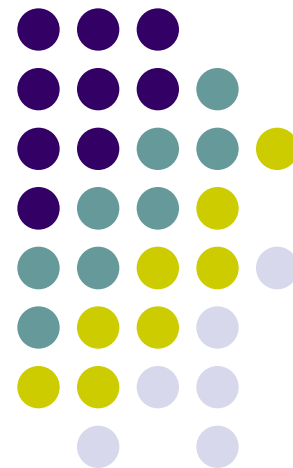


Уравнения и неравенства с параметрами



Уравнение вида $Ax=B$, где A, B – выражения, зависящие от параметров, а x – неизвестное, называется линейным уравнением с параметрами.



Решить уравнение с параметрами – значит для всех значений параметров найти множество всех корней заданного уравнения.

Линейное уравнение исследуется по следующей схеме:

1. Если $A=0$, то имеем уравнение $0 \cdot x=B$. Тогда, если, кроме того, $B \neq 0$, то уравнение не имеет решений, а если $B=0$, то уравнение имеет вид $0 \cdot x=0$ и удовлетворяется при любом x , т. е. решением уравнения будет множество всех действительных чисел.
2. Если $A \neq 0$, то уравнение имеет единственное решение $x=B/A$.

Замечание. Если линейное уравнение или уравнение, сводящееся в линейному, не представлено в виде $Ax=B$, то сначала нужно привести его к стандартному виду и только после этого проводить исследование.

Если для каких – нибудь значений параметров уравнение не имеет смысла, то для этих значений параметров оно не имеет решений. Кроме этого, уравнение может не иметь решений и при других значениях параметров.

Пример1. Для всех значений параметра k решить уравнение $(k+4)x=2k+1$



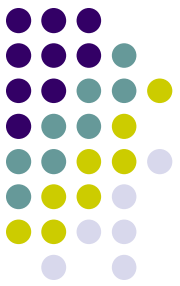
Уравнение уже записано в стандартном виде, поэтому проведем его исследование по указанной выше схеме.

1. Если $k+4=0$, т. е. $k=-4$, то уравнение имеет вид $0 \cdot x = -7$. Это равенство ни при каком x не выполняется, поэтому уравнение не имеет решений: $x \in \emptyset$.
2. Если $k+4 \neq 0$, т. е. $k \neq -4$, то обе части уравнения можно делить на $k+4$.

Тогда $x = \frac{2k+1}{k+4}$.

Ответ: если $k = -4$, то $x \in \emptyset$;

если $k \neq -4$, то $x = \frac{2k+1}{k+4}$.



Пример2. Для всех значений параметра a решить уравнение $\left(\frac{3}{4}a-1\right)x+3a-4=0$

Запишем уравнение в стандартном виде $\left(\frac{3}{4}a-1\right)x+3a-4=0$

Схема исследования.

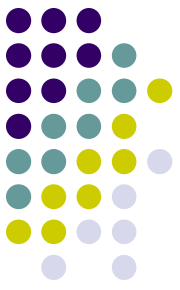
1) $\frac{3}{4}a-1=0 \Leftrightarrow a=\frac{4}{3}$. Тогда уравнение имеет вид $0 \cdot x=0$.

Это равенство верно при любом x . Следовательно, решением уравнения будет все множество действительных чисел: $x \in R$.

2) $\frac{3}{4}a-1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \frac{4}{3}$. Тогда $x = \frac{4-3a}{\frac{3}{4}a-1} = -4$.

Ответ: если $a = \frac{4}{3}$, то $x \in R$

если $a \neq \frac{4}{3}$, то $x = -4$.



Пример 3. Для всех значений параметра p решить уравнение $(p^2 - 1)x = p^3 + 1$.

1) $p^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow p = \pm 1$.

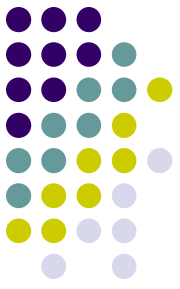
При $p = 1$ уравнение имеет вид $0 \cdot x = 2$. Следовательно, $x \in \emptyset$.

При $p = -1$ уравнение имеет вид $0 \cdot x = 0$. Следовательно, $x \in R$.

2) $p^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow p \neq \pm 1$.
$$x = \frac{p^3 + 1}{p^2 - 1} = \frac{(p+1)(p^2 - p + 1)}{(p+1)(p-1)} = \frac{p^2 - p + 1}{p-1}$$

Ответ: если $p = 1$, то $x \in \emptyset$; если $p = -1$, то $x \in R$;

если $p \neq \pm 1$, то $x = \frac{p^2 - p + 1}{p-1}$.



Пример 4. При каких значениях параметра a уравнение

$$\frac{a+1}{x-a} = \frac{2a}{a-2} \text{ имеет положительные решения.}$$

Если $a=2$, то $x \in \emptyset$.

Если $a \neq 2$, то уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 2a(x-a) = (a+1)(a-2), \\ x-a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2ax = 3a^2 - a - 2, \\ x \neq a. \end{cases}$$

1) Если $a=0$, то имеем $0 \cdot x = -2 \Rightarrow x \in \emptyset$.

2) Если $a \neq 0$ (и $a \neq 2$), то $x = \frac{3a^2 - a - 2}{2a}$.

Найдем значения параметра a , при которых $x=a$. Имеем:

$$\frac{3a^2 - a - 2}{2a} = a \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - a - 2 = 0, \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1, \\ a = 2. \end{cases}$$

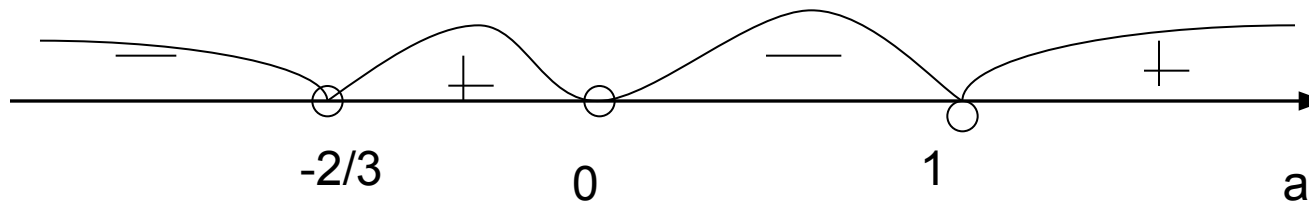
Таким образом, если $a \in \{-1; 0; 2\}$, то исходное уравнение не имеет решения;

если $a \notin \{-1; 0; 2\}$, то оно имеет единственное решение $x = \frac{3a^2 - a - 2}{2a}$.

Это решение будет положительным, если параметр a удовлетворяет неравенству

$$\frac{3a^2 - a - 2}{2a} > 0 \Leftrightarrow \frac{3(a-1)\left(a + \frac{2}{3}\right)}{2a} > 0.$$

Решим полученное неравенство методом интервалов:



Из найденного множества значений параметра a надо еще исключить $a=2$, при котором уравнение не имеет смысла. Остальные значения параметра a , при которых уравнение не имеет решения множеству $(-2/3;0) \cup (1;+\infty)$ не принадлежит.

Ответ: при $a \in \left(-\frac{2}{3}; 0\right) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$.



Пример 5. При каких значениях параметров a и b уравнение $(2a+b)x^2 + (a+b)x - 1 = 0$ имеет \dots решений.

В данном случае необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{cases} 2a+b=0, \\ a+b-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2a, \\ a-2b-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2a, \\ a \neq -1 \end{cases}$$

или, что равносильно,

$$\begin{cases} a = -b/2, \\ -b/2 \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b/2, \\ b \neq 2. \end{cases}$$

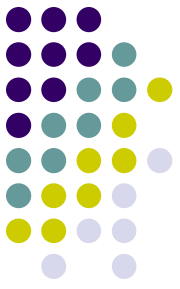
Ответ: при $a \neq -1, b = -2a$ (или $a = -b/2, b \neq 2$)

Уравнения и неравенства с параметрами

Квадратные уравнения



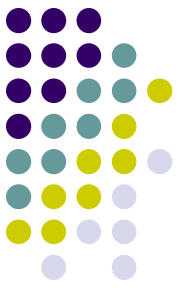
Уравнение вида $Ax^2 + Bx + C = 0$, где A, B, C – выражения, зависящие от параметров, а x – неизвестное, называется квадратным уравнением с параметрами.



В множестве действительных чисел это уравнение исследуется по следующей схеме.

1. Если $A=0$, то имеем линейное уравнение $Bx + C = 0$.
2. Если $A \neq 0$ и дискриминант уравнения $D = B^2 - 4AC < 0$, то уравнение не имеет действительных решений.
3. Если, $A \neq 0$ и $D = 0$, то уравнение имеет единственное решение $x = -B/2A$ или, как ещё говорят, совпадающие корни $x_1 = x_2 = -B/2A$.
4. Если $A \neq 0$ и $D > 0$, то уравнение имеет два различных корня

$$x_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{D}}{2A}$$



Пример 6. Найти все значения параметра a , для которых квадратное уравнение $(a-1)x^2 + 2(2a+1)x + 4a+3=0$

а) имеет два различных корня; б) не имеет корней; в) имеет один корень.

Данное уравнение по условию является квадратным, поэтому $a-1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 1$. Рассмотрим дискриминант уравнения

$$D = 4(2a+1)^2 - 4(a-1)(4a+3) = 4(5a+4)$$

Согласно схеме исследования, имеем:

$$а) \begin{cases} D > 0, \\ a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(5a+4) > 0, \\ a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -\frac{4}{5}, \\ a \neq 1 \end{cases}$$

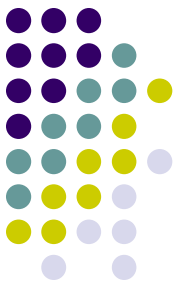
$$б) \begin{cases} D < 0, \\ a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < -\frac{4}{5}, \\ a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow a < -\frac{4}{5};$$

$$в) \begin{cases} D = 0, \\ a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{4}{5}, \\ a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = -\frac{4}{5}.$$

Ответ: если $a > -\frac{4}{5}$ и $a \neq 1$, то уравнение имеет два различных корня;

если $a < -\frac{4}{5}$, то оно не имеет корней;

если $a = -\frac{4}{5}$, то оно имеет один корень.



Пример 7. При каких значениях параметра a уравнение $(a+6)x^2 + 2ax + 1 = 0$ имеет единственное решение.

По условию задачи уравнение необязательно является квадратным, поэтому надо рассмотреть два случая.

1) $a + 6 = 0 \Leftrightarrow a = -6$. При этом получаем линейное уравнение $-12x + 1 = 0$, которое имеет единственное решение.

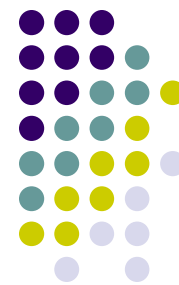
Это решение по условию задачи необязательно находить.

2) $a \neq -6$. В этом случае уравнение является квадратным и имеет единственное решение,

если дискриминант $D = 4a^2 - 4(a + 6) = 4(a^2 - a - 6)$

равен нулю, т.е. $a^2 - a - 6 = 0 \Leftrightarrow a_1 = 3, a_2 = -2$

Ответ: при $a \in \{-6; -2; 3\}$



Пример 8. При каких значениях параметра a уравнение $(a^2 - a - 2)x^2 + (a + 1)x + 1 = 0$ не имеет решений. Снова надо рассмотреть два случая.

$$1) a^2 - a - 2 = 0 \Leftrightarrow a_1 = 2, a_2 = -1.$$

При $a = 2$ получаем линейное уравнение $3x + 1 = 0$, которое имеет решение.

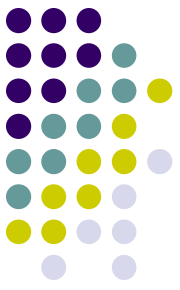
При $a = -1$ уравнение имеет вид $0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 1 = 0$, поэтому не имеет решений.

2) $a^2 - a - 2 \neq 0 \Leftrightarrow a_1 \neq 2, a_2 \neq -1$. В данном случае уравнение является квадратным и оно не имеет решений, если дискриминант $D = (a + 1)^2 - 4(a^2 - a - 2) = -3a^2 + 6a + 9 = -3(a - 3)(a + 1)$ отрицателен, т. е.

$$D < 0 \Leftrightarrow -3(-3)(a + 1) < 0 \Leftrightarrow (-3)(a + 1) > 0 \Leftrightarrow a \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty).$$

Теперь с учетом первого случая получаем

Ответ: при $a \in (-\infty; -1] \cup (3; +\infty)$.



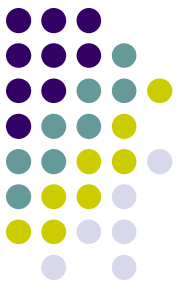
Пример 9. При каких значениях параметров a и b уравнение $(a^2 + a - 6)x^2 + (a - b + 4)x + a^2 + 4a + 3 = 0$ имеет не менее трех различных решений.

Если квадратное или линейное уравнение имеет более двух различных решений, то оно обязательно имеет бесконечное множество решений, совпадающее с \mathbb{R} .

Это возможно тогда и только тогда, когда уравнение имеет вид $0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 = 0$, т.е.

$$\begin{cases} a^2 + a - 6 = 0 \\ a - b + 4 = 0 \\ a^2 + 4a + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 2, a_2 = -3 \\ b = a + 4 \\ a_3 = -1, a_4 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 1 \end{cases}$$

Ответ: при $a = -3, b = 1$.



Пример 10. Для всех значений параметра a решить уравнение $(a-1)x^2 - 2ax + a + 2 = 0$

1) $a-1=0 \Leftrightarrow a=1$. Уравнение имеет вид $-2x+3=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$

2) $a \neq 1$. Найдем дискриминант уравнения $D = 4a^2 - 4(a-1)(a+2) = -4a + 8$.

В зависимости от значения D возможны случаи.

а) $\begin{cases} D < 0 \\ a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a+8 < 0 \\ a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 2, \\ a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow a > 2$. Уравнение не имеет решений, т.е. $x \in \emptyset$.

б) $\begin{cases} D = 0 \\ a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a+8 = 0 \\ a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = 2$. Тогда $x = \frac{a}{a-1} = \frac{2}{2-1} = 2$.

в) $\begin{cases} D > 0 \\ a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a+8 > 0 \\ a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 2, \\ a \neq 1 \end{cases}$ Уравнение имеет два различных корня $x_{1,2} = \frac{2a \pm \sqrt{-4a+8}}{2(a-1)} = \frac{a \pm \sqrt{2-a}}{a-1}$.

Ответ: если $a=1$, то $x = \frac{3}{2}$;

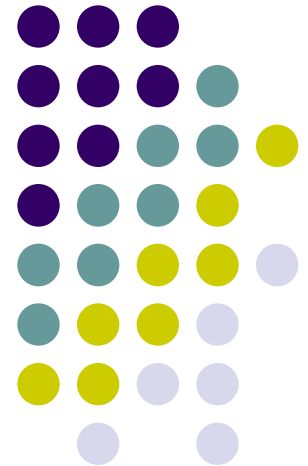
если $a=2$, то $x=2$;

если $a > 2$, то $x \in \emptyset$;

если $a < 2$ и $a \neq 1$, то $x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{2-a}}{a-1}$.

Уравнения и неравенства с параметрами

Квадратные уравнения.
Теорема Виета.



квадратными уравнениями, содержащими параметры, используются следующие теоремы.



Теорема Виета.

Если x_1, x_2 – корни квадратного уравнения $Ax^2 + Bx + C = 0, A \neq 0$, то

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{B}{A}, \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{C}{A}. \end{cases}$$

Теорема 1.

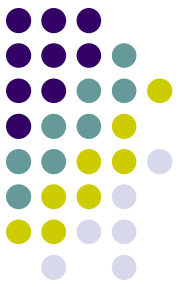
Для того, чтобы корни квадратного трехчлена $Ax^2 + Bx + C$ были действительны и имели одинаковые знаки, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$D = B^2 - 4AC \geq 0, x_1 \cdot x_2 = \frac{C}{A} > 0$$

При этом оба корня будут положительными, если $x_1 + x_2 = -\frac{B}{A} > 0$,

и оба отрицательными, если $x_1 + x_2 = -\frac{B}{A} < 0$.

При решении многих задач, связанных с квадратными уравнениями, содержащими параметры, используются следующие теоремы.



Теорема 2.

Для того, чтобы корни квадратного трехчлена $Ax^2 + Bx + C$ были действительны и оба неотрицательны или оба неположительны, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$D = B^2 - 4AC \geq 0, x_1 \cdot x_2 = \frac{C}{A} \geq 0$$

При этом оба корня будут неотрицательны, если $x_1 + x_2 = -\frac{B}{A} \geq 0$,

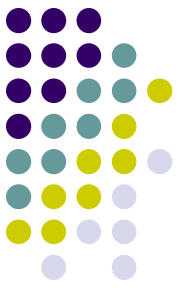
и оба корня будут неположительны, если $x_1 + x_2 = -\frac{B}{A} \leq 0$.

Теорема 3.

Для того, чтобы корни квадратного трехчлена $Ax^2 + Bx + C$ были действительны и имели разные знаки, необходимо и достаточно выполнение условия:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{C}{A} < 0$$

При этом условие $D = B^2 - 4AC > 0$ выполняется автоматически.



Пример 11. При каких значениях параметра a уравнение $x^2 - 2(a+1)x + a^2 = 0$ имеет действительные корни сумма квадратов которых равна 4.

По условию уравнение должно иметь действительные корни, т.е.

$D \geq 0$, $x_1^2 + x_2^2 = 4$, x_1, x_2 корни уравнения.

Значит,

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ x_1^2 + x_2^2 = 4 \end{cases} \quad D = 4(a+1)^2 - 4a^2 = 8a + 4,$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4(a+1)^2 - 2a^2 = 2a^2 + 8a + 4$$

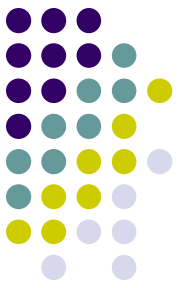
так как по теореме Виета $x_1 + x_2 = 2(a+1)$ $x_1x_2 = a^2$

$$\begin{cases} 8a + 4 \geq 0 \\ 2a^2 + 8a + 4 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq -\frac{1}{2} \\ 2a^2 + 8a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq -\frac{1}{2} \\ \begin{cases} a = -4 \\ a = 0 \end{cases} \end{cases}$$

отсюда $a = 0$.

Ответ: при $a = 0$

Пример 12. При каких значениях параметра t уравнение $x^2 - tx - 20t = 0$ имеет действительные корни отличающиеся друг от друга на 9.



По условию $D \geq 0$ и $x_1 - x_2 = 9$ или $x_2 - x_1 = 9$, т.е. $|x_1 - x_2| = 9 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 81$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4(x_1 x_2) = 81$$

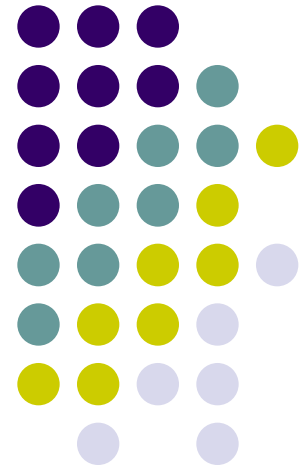
Так как $D = t^2 + 80t$, а по формулам Виета $(x_1 + x_2) = t$, $(x_1 x_2) = -20t$, то имеем

$$\begin{cases} m^2 + 80m \geq 0 \\ m^2 + 80m = 81 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 + 80m = 81 \Leftrightarrow m_1 = -81 \quad m_2 = 1$$

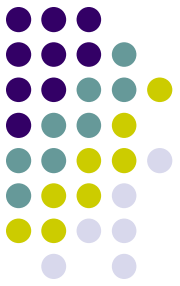
Ответ: при $t \in \{-81; 1\}$.

Уравнения и неравенства с параметрами

Квадратные неравенства.



Неравенства видов $Ax^2 + Bx + C > 0$ (≥ 0), $Ax^2 + Bx + C < 0$ (≤ 0) где A, B, C – выражения, зависящие от параметров, $A \neq 0$? а x - неизвестное, называются квадратным неравенствами с параметрами.



Неравенство $Ax^2 + Bx + C > 0$ исследуется по следующей схеме.

1. Если $A=0$, то имеем линейное неравенство $Bx + C > 0$.
2. Если $A \neq 0$ и дискриминант $D > 0$, то разлагая квадратный трехчлен на множители, получим неравенство $A(x-x_1)(x-x_2) > 0$, где x_1, x_2 -корни уравнения $Ax^2 + Bx + C = 0$.
3. Если, $A \neq 0$ и $D = 0$, то имеем неравенство $A(x-x_1)^2 > 0$.
4. Если $A \neq 0$ и $D < 0$, то при $A > 0$ решением будет все множество действительных чисел \mathbb{R} ; при $A < 0$ неравенство решений не имеет.

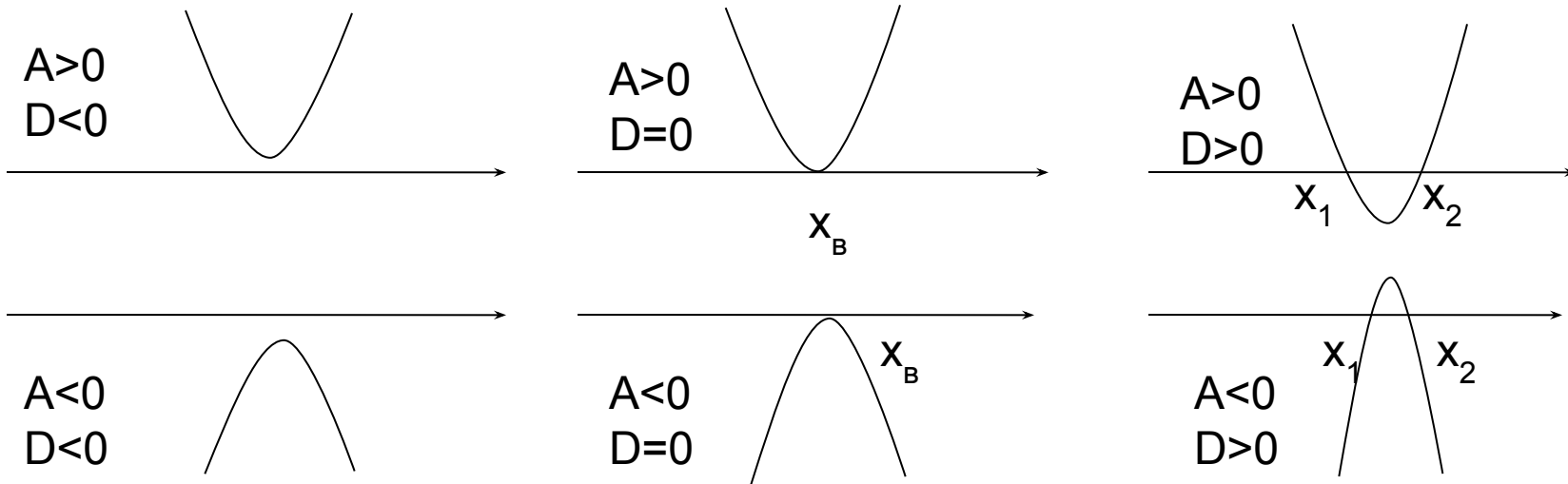
Остальные неравенства исследуются аналогично

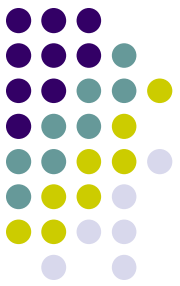
Часто при решении квадратных неравенств используются следующие свойства квадратного трехчлена $Ax^2 + Bx + C$:

1. Если $A > 0$ и $D < 0$, то $Ax^2 + Bx + C > 0$ при всех x ;
2. Если $A < 0$ и $D < 0$, то $Ax^2 + Bx + C < 0$ при всех x .



При решении многих задач, связанных с квадратичной функцией $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, $A \neq 0$, в частности, при решении квадратных неравенств удобно использовать схематическое изображение графика функции $y = f(x)$ - параболы, которая в зависимости от коэффициента A и дискриминанта D имеет следующие расположения относительно оси абсцисс.





Пример 13. Для всех значений параметра p неравенство $x^2 + 2(p+1)x + p^2 > 0$.

Найдем дискриминант

$$D = 4(p+1)^2 - 4p^2 = 8p + 4 = 4(2p+1).$$

Возможны случаи.

1) *Даже если $2p+1 < 0$ как коэффициент при x равен $2(2p+1)$, положителен, то неравенство выполняется при всех x , т. е. $x \in \mathbb{R}$.*

$$2) D = 0 \Leftrightarrow 2p+1 = 0 \Leftrightarrow p = -\frac{1}{2}.$$

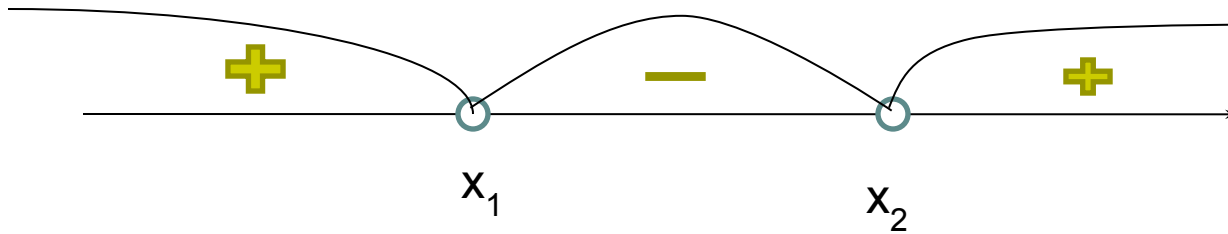
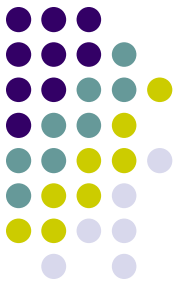
При этом неравенство имеет вид $x^2 + x + \frac{1}{4} > 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

3) *Даже квадратный трехчлен расположенный в левой части неравенства, имеет корни*

$$x_1 = -p-1-\sqrt{2p+1}, \quad x_2 = -p-1+\sqrt{2p+1},$$

причем $x_1 < x_2$. Разлагая этот трехчлен на множители, имеем:

$$(x-x_1)(x-x_2) > 0, \text{ откуда методом интервалов находим:}$$



$$x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$$

Заметим, что случаи 2 и 3 можно объединить.

Ответ: если $p < -\frac{1}{2}$, то $x \in R$;

если $p \geq -\frac{1}{2}$, то $x \in (-\infty; -p-1-\sqrt{2p+1}) \cup (-p-1+\sqrt{2p+1}; +\infty)$.