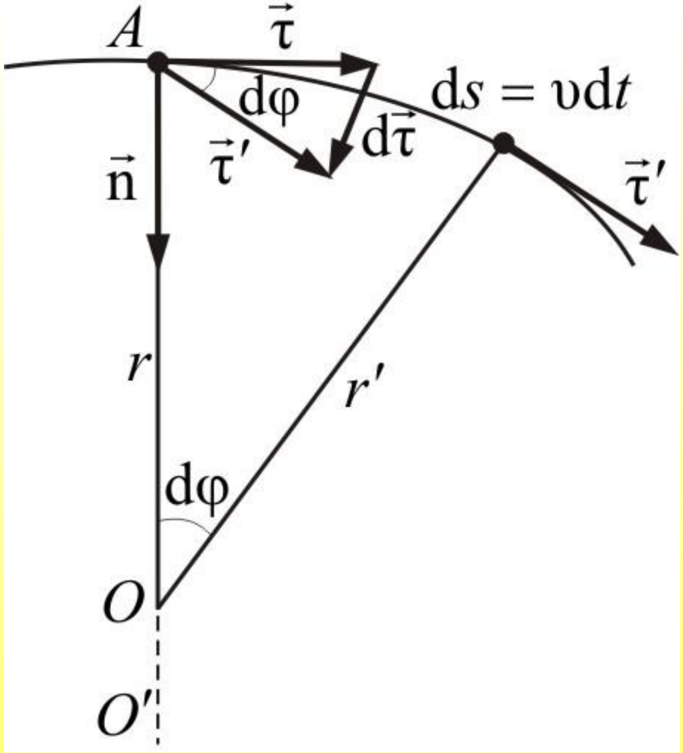
Ускорение при произвольном движении

При **произвольном** ***движении материальной точки*** **величина** ***r будет равна*** **радиусу некоторой моментальной** ***(т.е. соответствующей данному моменту времени)*** **окружности**

в любой точке траектории ***движение материальной точки*** *можно рассматривать как* **вращательное движение по окружности,** ***(с касательным*** a_τ ***и нормальным*** a_n ***ускорениями)***

Саму величину r называют **радиусом кривизны траектории** ***в данной точке***

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\vec{n}$$



Скорость изменения направления касательной можно выразить как произведение скорости изменения угла на единичный вектор $\vec{n}$, показывающий направление изменения угла.

$\vec{n}$ Т.о. – единичный вектор, направленный перпендикулярно касательной $(\vec{\tau})$ в данной точке, т. е. по радиусу кривизны к центру кривизны.

$$d\varphi = \frac{dS}{r} \qquad dS = \upsilon dt \qquad d\varphi = \frac{\upsilon dt}{r} \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\upsilon}{r}$$

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{\upsilon}{r}\vec{n} \qquad \upsilon\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{\upsilon^2}{r}\vec{n}$$

отсюда $\boxed{\vec{a}_n = \frac{\upsilon^2}{r}\vec{n},}$ – ***нормальное ускорение*** или ***центростремительное*** т.к. направлено оно к центру кривизны, перпендикулярно $\vec{\tau}$

Нормальное ускорение *показывает быстроту изменения направления вектора скорости*

Нормальное ускорение *показывает быстроту изменения направления вектора скорости*

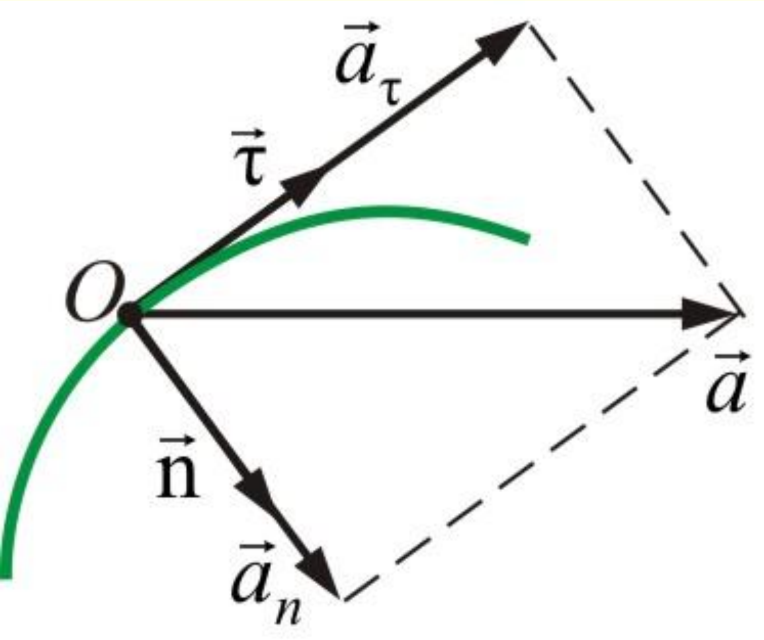
$$\vec{a}_n = \frac{\upsilon^2}{r}\vec{\mathrm{n}},$$

Модуль нормального ускорения:

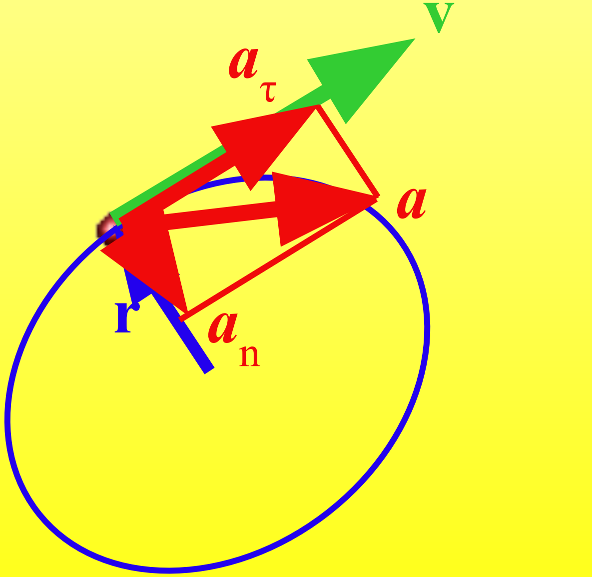
$$\left|\vec{a}_n\right| = a_n = \frac{\upsilon^2}{r}.$$

Центростремительным называют *ускорение – когда движение происходит по окружности.* А когда движение происходит по произвольной кривой – говорят, *нормальное ускорение*, перпендикулярное к касательной в любой точке траектории.

Суммарный вектор ускорения при движении точки вдоль плоской кривой равен:



$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = \frac{d\upsilon}{dt}\vec{\tau} + \frac{\upsilon^2}{r}\vec{n}.}$$



Модуль общего ускорения равен:

$$\boxed{a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}}$$

Рассмотрим несколько предельных (частных) случаев:

$a_\tau = 0;\ a_n = 0$ – равномерное прямолинейное движение;

$a_\tau = \text{const};\ a_n = 0$ – равноускоренное прямолинейное движение;

$a_\tau = 0;\ a_n = \text{const}$ – равномерное движение по окружности.

Вспомним несколько полезных формул (прямая задача кинематики) :

При равномерном движении $$s = \int_0^t \upsilon \mathrm{d}t = \upsilon t$$

При движении с постоянным ускорением

$$S = \upsilon_0 t \pm \frac{at^2}{2}.$$

$$\upsilon = \upsilon_0 \pm at$$

Обратная задача кинематики заключается в том, что по известному значению ускорения *a*(*t*) найти скорость точки и восстановить траекторию движения *r*(*t*).

По определению $$a(t) = \frac{\mathrm{d}\upsilon(t)}{\mathrm{d}t},$$

отсюда

$$\boxed{\upsilon(t) = \upsilon(t_0) + \int_{t_1}^{t_2} a(t)\mathrm{d}t}$$

или, так как $\upsilon(t) = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$,

Следовательно $$\boxed{r(t) = r(t_0) + \int_{t_1}^{t_2} \upsilon(t)\mathrm{d}t.}$$

2.4. Кинематика твердого тела

Различают пять видов движения твердого тела:

- поступательное;

- вращательное вокруг неподвижной оси;

- плоское;

- вокруг неподвижной точки;

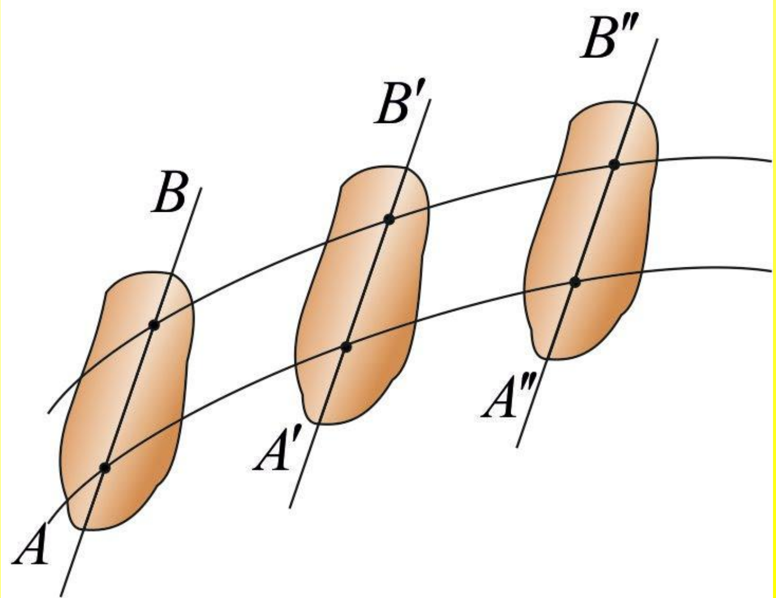
- свободное.

Поступательное **движение *и* *вращательное*** **движение вокруг оси – основные виды движения твердого тела.**

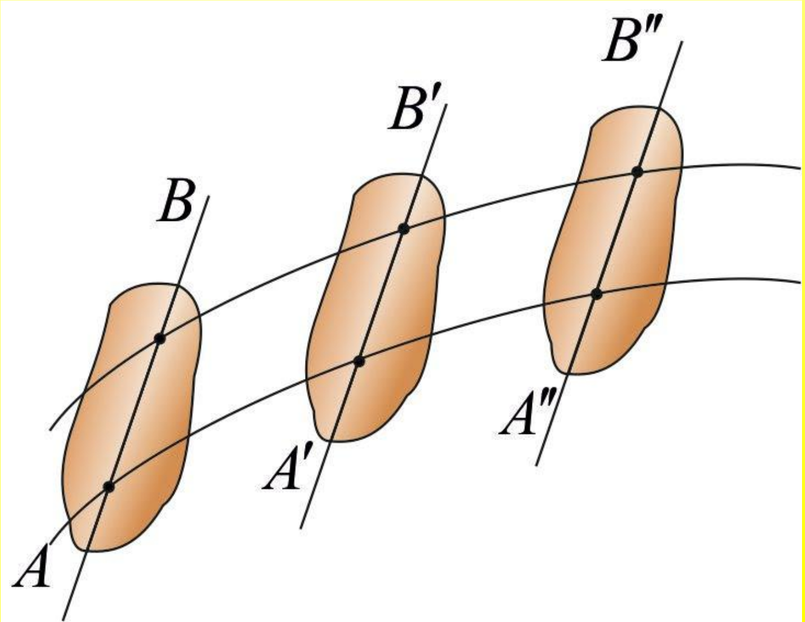
Остальные виды движения твердого тела можно свести к одному их этих основных видов или к их совокупности.

2.4.1. Поступательное движение твердого тела

Поступательное движение – это такое движение твердого тела, при котором любая прямая, связанная с телом, остается параллельной своему начальному положению и при этом, все точки твердого тела совершают ***равные перемещения.***



Скорости и ускорения *всех точек* твердого тела в данный момент времени *t* одинаковы. Это позволяет свести изучение поступательного движения твердого тела к изучению движения отдельной точки, т.е. к задаче кинематики материальной точки, подробно рассмотренной в прошлом разделе.



При **вращательном движении** все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой OO', называемой *осью вращения* (рисунок 2.3).

Из определения вращательного движения ясно, что понятие вращательного движения для материальной точки неприемлемо.

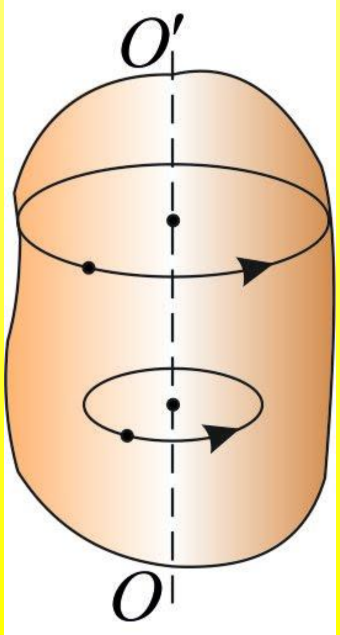


Рисунок 2.3

2.4.2. Вращательное движение вокруг неподвижной оси

Движение твердого тела, при котором две его точки O и O' остаются неподвижными, называется ***вращательным движением вокруг неподвижной оси****, а неподвижную прямую OO' называют* ***осью вращения****.*

Пусть абсолютно твердое тело вращается вокруг неподвижной оси *OO'*

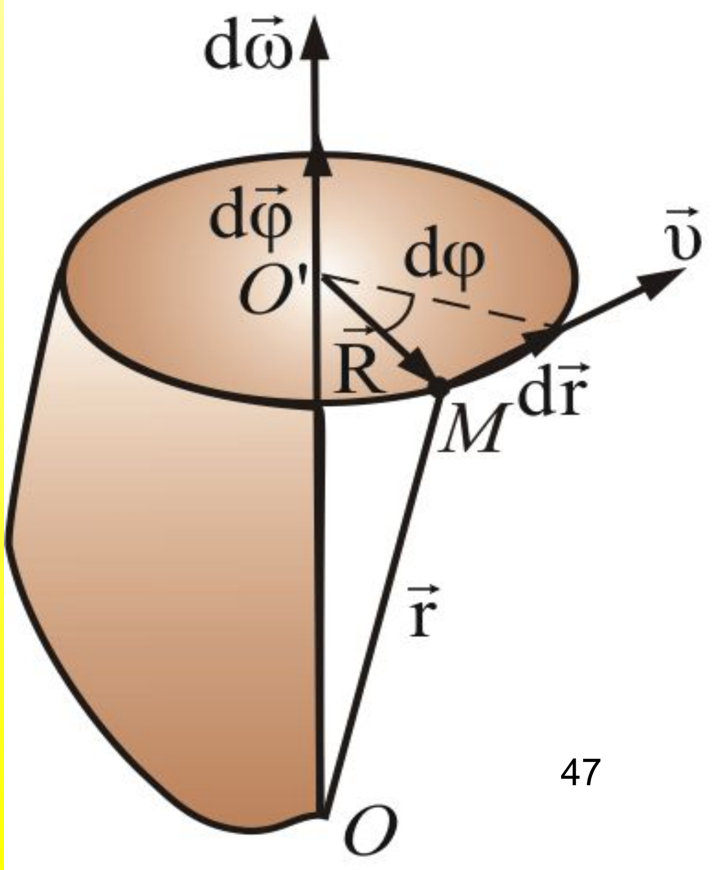


Рисунок 2.12

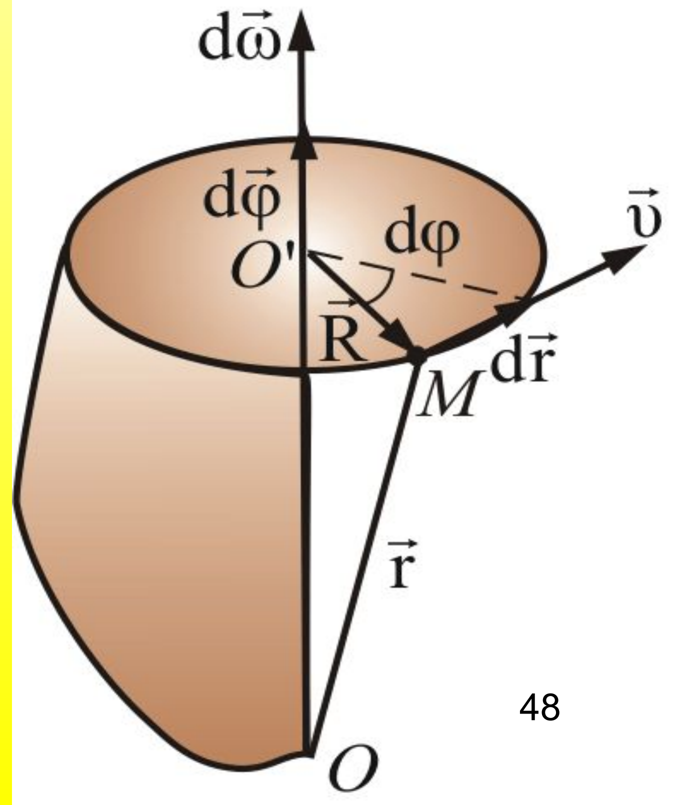
Проследим за некоторой точкой *M* этого твердого тела. За время $\mathrm{d}t$ точка *M* совершает элементарное перемещение

При том же самом угле поворота $\mathrm{d}\varphi$ другая точка, отстоящая от оси на большее или меньшее расстояния, совершает другое перемещение. Следовательно, ни само перемещение некоторой точки твердого тела,

ни первая производная $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$

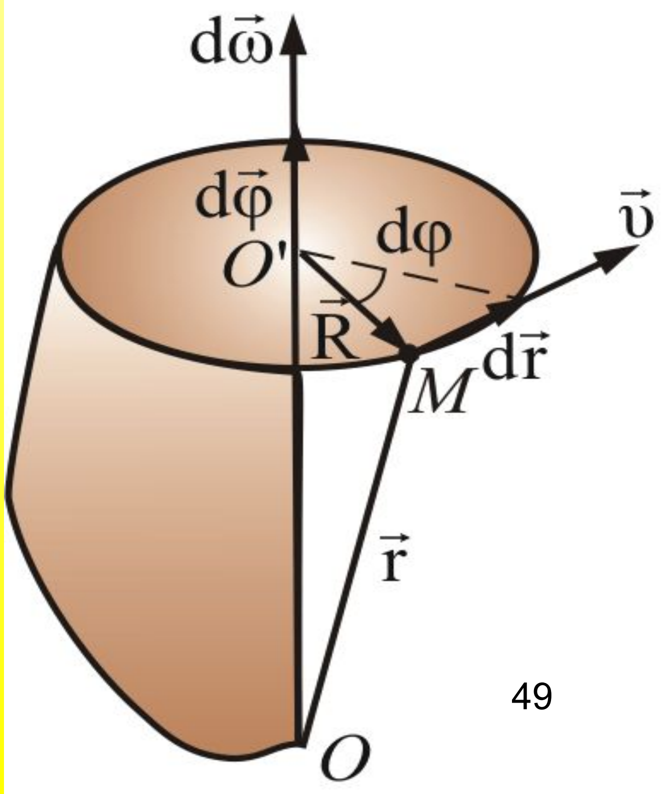
ни вторая производная $\dfrac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}$

не могут служить характеристикой движения всего твердого тела.



Угол поворота $d\varphi$ характеризует *переме-щения всего тела за время* dt (**угловой путь**)

Удобно ввести $d\vec{\varphi}$ – вектор элементарного поворота тела, численно равный $d\varphi$ и направленный вдоль оси вращения *OO'* так, чтобы глядя вдоль вектора $d\vec{\varphi}$ мы видели вращение по часовой стрелке (направление вектора $d\vec{\varphi}$ и направление вращения связаны правилом буравчика).

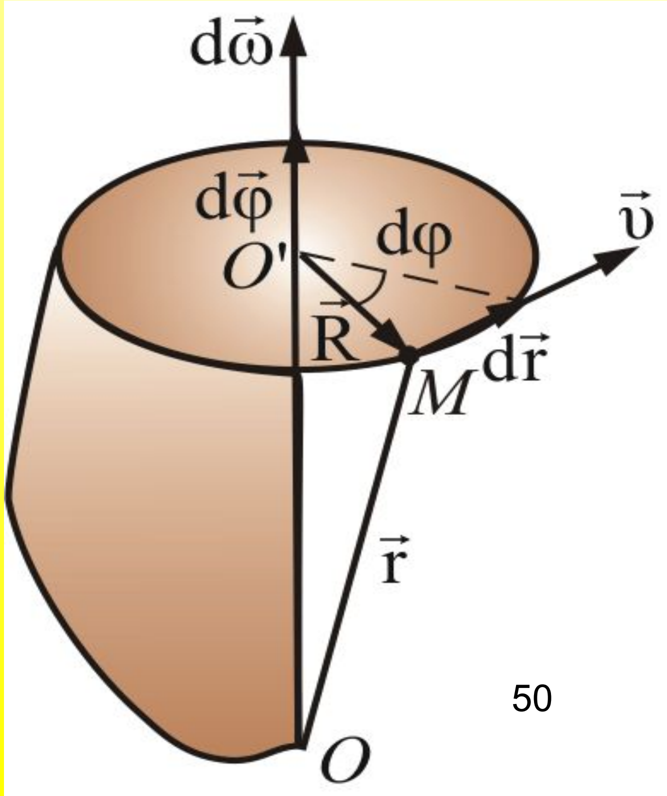


Элементарные повороты удовлетворяют обычному правилу сложения векторов:

$$d\vec{\varphi} = d\vec{\varphi}_1 + d\vec{\varphi}_2.$$

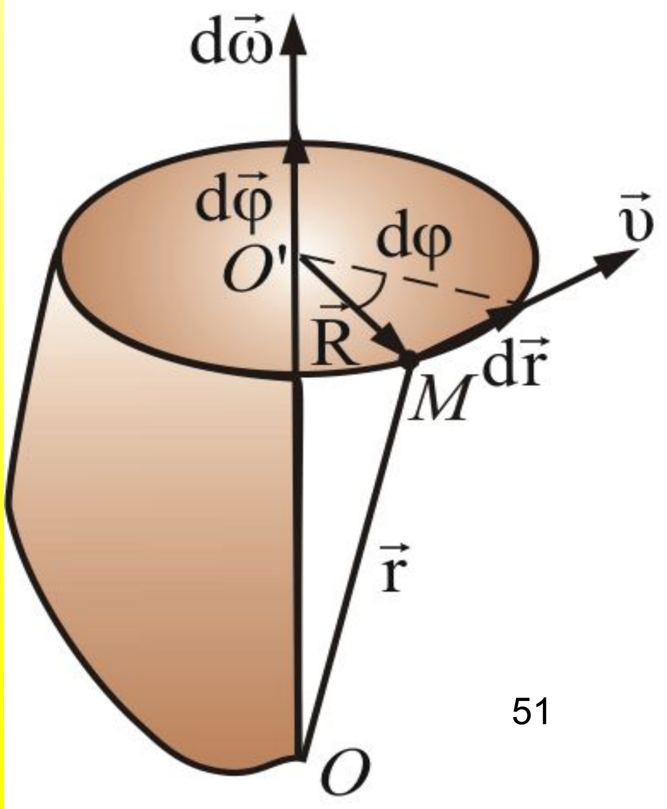
Угловой скоростью называется **вектор** $\vec{\omega}$ **численно равный первой производной от угла поворота по времени** и направленный вдоль оси вращения в направлении $d\vec{\varphi}$ ($\vec{\omega}$ и $d\vec{\varphi}$ всегда направлены в одну сторону).

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \qquad \omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$



Связь линейной и угловой скорости

Пусть $\vec{\upsilon}$ – линейная скорость точки *M*. За промежуток времени d*t* точка *M* проходит путь $\mathrm{d}r = \upsilon \mathrm{d}t.$ В то же время $\mathrm{d}r = R\mathrm{d}\varphi$ (центральный угол). Тогда,



$$\boxed{\upsilon = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{R\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \omega R}$$

$$\boxed{\upsilon = \omega R}$$

Период *Т* – *промежуток времени, в течение которого тело совершает полный оборот* (т.е. поворот на угол $\varphi = 2\pi$)

$$T = \frac{2\pi}{\omega};$$

Частота ν – *число оборотов тела за* 1 *сек.*

$$\nu = \frac{1}{T}.$$

Угловая скорость $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu;$

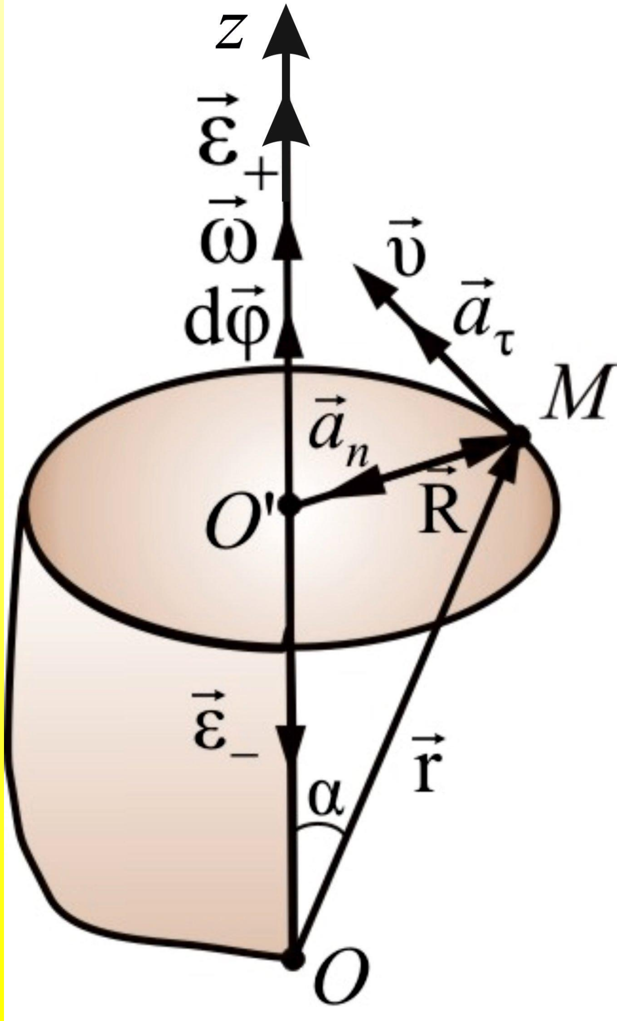
Введем вектор ***углового ускорения*** $\vec{\varepsilon}$ для характеристики *неравномерного вращения тела*:

$$\boxed{\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}} \quad (2.4.3)$$

Вектор $\vec{\varepsilon}_+$ направлен в ту же сторону, что и $\vec{\omega}$ при ускоренном вращении $\left(\frac{d\omega}{dt} > 0\right)$

а $\vec{\varepsilon}_-$ направлен в противоположную сторону при замедленном вращении $\left(\frac{d\omega}{dt} < 0\right)$

(рисунок 2.13).



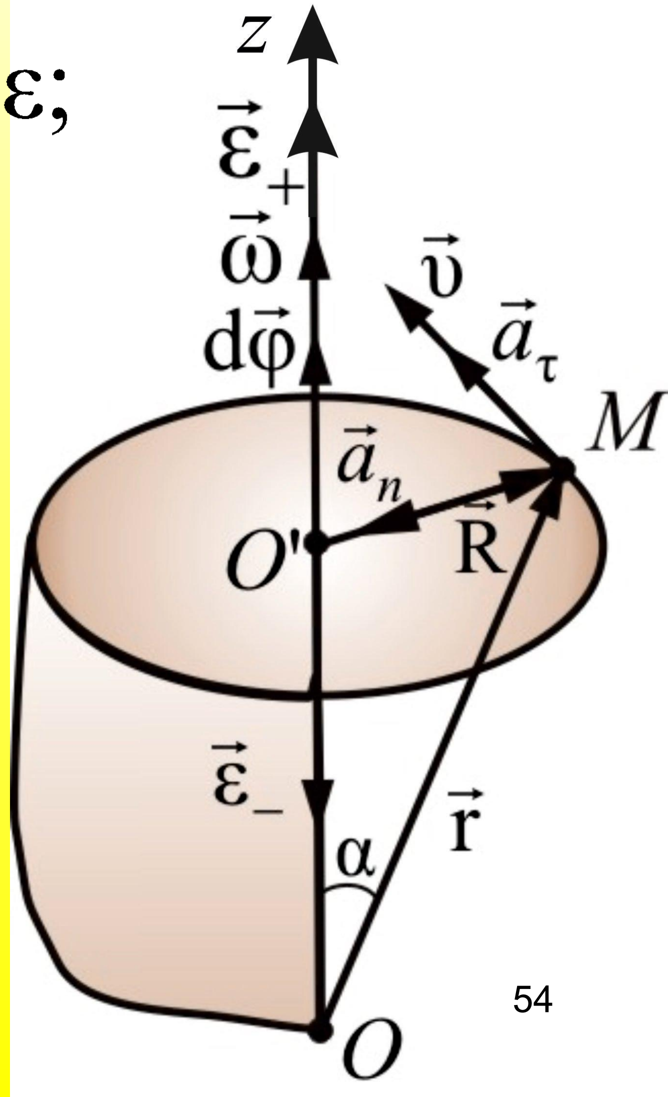
Выразим нормальное и тангенциальное ускорения точки *M* через угловую скорость и угловое ускорение:

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega R) = R\frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon;$$

$$\boxed{a_\tau = R\varepsilon;}$$

$$\boxed{a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \omega^2 R.}$$

$$\boxed{a_n = \frac{4\pi^2 R}{T^2} = 4\pi^2\nu^2 R}$$



Формулы простейших случаев вращения тела вокруг неподвижной оси:

- равномерное вращение $\varepsilon = 0;$ $\omega = \text{const};$

$$\boxed{\varphi = \varphi_0 \pm \omega t;}$$

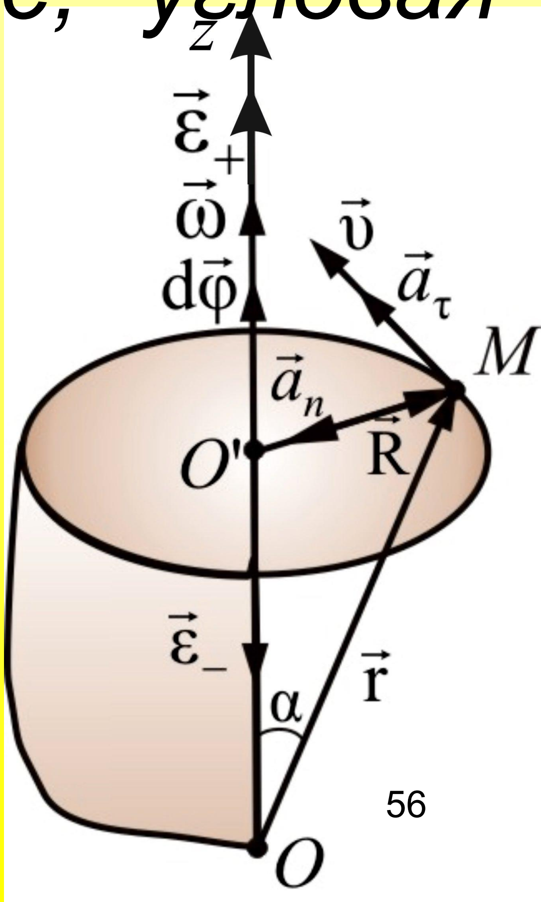
- равнопеременное вращение $\varepsilon = \text{const};$

$$\boxed{\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t}$$

$$\boxed{\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}}$$

Обратите внимание.

Все кинематические параметры, *характеризующие вращательное движение (угловое ускорение, угловая скорость и угол поворота)* ***направлены вдоль оси вращения.***



Связь между линейными и угловыми величинами при вращательном движении:

$$s = R\varphi$$

$$\upsilon = R\omega$$

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

$$a_n = \upsilon^2 / R = \omega^2 R$$

$$a_\tau = R \cdot \varepsilon.$$

$$a_n = \frac{4\pi^2 R}{T^2} = 4\pi^2 \nu^2 R$$

Поступательное движение	Вращательное движение
$\upsilon = \dfrac{dS}{dt}$	$\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$
$a = \dfrac{d\upsilon}{dt}$	$\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt}$
$\upsilon = \upsilon_0 \pm at$	$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t$
$S = \upsilon_0 t \pm \dfrac{at^2}{2}$	$\varphi = \omega_0 t \pm \dfrac{\varepsilon t^2}{2}$
$S = \int_0^t \upsilon dt$	$\varphi = \int_0^t \omega dt$