Решение простейших тригонометрических уравнений

Чтобы успешно решать простейшие тригонометрические уравнения необходимо следующее:

1) уметь отмечать точки на числовой окружности;

2) уметь определять значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса для точек числовой окружности;

3) знать свойства основных тригонометрических функций;

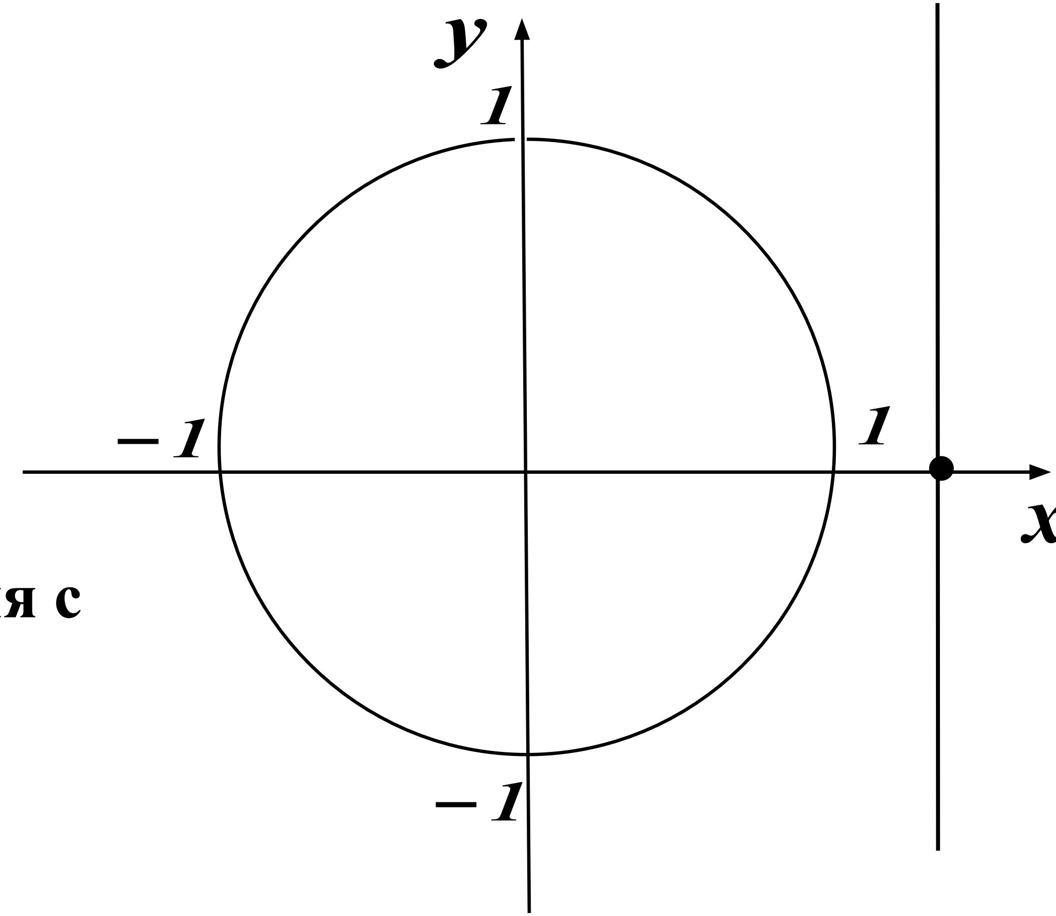
4) знать понятие арксинуса, арккосинуса, арктангенса, арккотангенса и уметь отмечать их на числовой окружности.

Простейшие тригонометрические уравнения – это уравнения вида

Cos $t = a$, Sin $t = a$, tg $t = a$, ctg $t = a$.

Арккосинус и решение уравнений cos t=a.

Решим при помощи числовой окружности уравнение cos t=a.



1) |a|>1

Нет точек пересечения с окружностью.
Уравнение *не имеет решений*.

Арккосинус и решение уравнений cos t=a.

Решим при помощи числовой окружности уравнение cos t=a.

2) |a|<1

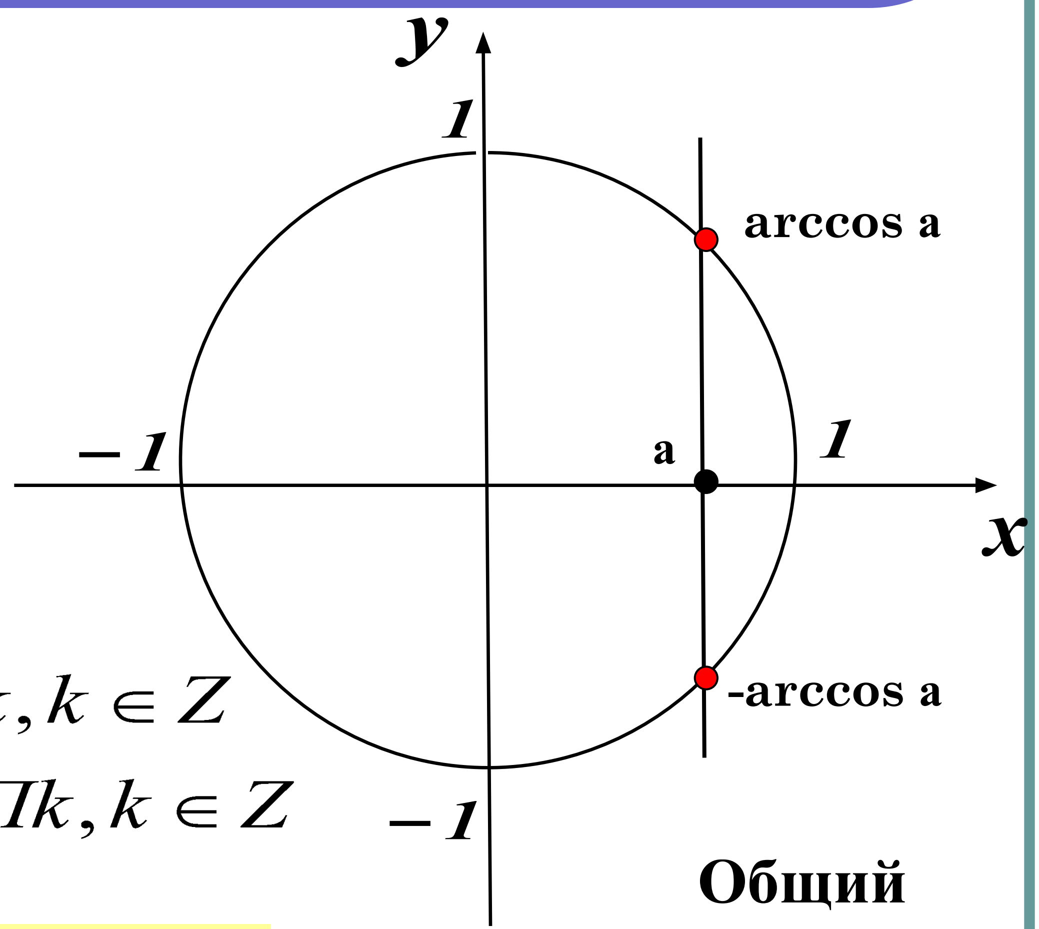
Корни, симметричные относительно Ох могут быть записаны:

Cos t=a

$$t = \left[\begin{array}{l} \arccos a + 2\Pi k, k \in Z \\ -\arccos a + 2\Pi k, k \in Z \end{array}\right.$$

или

t = ± arccos a + 2Пk, k€ Z



Общий случай

Арккосинус и решение уравнений cos t=a.

Решим при помощи числовой окружности уравнение cos t=a.

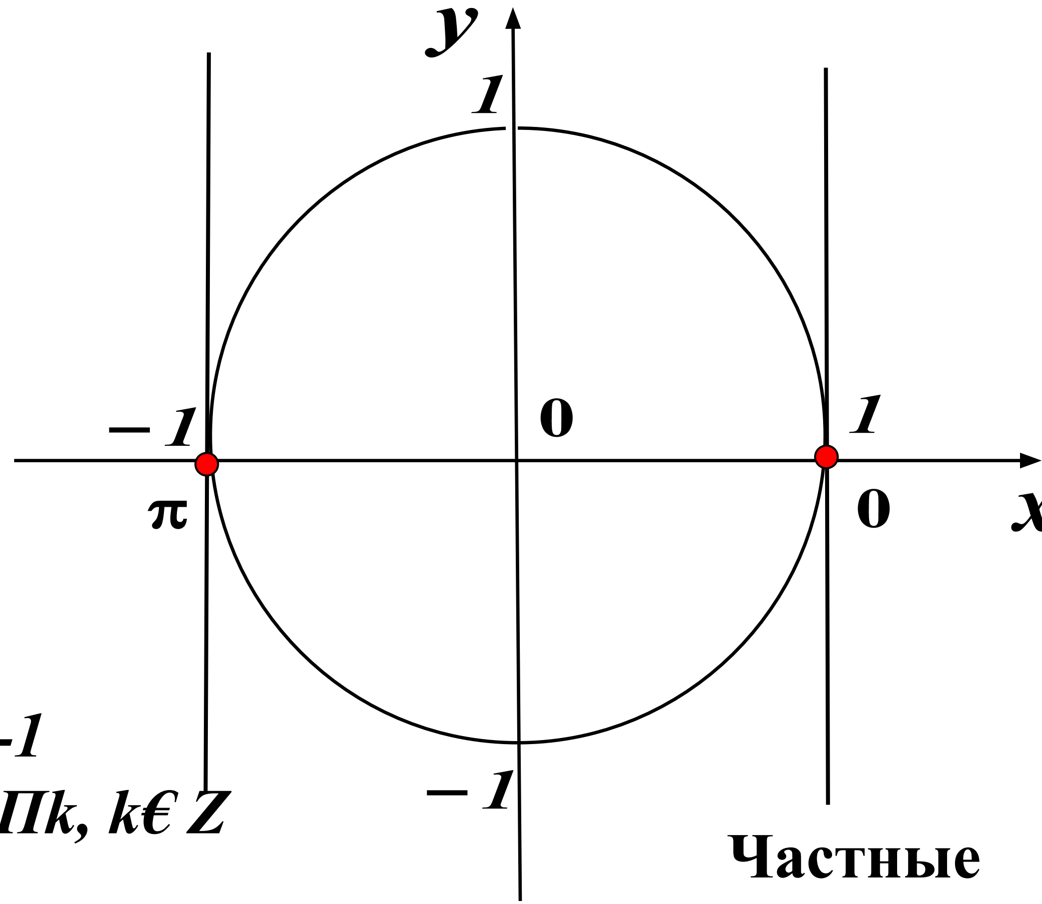
3) |a|=1

Cos t = 1

t = 2Пk, k€ Z

Cos t = -1

t = П+2Пk, k€ Z



Частные случаи

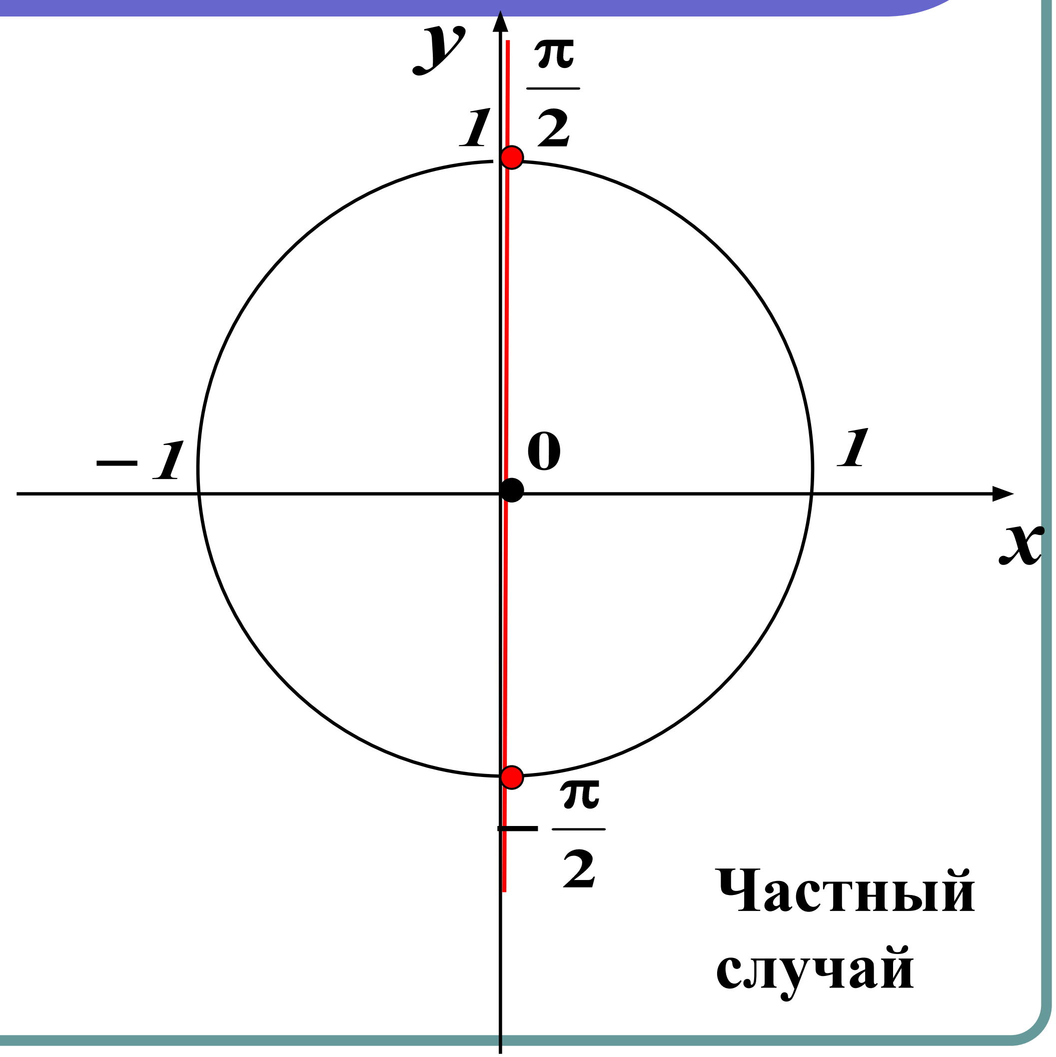
Арккосинус и решение уравнений cos t=a.

Решим при помощи числовой окружности уравнение cos t=a.

4) a=0

Cos t=0

$$t = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$$



Частный случай

Пример уравнения

$$\sqrt{2}\cos 4x - 1 = 0$$

Уравнение переносом слагаемого и делением обеих частей легко сводится к простейшему.

t

$$\cos 4x = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$4x = \pm\arccos\frac{1}{\sqrt{2}} + 2\pi k, k \in Z$$

$$4x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$$

Разделим обе части на 4.

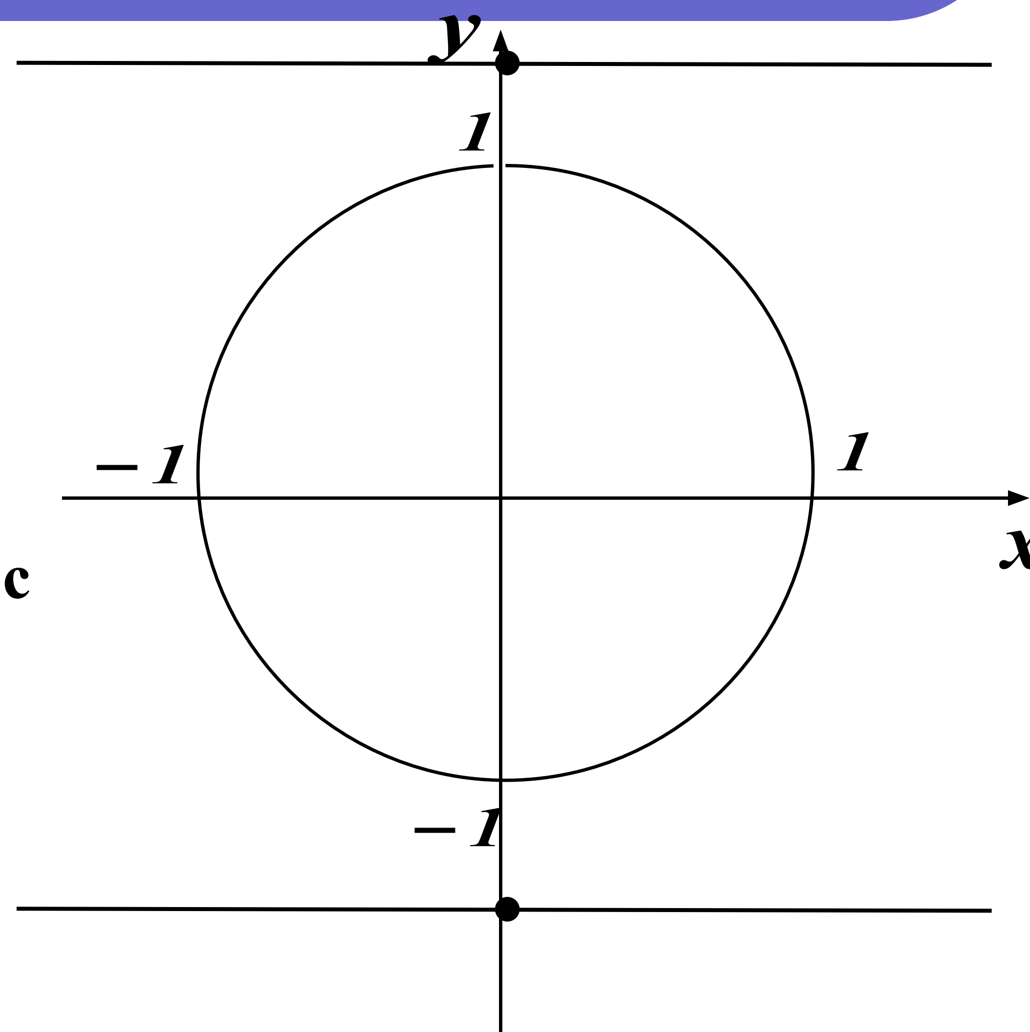
$$x = \pm\frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$

Арксинус и решение уравнений sin t=a.

Решим при помощи числовой окружности уравнение sin t=a.

1) |a|>1



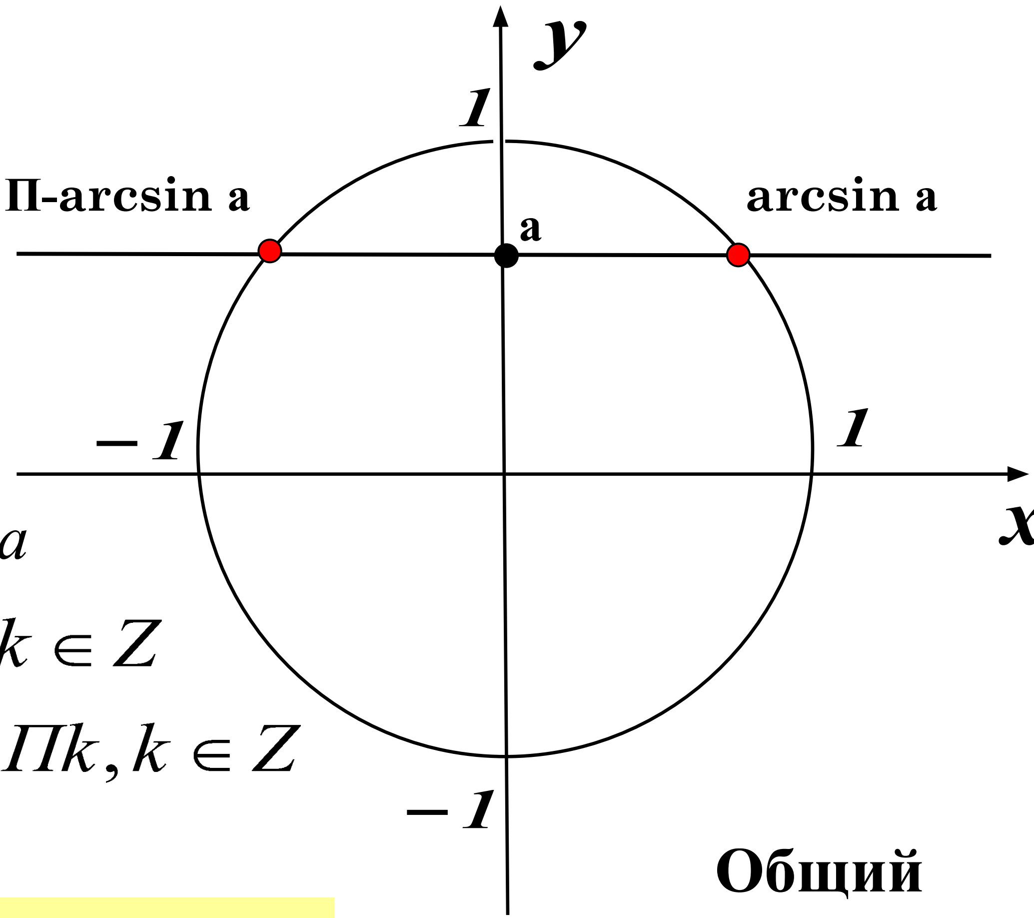
Нет точек пересечения с окружностью.
Уравнение *не имеет решений.*

Арксинус и решение уравнений sin t=a.

Решим при помощи числовой окружности уравнение sin t=a.

2) |a|<1

Корни, симметричные относительно Оу могут быть записаны: *Sin t=a*



$$t = \left[\begin{array}{l} \arcsin a + 2\Pi k, k \in Z \\ \Pi - \arcsin a + 2\Pi k, k \in Z \end{array} \right.$$

или

$t=(-1)^k \arcsin a+\Pi k, k \in Z$

Общий случай

Арксинус и решение уравнений sin t=a.

Решим при помощи числовой окружности уравнение sin t=a.

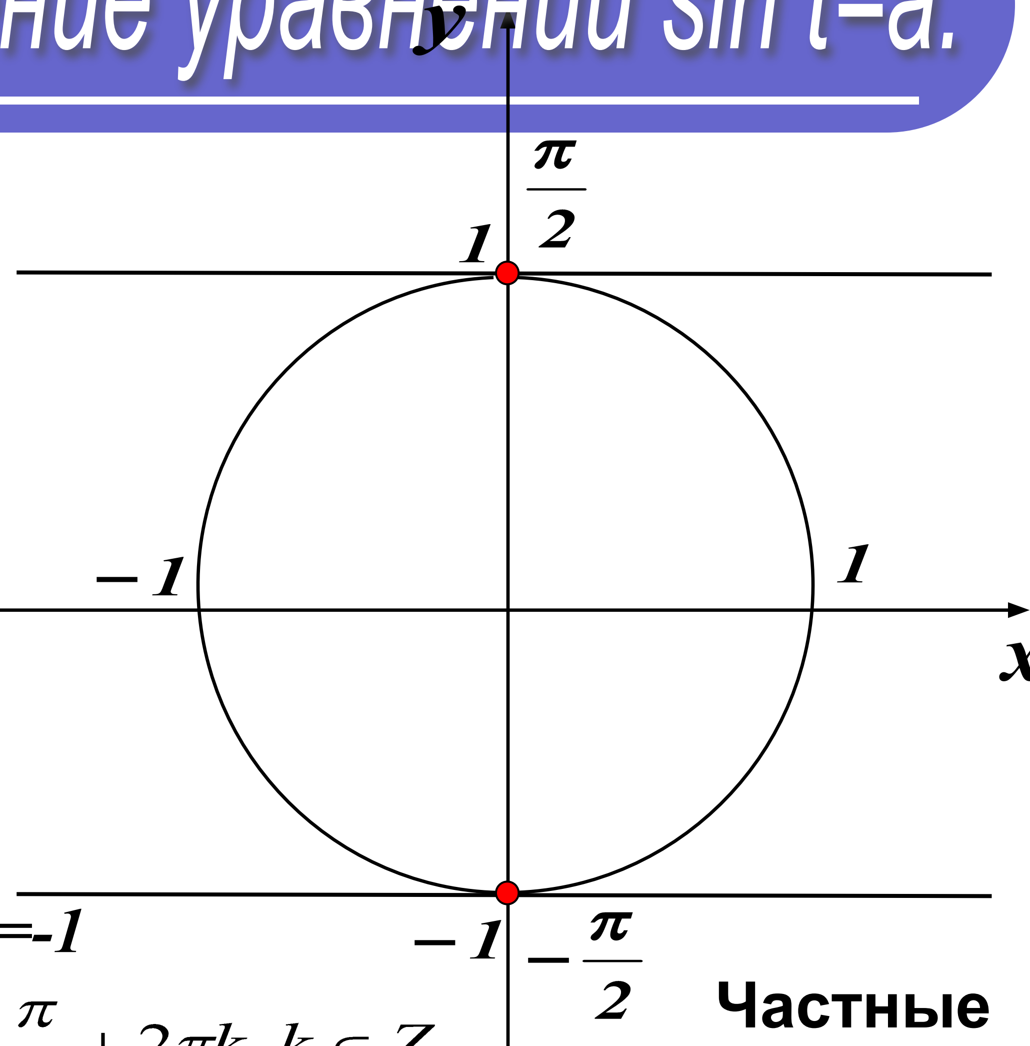
3) |a|=1

sin t=1

$$t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$$

sin t=-1

$$t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$$



Частные случаи.

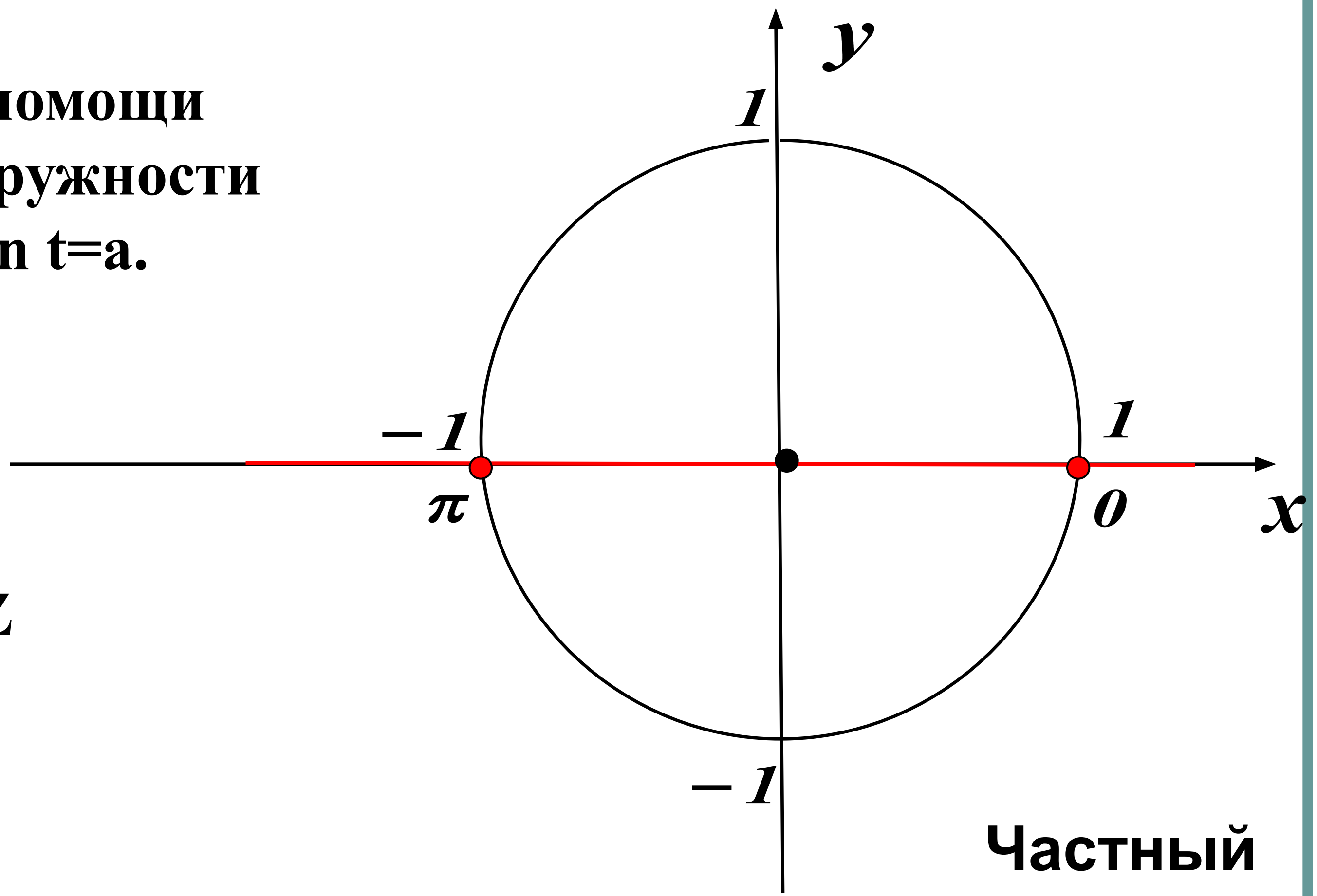
Арксинус и решение уравнений sin t=a.

Решим при помощи числовой окружности уравнение sin t=a.

4) a=0

Sin t=0

t=Пk, k € Z



Частный случай

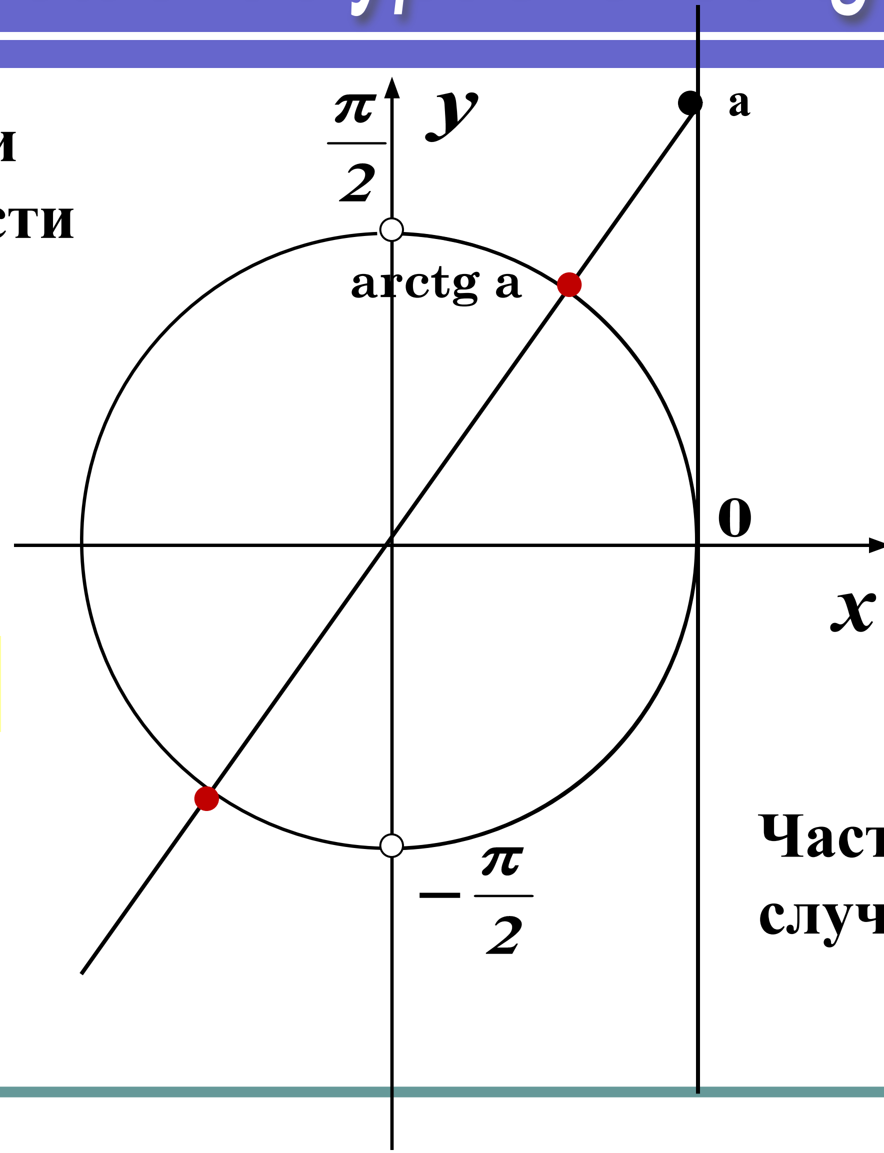
Арктангенс и решение уравнений tg t=a.

Решим при помощи числовой окружности уравнение tg t=a.

а – любое число.

tg t=a

t=arctg a + Пk, k€ Z



Частных случаев нет

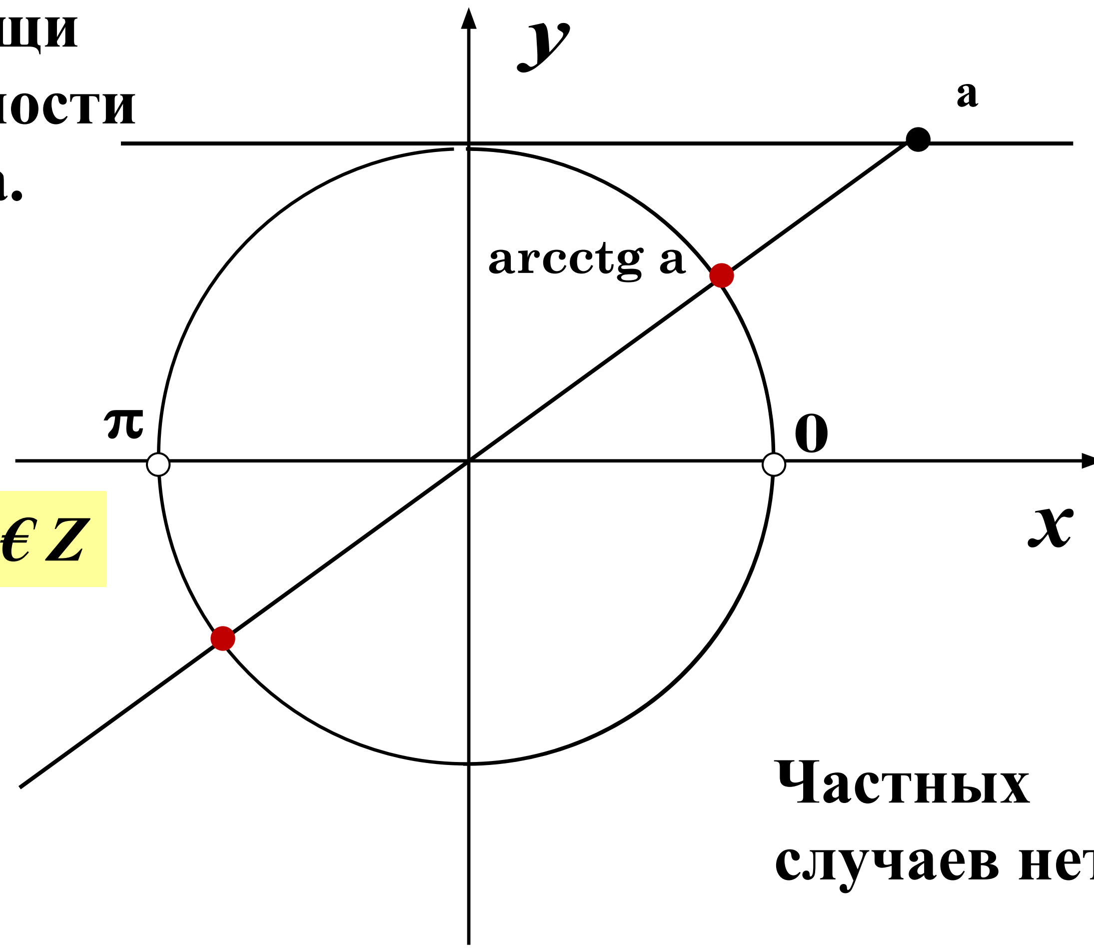
Арккотангенс и решение уравнений ctg t=a.

Решим при помощи числовой окружности уравнение ctg t=a.

а – любое число.

ctg t=a

t=arcctg a + Пk, k€ Z



Частных случаев нет

Простейшие тригонометрические уравнения

Ограничение	**Общий вид**	**Частные случаи**		
$\lvert a\rvert > 1$, **$\lvert a\rvert \leq 1$:**	корней нет $\cos t = a$, $t = \pm \arccos a + 2\pi k$, $k \in Z$	$a = 1$, $\cos t = 1$, $t = 2\pi k$, $k \in Z$	$a = 0$, $\cos t = 0$, $t = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$	$a = -1$, $\cos t = -1$, $t = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$
$\lvert a\rvert > 1$, **$\lvert a\rvert \leq 1$:**	корней нет $\sin t = a$, $0 < a < 1$, $t = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in Z$ $-1 < a < 0$ $t = (-1)^{k+1} \arcsin(-a) + \pi k$, $k \in Z$	$a = 1$, $\sin t = 1$, $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$	$a = 0$, $\sin t = 0$, $t = \pi k$, $k \in Z$	$a = -1$, $\sin t = -1$, $t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$
нет	$\mathrm{tg}\, t = a$, $t = \mathrm{arctg}\, a + \pi k$, $k \in Z$	----	----	----
нет	$\mathrm{ctg}\, t = a$, $t = \mathrm{arcctg}\, a + \pi k$, $k \in Z$	----	----	----