

Дискретная математика

Преподаватель

Горшков Евгений Александрович

Введение

Дискретная математика – направление в математике, объединяющее отдельные её разделы, ранее сформированные как самостоятельные теории. К ним относятся математическая логика и теории множеств, графов, кодирования, автоматов.

Дискретной математикой называют совокупность математических дисциплин, изучающих свойства математических моделей объектов, процессов, зависимостей, существующих в реальном мире, которыми оперируют в различных областях знаний.

1.1. Общие понятия теории множеств

Совокупность элементов, объединённых некоторым признаком, свойством, составляет понятие **множество**. Например, *множество* книг в библиотеке, *множество* студентов в группе, *множество* натуральных чисел \mathbb{N} и т.д.

Запись $a \in M$ означает: элемент a *принадлежит* Множеству M , т. е. элемент a обладает некоторым признаком. Аналогично читается: элемент a *не принадлежит* множеству M .

1.1. Общие понятия теории множеств

- Каждый объект, входящий в множество, называется его элементом, а свойство их объединяющее – характеристическим свойством множества.
- Множества принято обозначать большими буквами латинского алфавита: A, B, C, \dots , либо буквами с нижними индексами A_1, A_2, \dots , элементы множества – соответствующими малыми латинскими буквами.

Изображение множеств

Множества удобно изображать с помощью *кругов Эйлера*.

Множество K на рис. 1.1 называют **подмножеством** множества M и обозначают

$$K \subset M$$

Множество K называется **подмножеством** множества

M ($K \subset M$) если для любого

$x \in K$ выполняется $x \in M$

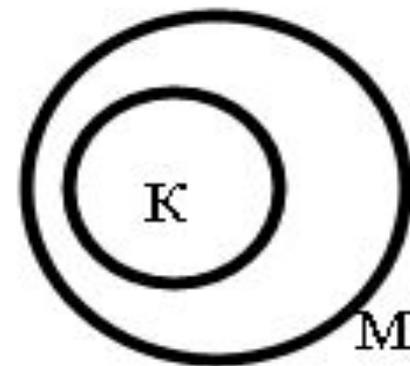


Рис. 1.1.

Универсальным называется множество U , состоящее из всех возможных элементов, обладающих данным признаком.

Если множество не содержит элементов, обладающих данным признаком, то оно называется **пустым** и обозначается символом (квантором) \emptyset .

Равными называют два множества A и B , состоящие из одинаковых элементов: $A = B$

Число элементов множества A называется **мощностью** множества и обозначается $|A|$ или $n(A)$.

Определение. Множество B называется подмножеством множества A , если каждый элемент множества B является элементом множества A .

Обозначение: $B \subset A$

Каждое множество является подмножеством (несобственным) самого себя $A \subseteq A$.

Множество, элементами которого являются подмножества множества M , называется *семейством множества M* или *булеаном* этого множества и обозначается $B(M)$.

Мощность булеана множества M вычисляется по формуле

$$|B(M)| = 2^n$$

где n – это мощность множества M .

Пример. $M = \{y, x, a\}, n = 3, |B(M)| = 2^3 = 8,$

$$B(M) = \{\emptyset, \{y\}, \{x\}, \{a\}, \{y, x\}, \{x, a\}, \{y, a\}, \{y, x, a\}\}.$$

Множество считается **заданным**, если *перечислены* все его элементы, или *указано свойство*, которым обладают те и только те элементы, которые принадлежат данному множеству. Само свойство называется **характеристическим**.

В качестве характеристического свойства может выступать указанная для этого свойства *порождающая процедура*, которая описывает способ получения элементов нового множества из уже полученных элементов или из других объектов.

Примеры задания множества

Множество всех чисел, являющихся неотрицательными степенями числа 2 можно задать:

а) перечислением элементов: $M_{2^n} = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots\}$

б) указанием характеристического свойства:

$$; M_{2^n} = \{2^i \mid i \in \mathbb{Z}, i \geq 0\}$$

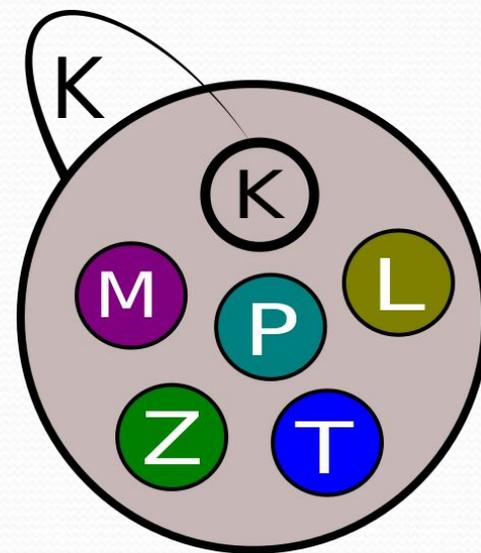
в) с помощью порождающей процедуры по *индуктивным* правилам:

$$\begin{array}{l} ; \quad 1 \in M_{2^n} \\ \text{если} \quad , \text{ то} \quad k \in M_{2^n} \quad (2k) \in M_{2^n} \end{array}$$

Парадокс Рассела (брадобрея).

Единственному деревенскому брадобрею приказали: «*Брить всякого, кто сам не бреется, и не брить того, кто сам бреется*». Кто побреет брадобрея?

Пусть — множество Пусть — множество всех множеств, которые не содержат себя в качестве своего элемента. Содержит ли само себя в качестве элемента? Если предположить, что содержит, то мы получаем противоречие с "Не содержат себя в качестве своего элемента". Если предположить, что не содержит себя как элемент, то вновь возникает противоречие, ведь — множество всех множеств, которые не содержат себя в качестве своего элемента, а значит должно содержать все возможные элементы, включая и себя.



- Другая версия парадокса.
- Прилагательное русского языка назовем рефлексивным, если оно обладает тем свойством, которое определяет. Например, прилагательное «русский» – рефлексивное, а прилагательное «английский» – нерефлексивное. Прилагательное «трехсложный» – рефлексивное (состоит из трех слогов). А прилагательное «четырёхсложный» – нерефлексивное (состоит из пяти слогов).
- Интересно: а прилагательное «трудновыговариваемое» рефлексивно или нет?
- Следовательно, все прилагательные можно разделить на два множества: рефлексивные и нерефлексивные прилагательные. Но рассмотрим само прилагательное «нерефлексивный». Оно рефлексивное или нет?

1.2. Основные операции над множествами

Суммой или *объединением* двух множеств X и Y называется множество, состоящее из элементов, входящих или во множество X , или во множество Y , а может в оба множества одновременно (рис. 1.2). Обозначение: $Z = X \cup Y$.

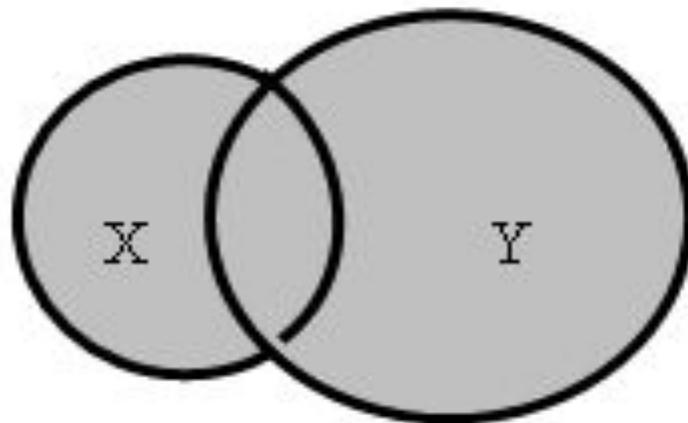


Рис. 1.2

Пересечением множеств X и Y называется множество, состоящее из элементов, входящих одновременно и во множество X , и во множество Y (рис. 1.3). Обозначение: $Z = X \cap Y$.

Разностью множеств X и Y называется множество Z , содержащее все элементы множества X , не содержащиеся в Y (рис. 1.4); эта разность обозначается $Z = X \setminus Y$.

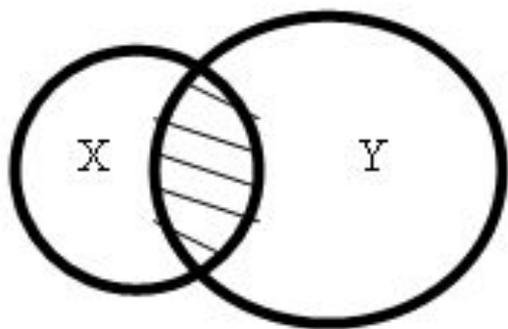


Рис. 1.3

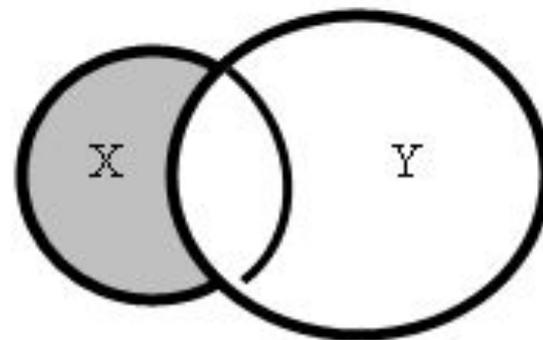


Рис. 1.4

Дополнением множества X до универсального множества U (рис. 1.6) является множество

$$\bar{X} = \{x_i \mid x_i \notin X, x_i \in U\}.$$

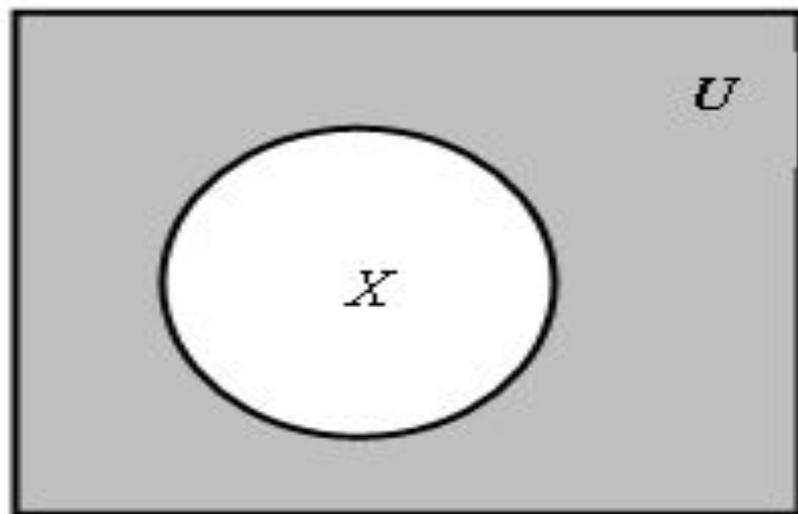


Рис. 1.5

Симметрической разностью множеств X и Y называется множество Z , содержащее *либо* элементы множества X , *либо* элементы множества Y , но не те и другие одновременно (рис. 1.6); эта разность обозначается $X \dot{\setminus} Y$.

$$= X \dot{\setminus} Y \quad (X \setminus Y) \sqcup (Y \setminus X)$$

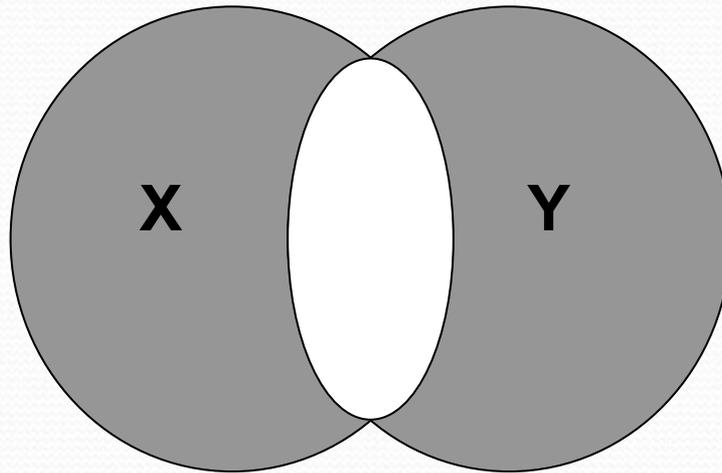


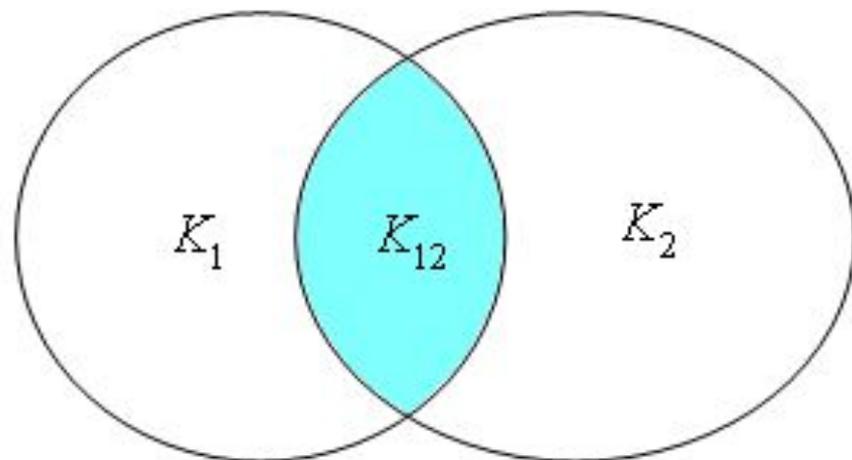
Рис. 1.6.

3. Принцип включения-исключения

- Принцип включения-исключения является важнейшим математическим инструментом в различных разделах математики: комбинаторике, теории вероятности, теории множеств.

Формула сложения

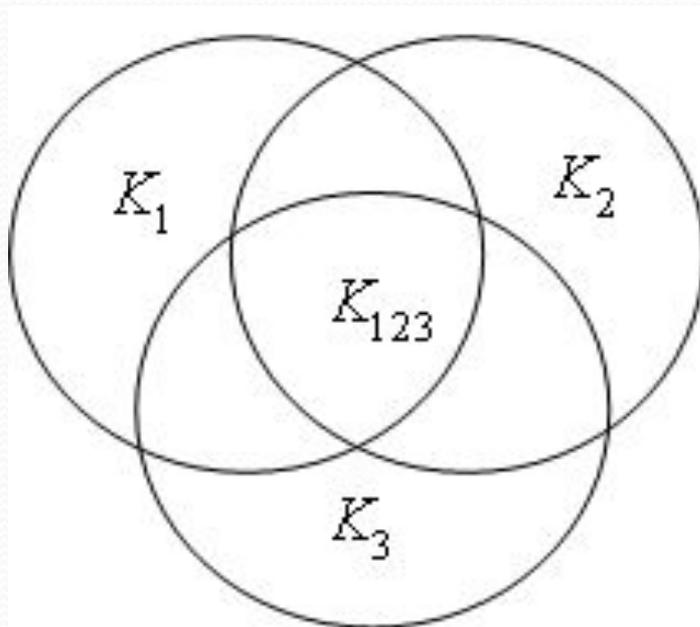
Если два множества состоят из конечного числа элементов, то, как видно из рисунка, число элементов, входящих в их объединение, выражается формулой:



$$n(K_1 \cup K_2) = n(K_1) + n(K_2) - n(K_1 \cap K_2)$$

● Если же свойств три, то можно по аналогии определить множества

$$K_{12}, K_{23}, K_{31}, K_{123}$$



$$K_{12} = K_1 \cap K_2, K_{23} = K_2 \cap K_3, K_{31} = K_3 \cap K_1, K_{123} = K_1 \cap K_2 \cap K_3$$

$$n(K_1 \cup K_2 \cup K_3) = n(K_1) + n(K_2) + n(K_3) - n(K_{12}) - n(K_{23}) - n(K_{31}) + n(K_{123})$$

4. Кортежи. Декартовы произведения

Кортежем длины n из элементов множества A называется упорядоченная последовательность $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ элементов этого множества.

Кортежи $\langle a_1, a_2, \dots, a_k \rangle$ и $\langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle$ называются **равными**, если они имеют одинаковую длину и их элементы с одинаковыми номерами совпадают, т. е.

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_k \rangle \text{ если } \langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle \quad (k = n) \\ \forall i \ a_i = b_i.$$

В отличие от элементов множества элементы кортежа могут совпадать.

Например, в прямоугольной системе координат координаты точек являются кортежами.

Операция, с помощью которой из двух кортежей длиной k и t можно составить новый кортеж длиной $k + t$, в котором сначала идут подряд элементы первого кортежа, а затем – элементы второго кортежа, называется **соединением кортежей**.

4. Элементы комбинаторики

Раздел математики, занимающийся подсчётами количества различных комбинаций между объектами, называется **комбинаторикой**.

Все комбинаторные задачи сводятся к подсчёту мощности конечных множеств и их отображений.

Правило суммы. Пусть элемент α можно выбрать k способами, а элемент β - t способами, причём, если любой способ выбора α отличается от любого способа выбора β , то выбор « α или β » можно сделать $k+t$ способами.

Правило произведения. Если элемент α можно выбрать k способами, а элемент β - t способами, то пару (α, β) можно выбрать $k \cdot t$ способами.

Пример. Если в группе 16 юношей и 14 девушек, то преподаватель может вызвать к доске одного учащегося $16 + 14 = 30$ способами.

Частный случай правила произведения – число **размещений с повторениями** для подсчёта кортежей длины k , составленных из элементов множества X мощности m .

Перестановки. Упорядоченные множества (кортежи), состоящие из n различных элементов, называются **перестановками** (без повторений).

Обозначение : P_n

Формула для нахождения числа **перестановок**:

$$P_n = n! = nP_{n-1}$$

Задачи:

- Сколькими способами можно переставлять элементы множества, чтобы получить различные кортежи длины n ?
- Сколькими способами можно расфасовать n шаров разного цвета в ящик с n свободными местами ?

Пример. Из цифр 3, 5, 7, 9 можно составить 4! кортежей, так как $n=4$, то $P_4=4!=4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1=24$, т.е. существует 24 различных четырёхзначных числа, составленных из этих цифр: 5379, 7359, 9375,

Формула $P_n = n! = nP_{n-1}$ называется *рекуррентной* и даёт возможность подсчитывать число перестановок во множестве $n+1$ элемента через перестановки во множестве n элементов.

$P_1=1!$, $P_0=0!=1$. Если во множестве один элемент, то кортеж единственный; если нет элементов, то вариант один – «нет кортежа».

Размещения (без повторений). Упорядоченное подмножество m элементов (кортеж), составленное из всего множества, содержащего n элементов, называется **размещением** (без повторения).
Обозначение: A_n^m .

Формула для нахождения числа **размещений**:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n - m)!}$$

Задачи.

- Сколькими способами из всего множества можно выбрать различные кортежи (упорядоченные подмножества) длиной m ($m < n$)?

Сочетания без повторений.

Сочетаниями из n элементов по m называется неупорядоченное подмножество (**выборка**), состоящее из m элементов, взятых из множества, состоящего из n элементов.

Обозначение: C_n^m .

Формула для подсчёта числа сочетаний:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Задачи.

- Сколькими способами из всего множества можно выбрать различные подмножества длиной m ($m < n$)?

Перестановки с повторениями. Кортеж, имеющий повторяющиеся элементы, называется **перестановкой с повторениями**.

Пусть в кортеже длины n первый элемент встречается n_1 раз, второй элемент – n_2 раз и так далее, элемент под номером m – n_m раз: $n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$. Тогда число перестановок с повторениями из этих n элементов обозначается

$\hat{P}_{n_1, n_2, \dots, n_m}$ и вычисляется по формуле:

$$\hat{P}_{n_1, n_2, \dots, n_m} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_m!}$$

Задача 1.

- На экзамене по математике были предложены 3 задачи: одна по алгебре, одна по геометрии, одна по тригонометрии. Из 1000 абитуриентов, решавших их, задачу по алгебре решили 800 человек, по геометрии – 700, а по тригонометрии – 600 человек. При этом задачи по алгебре и геометрии решили 600 абитуриентов, по алгебре и тригонометрии – 500, по геометрии и тригонометрии – 400. А 300 абитуриентов решили все три задачи. Сколько абитуриентов не решили ни одной задачи?

Решение задачи 1.

- Решение. Пусть U — множество всех абитуриентов, A — множество абитуриентов, решивших задачу по алгебре, B — множество абитуриентов, решивших задачу по планиметрии, C — множество абитуриентов, решивших задачу по стереометрии. По условию $n(U) = 1000$, $n(A) = 800$, $n(B) = 700$, $n(C) = 600$, $n(A \cap B) = 600$, $n(A \cap C) = 500$, $n(B \cap C) = 400$, $n(A \cap B \cap C) = 300$. В множество $A \setminus B \setminus C$ включены все абитуриенты, решившие хотя бы одну задачу. По формуле (2) имеем:
 - $n(A \setminus B \setminus C) = 800 + 700 + 600 - 600 - 500 - 400 + 300 = 900$.
 - Отсюда следует, что не все поступающие решили хотя бы одну задачу. Ни одной задачи не решили
 - $n(U) - n(A \cup B \cup C) = 1000 - 900 = 100$ (абитуриентов).
 - Открываем раздел комбинаторика, подраздел правило суммы, и находим формулу.
 $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$
Ответ: 100

Задача 2

- Из 100 опрошенных студентов филологического факультета 24 не изучают ни английский, ни немецкий, ни французский языки, 48 человек изучали английский, 8 – английский и немецкий, 26 – французский, 8 – французский и английский, 13 – французский и немецкий, 28 – немецкий. Сколько среди опрошенных студентов изучают английский, французский и немецкий языки одновременно?

Задача 3

- На дискотеке 80% времени был выключен свет, 90% времени играла музыка, и 50% времени шел дождь. Какую минимальную часть времени все это могло происходить одновременно?
- Решение. Перейдём к дополнительным событиям: свет был включен 20% времени, музыка молчала 10%, а дождь не шёл 50% времени, так что дополнительные события не могли занять более
- $20 + 10 + 50 = 80\%$ времени.
- Следовательно, музыка под дождём в темноте звучала не меньше
- $100 - 80 = 20\%$ времени.