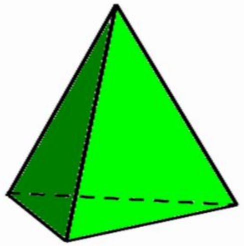
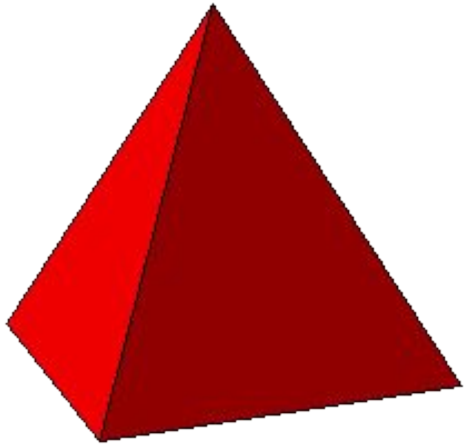
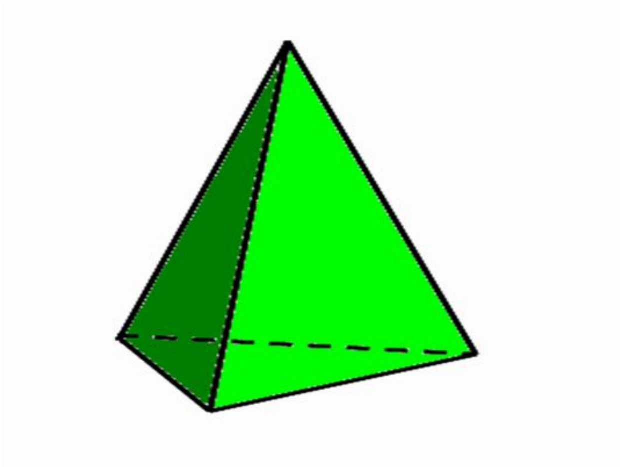


Практикум

по решению стереометрических задач

Пирамида в заданиях ЕГЭ





Теория

Пирамида называется правильной, если ее основание правильный многоугольник, а вершина проектируется в его центр. Т.е. для правильной пирамиды выполняются все свойства полуправильных пирамид, а именно:

1. Все боковые ребра равны и наклонены под одним углом к плоскости основания
2. Все апофемы равны и наклонены под одним углом к плоскости основания т.е. двугранные углы при ребрах оснований равны.

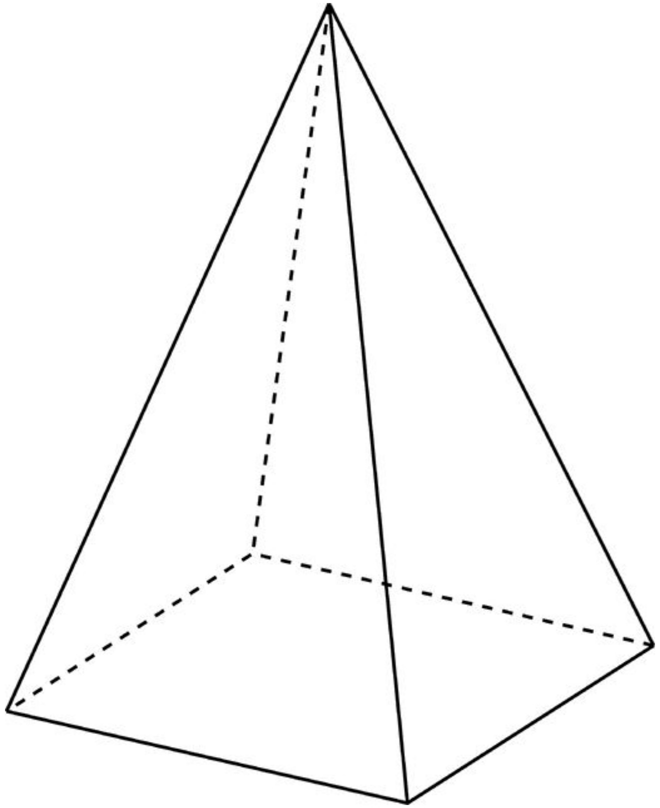
Объем пирамиды

Объем любой пирамиды вычисляется по формуле:

$$V = \frac{1}{3} S \cdot h,$$

$$\textit{где } S - \textit{площадь основания},$$

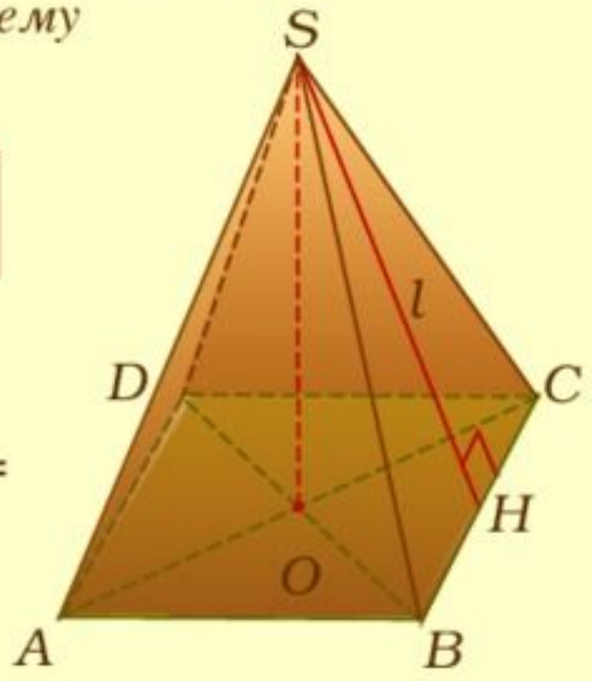
$$h - \textit{высота}$$



Теорема о площади боковой поверхности правильной пирамиды

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему

$$S_{бок} = \tfrac{1}{2} P_{осн} \cdot SH$$

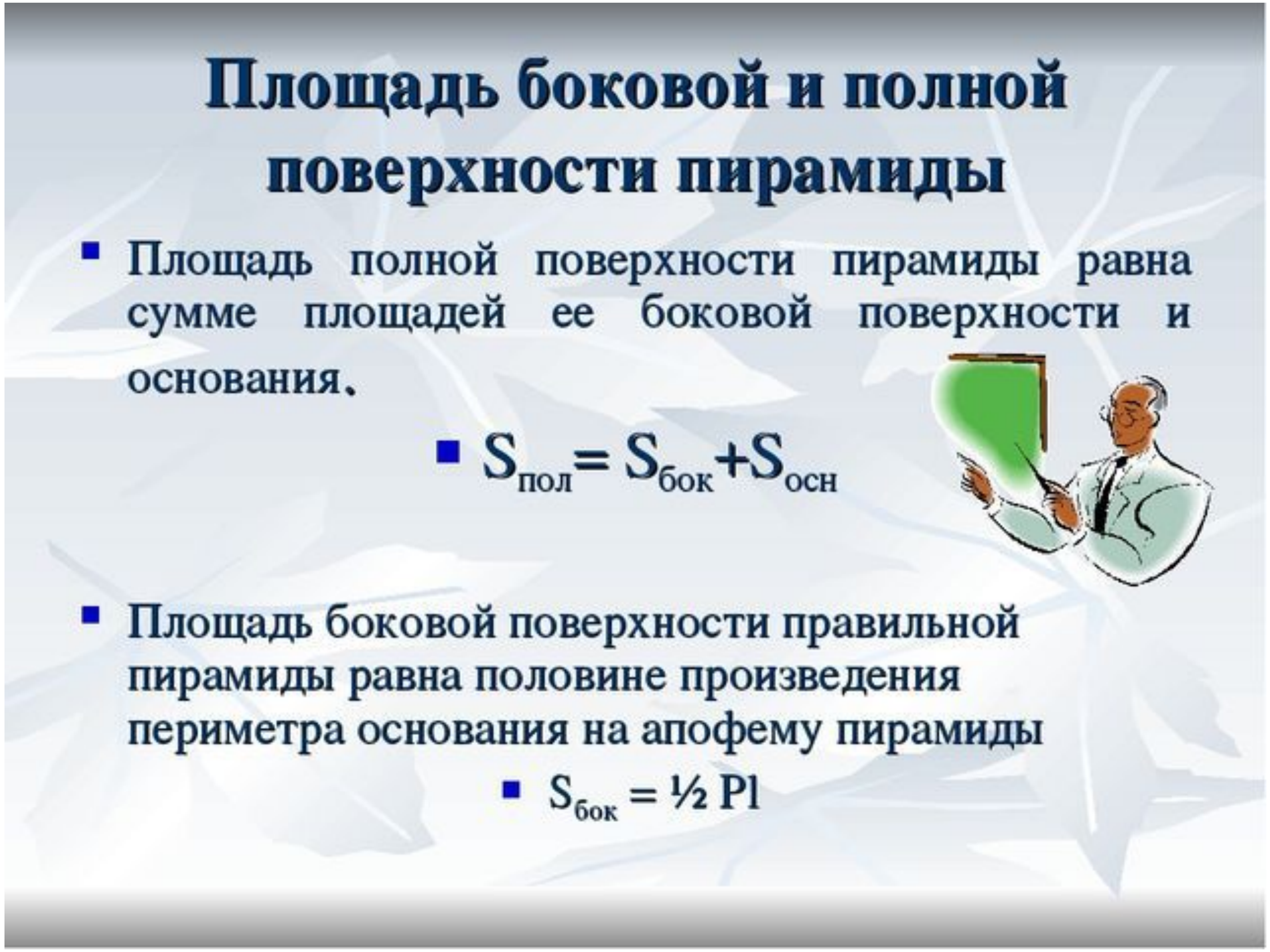


Док – во:

$S_{бок} = (\tfrac{1}{2}al + \tfrac{1}{2}al + \tfrac{1}{2}al + \ldots) =$

$= \tfrac{1}{2} l(a + a + a + \ldots) = \tfrac{1}{2}Pl$

Для произвольной пирамиды площадь боковой поверхности считаем сложением площадей каждой боковой грани, т.к. апофемы разной длины. Для правильной пирамиды или полуправильной 2 рода Sбок**. равна полупериметру основания на апофему.**

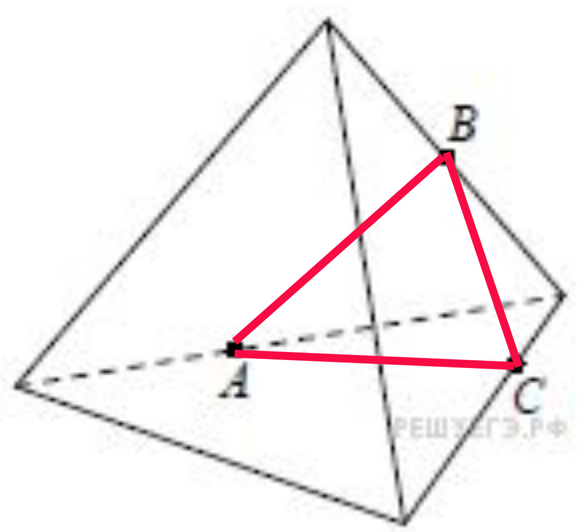


Некоторые важные свойства

1. Объемы подобных пирамид относятся как куб коэффициента подобия.
2. Площади поверхностей подобных пирамид относятся как квадрат коэффициента подобия
3. Если увеличить высоту пирамиды в к раз, то и ее объем увеличится в к раз
4. Если все стороны основания пирамиды увеличить в к раз, то ее объем увеличится в к2 раз.

Задача №1

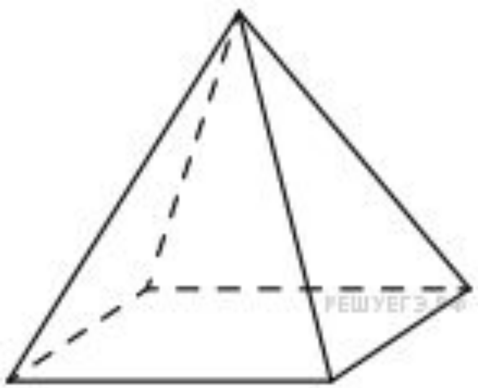
Плоскость, проходящая через точки *A*, *B* и *C*, рассекает тетраэдр на два многогранника (см. рис). Сколько вершин у получившегося многогранника с большим числом граней?



У многогранника с большим числом граней количество вершин равно 6.

Задача №2

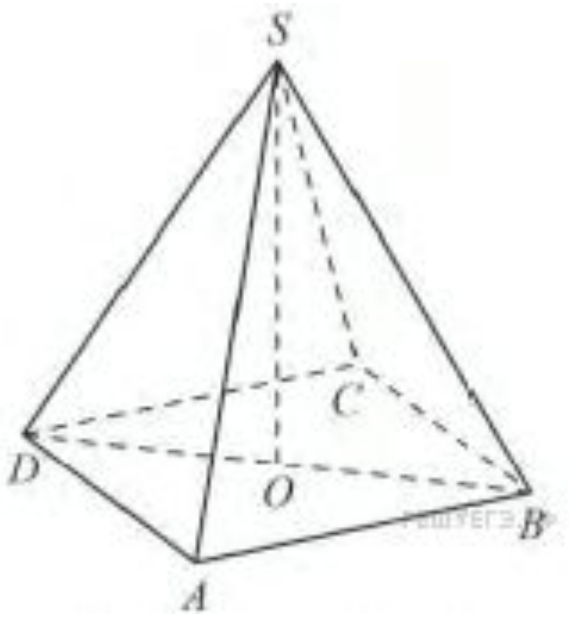
Пирамида Снофру имеет форму правильной четырёхугольной пирамиды, сторона основания которой равна 220 м, а высота — 104 м. Сторона основания точной музейной копии этой пирамиды равна 44 см. Найдите высоту музейной копии. Ответ дайте в сантиметрах.



Переведём сантиметры в метры и найдём во сколько раз сторона основания пирамиды отличается от музейной копии: 220:0,44=500(раз). Найдём высоту музейной копии: 104 : 500 = 0,208м = 20,8см

Задача №3

В правильной четырехугольной пирамиде SABCD точка O– центр основания, S – вершина, SA=13, BD=10. Найдите длину отрезка SO.

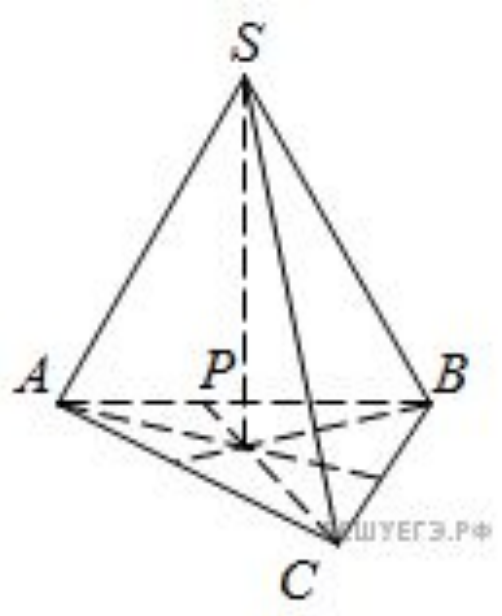


В правильной пирамиде вершина проецируется в центр основания, следовательно, SO является высотой пирамиды. Тогда по теореме Пифагора

$$SO = \sqrt{SB^2 - BO^2} = \sqrt{SB^2 - \left(\frac{BD}{2}\right)^2} = \sqrt{169 - 25} = 12$$

Задача №4

В правильной треугольной пирамиде SABC медианы основания пересекаются в точке P. Объем пирамиды равен 1, PS=1. Найдите площадь треугольника ABC.



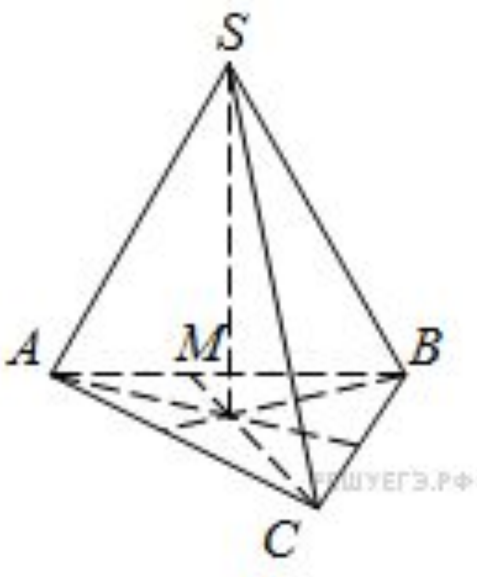
Основание пирамиды — равносторонний треугольник, поэтому, P является центром основания, а SP — высотой пирамиды SABC. Ее объем вычисляется по формуле **V=1/3·Soc.·PS.**

Тогда $$S_{oc.} = \frac{3V_{SABC}}{PS} = 3$$

Задача №5

В правильной треугольной пирамиде SABC медианы основания пересекаются в точке М. Площадь Δ ABC=3,

MS = 1. Найдите объём пирамиды.

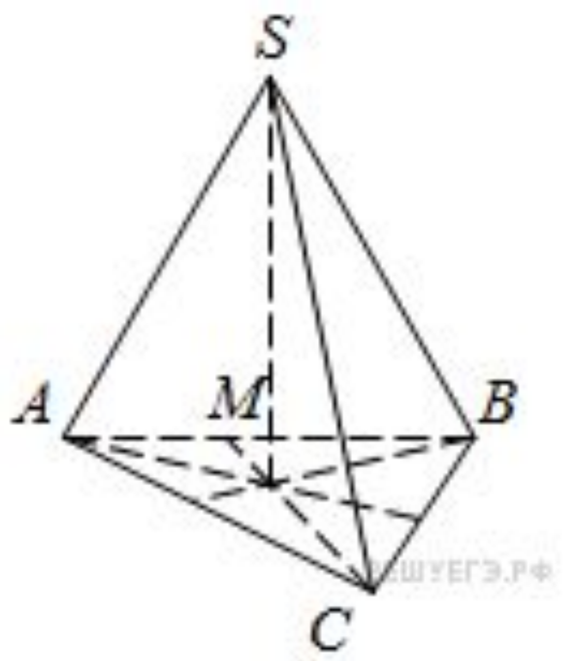


Основание пирамиды — равносторонний треугольник, поэтому, точка M является центром основания, а SM — высотой пирамиды SABC . Тогда

$$V_{SABC} = \frac{1}{3} S_{OC.} \cdot MS = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1$$

Задача №6

В правильной треугольной пирамиде SABC медианы основания пересекаются в точке M. Площадь Δ ABC=3, объём пирамиды равен 1. Найдите длину отрезка SM.

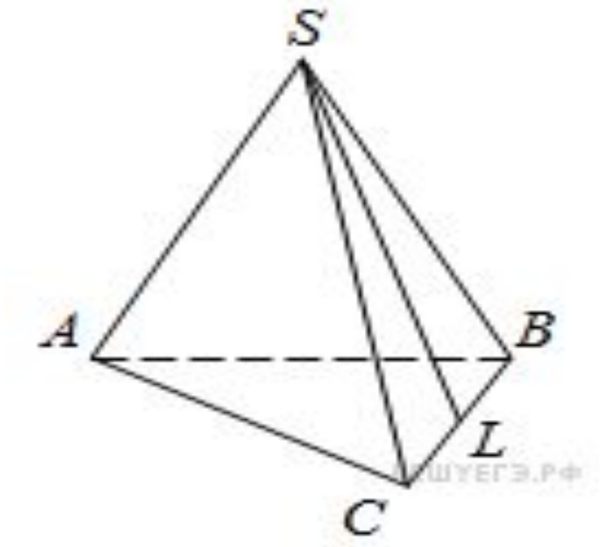


Основание пирамиды — равносторонний треугольник, поэтому, M - является центром основания, а SM — высотой пирамиды SABC. Ее объем вычисляется по формуле **V=1/3·Soc.·MS.** Значит

$$MS = \frac{3V_{SABC}}{S_{oc.}} = \frac{3}{3} = 1$$

Задача №7

В правильной треугольной пирамиде SABC точка L— середина ребра BC , S— вершина. Известно, что SL=2 , а площадь боковой поверхности равна 3. Найдите длину отрезка AB

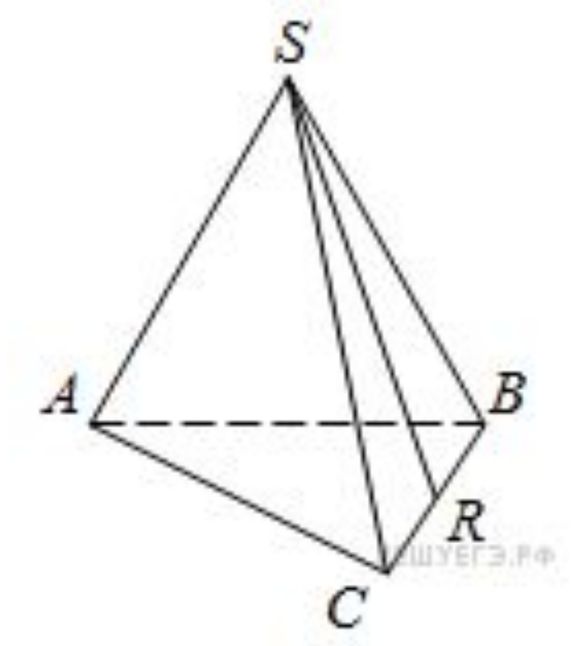


Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна произведению апофемы на полупериметр основания. Поэтому

$$SL \cdot \frac{AB + BC + AC}{2} = 3 \Rightarrow \quad 2 \cdot \frac{3AB}{2} = 3 \quad \Rightarrow \quad AB = 1$$

Задача №8

В правильной треугольной пирамиде SABC точка R— середина ребра BC , S— вершина. Известно, что SR=2, AB=1. Найдите площадь боковой поверхности.

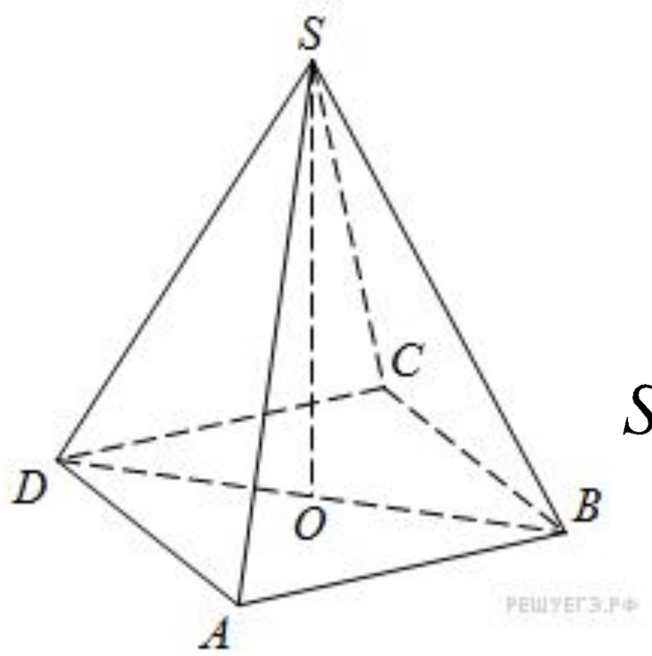


Площадь боковой поверхности правильной треугольной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему:

$$S_{БОК.} = \frac{1}{2}P_{ABC} \cdot SR = \frac{1}{2} \cdot 3AB \cdot SR = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3$$

Задача №9

В правильной четырехугольной пирамиде SABCD точка O – центр основания, S – вершина, SO=15 , BD=16 . Найдите боковое ребро SA.

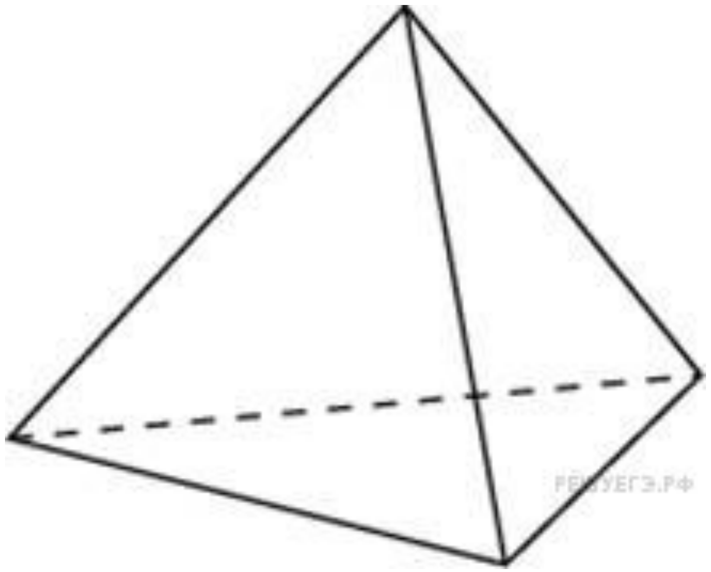


В правильной пирамиде вершина проецируется в центр основания, следовательно SO является высотой пирамиды. Тогда по теореме Пифагора

$$SA = SB = \sqrt{SO^2 + BO^2} = \sqrt{SO^2 + \left(\frac{BD}{2}\right)^2} = \sqrt{225 + 64} = 17$$

Задача №10

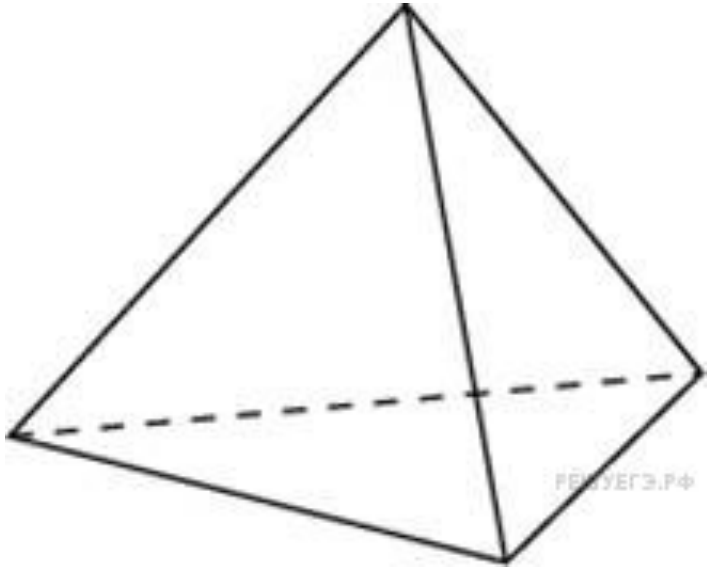
Во сколько раз увеличится объем правильного тетраэдра, если все его ребра увеличить в два раза?



Объёмы подобных тел относятся как куб коэффициента подобия. Поэтому если все ребра увеличить в 2 раза, объём увеличится в **8 раз.**

Задача №11

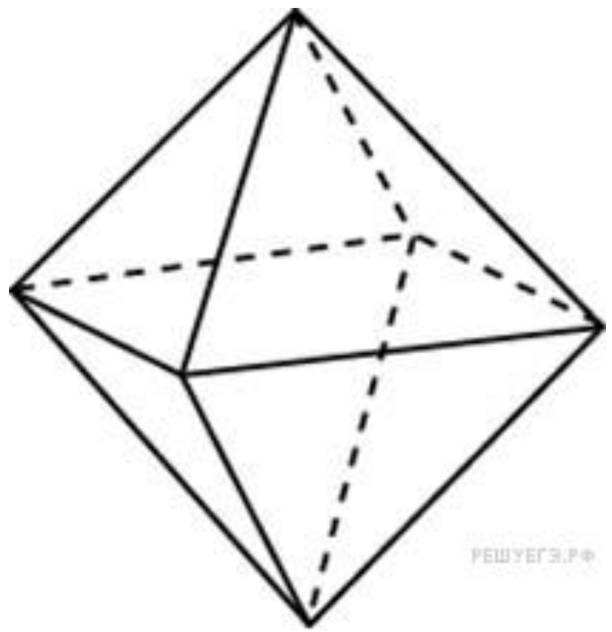
Во сколько раз увеличится площадь поверхности правильного тетраэдра, если все его ребра увеличить в два раза?



Площади подобных тел относятся как квадрат коэффициента подобия. Поэтому если все ребра увеличить в 2 раза, площадь поверхности увеличится **в 4 раза.**

Задача №12

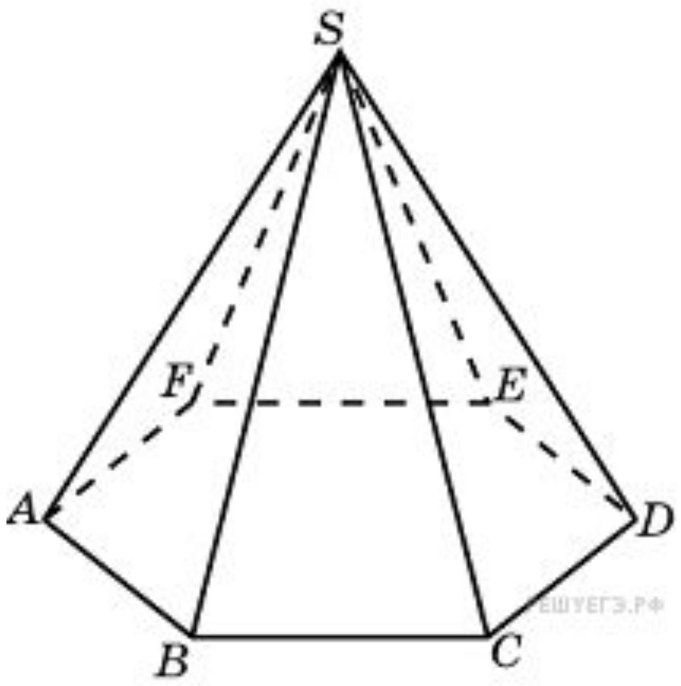
Во сколько раз увеличится площадь поверхности октаэдра, если все его ребра увеличить в 3 раза?



Ответ: 9.

Задача №13

Во сколько раз увеличится объем пирамиды, если ее высоту увеличить в четыре раза?

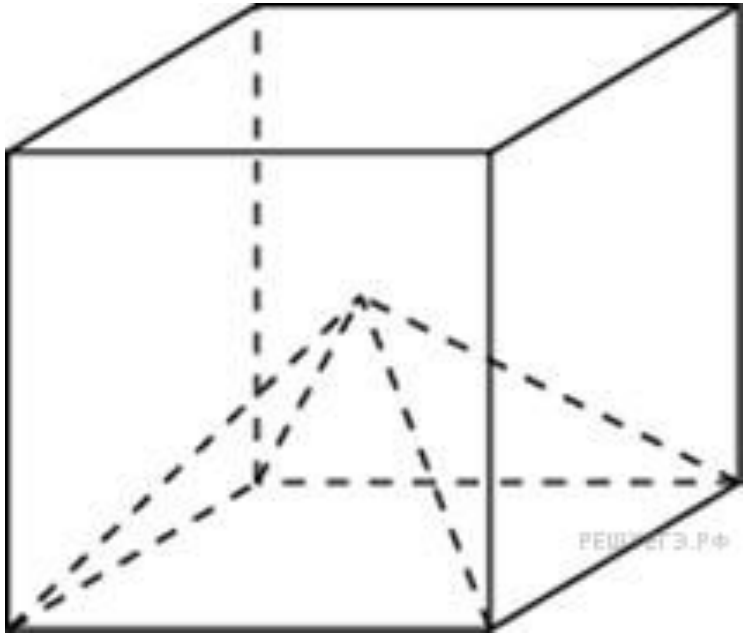


$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{OCH.} \cdot H$$

При увеличении высоты в 4 раза объем пирамиды также увеличится в **4 раза**.

Задача №14

Объем куба равен 12. Найдите объем четырехугольной пирамиды, основанием которой является грань куба, а вершиной — центр куба.



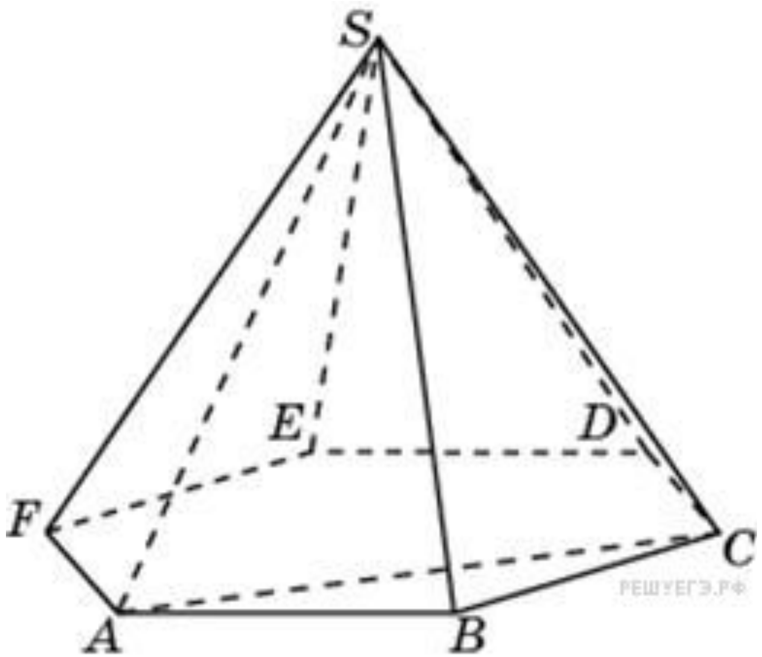
Объем пирамиды равен **1/3·S·h**

$$V=\frac{1}{3}SH=\frac{1}{3}a^{2}\frac{a}{2}=\frac{1}{6}a^{3}=\frac{1}{6}V_{K}=2$$

Задача №15

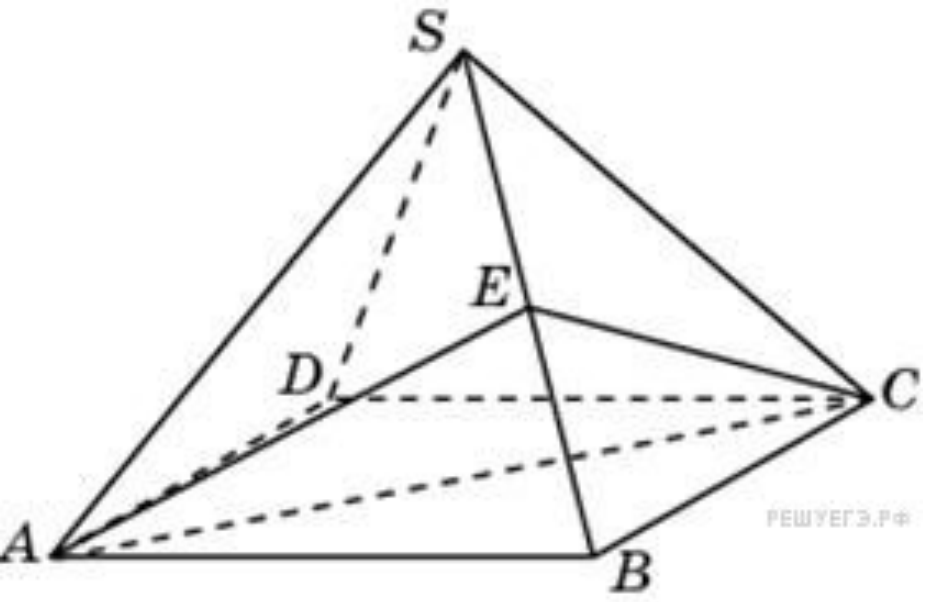
Объем треугольной пирамиды SABC, являющейся частью правильной шестиугольной пирамиды SABCDEF, равен 1. Найдите объем шестиугольной пирамиды.

Данные пирамиды имеют общую высоту, поэтому их объемы соотносятся как площади их оснований. Площадь правильного шестиугольника со стороной а равна **S=(3√3:2)·a².** Площадь же равнобедренного треугольника ACB с боковой стороной а и углах при основании в 30° равна **SΔ= (a²·√3):4.** Получаем, что площадь шестиугольника больше площади треугольника ACBв S:SΔ=6 раз и равна **6.**



Задача №16

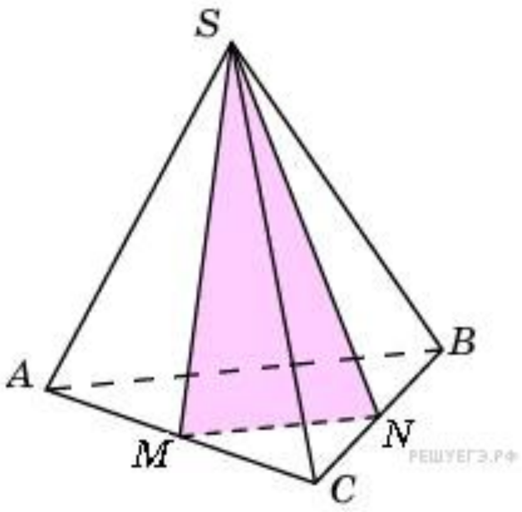
Объем правильной четырехугольной пирамиды SABCD равен 12. Точка E – середина ребра SB . Найдите объем треугольной пирамиды EABC.



Площадь основания пирамиды EABC по условию в 2 раза меньше площади основания пирамиды SABCD. Также высота данной треугол ной пирамиды в 2 раза меньше высоты пирмиды SABCD(т.к. точка E – середина ребра SB). Поскольку объем пирамиды равен $V=1/3 \cdot Sh$, то объем данной треугольной пирамиды в 4 раза меньше объема пирамиды SABCD и равен **3.**

Задача №17

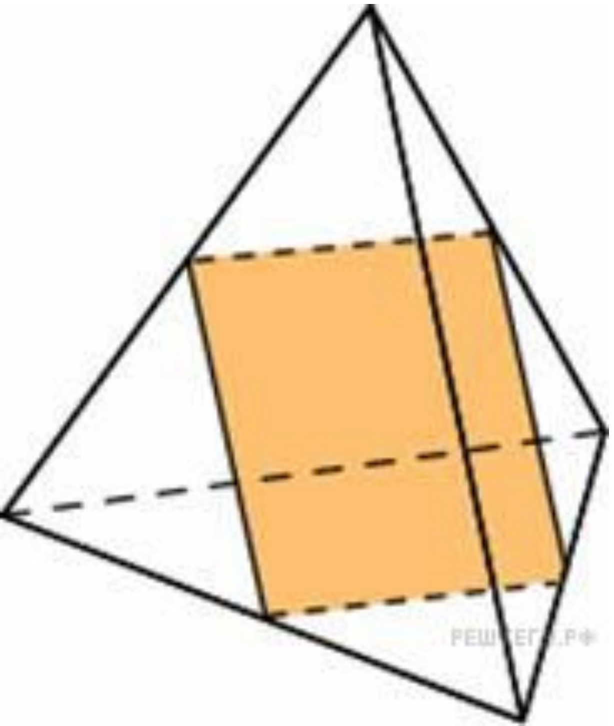
От треугольной пирамиды, объем которой равен 12, отсечена треугольная пирамида плоскостью, проходящей через вершину пирамиды и среднюю линию основания. Найдите объем отсеченной треугольной пирамиды.



Объем пирамиды $V=1/3 \cdot Sh$. Площадь основания отсеченной части меньше в 4 раза (так как высота и сторона треугольника в основании меньше исходных в 2 раза), поэтому и объем оставшейся части меньше в 4 раза. Тем самым, он равен **3**.

Задача №18

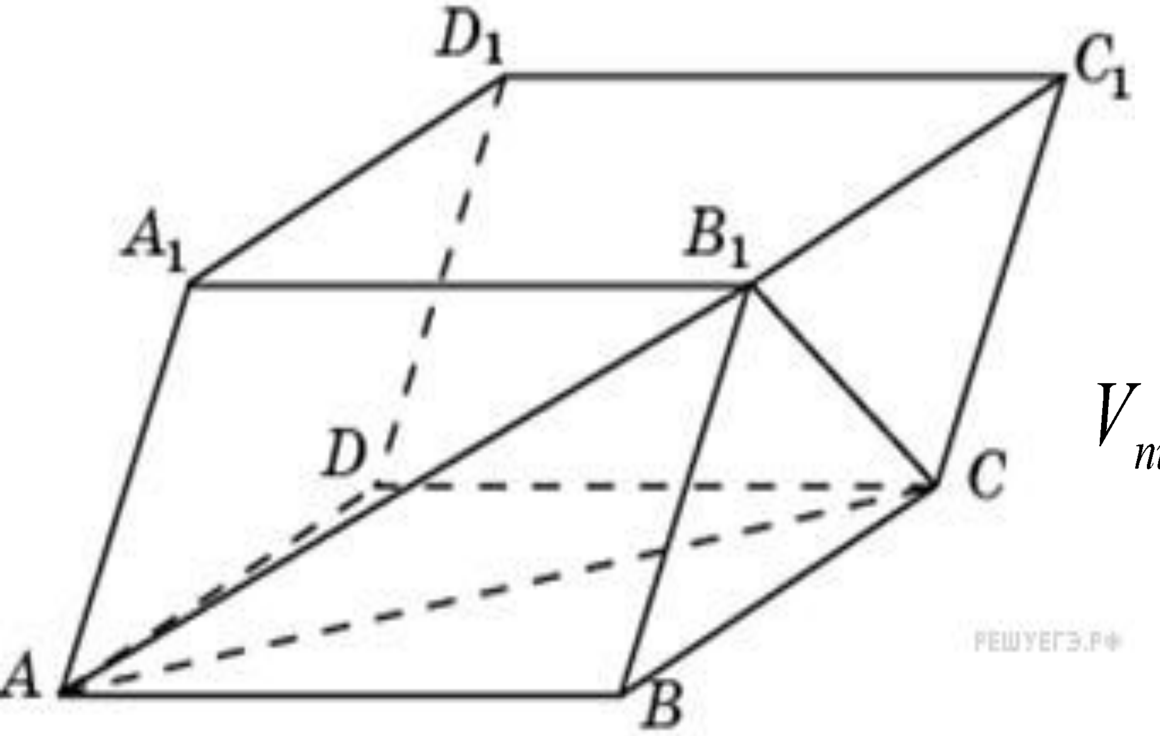
Ребра тетраэдра равны 1. Найдите площадь сечения, проходящего через середины четырех его ребер.



В правильном тетраэдре скрещивающиеся ребра перпендикулярны. Каждая сторона сечения является средней линией соответствующей грани, которая, как известно, в 2 раза меньше параллельной ей стороны и равна поэтому = **0,5**. Значит сечением является квадрат со стороной **0,5.** Тогда площадь сечения **$S=a^2=$0,25** .

Задача №19

Объем параллелепипеда ABCDA1B1C1D1 равен 12. Найдите объем треугольной пирамиды B1ABC .



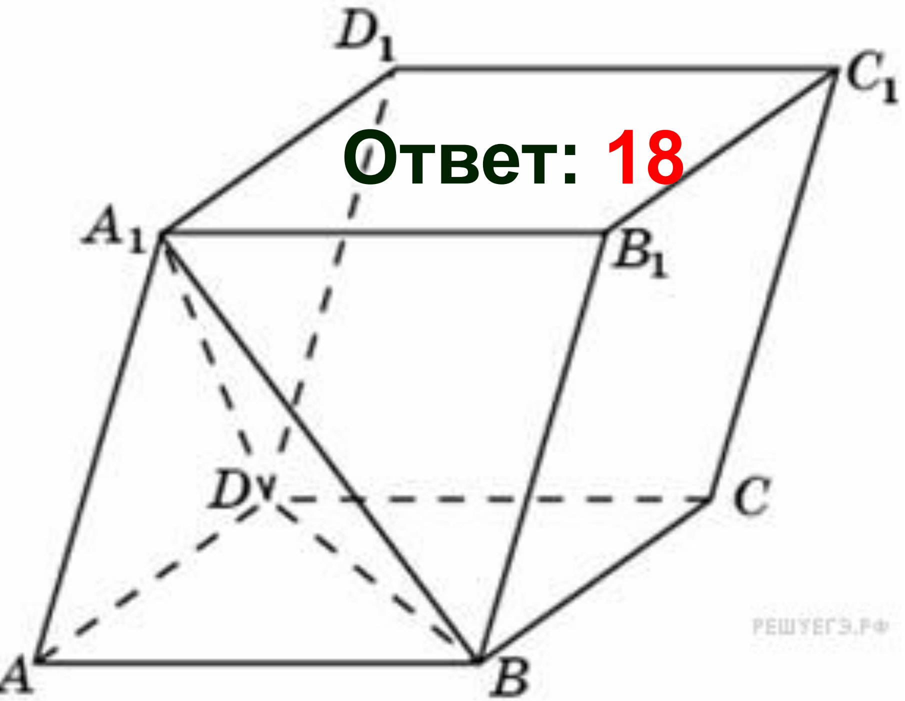
Высота пирамиды равна высоте параллелепипеда, а ее основание вдвое меньше, поэтому:

$$V_{пир.} = \frac{1}{3} S_{пир} H_{пир} = \frac{1}{3} \cdot \frac{S_{пар}}{2} \cdot H_{пар} = \frac{1}{6} \cdot 12 = 2$$

Задача №20

Найдите объем параллелепипеда ABCDA1B1C1D1 , если объем треугольной пирамиды ABDA1 равен 3.

Объем параллелепипеда равен **V=Sh**,



Ответ: 18

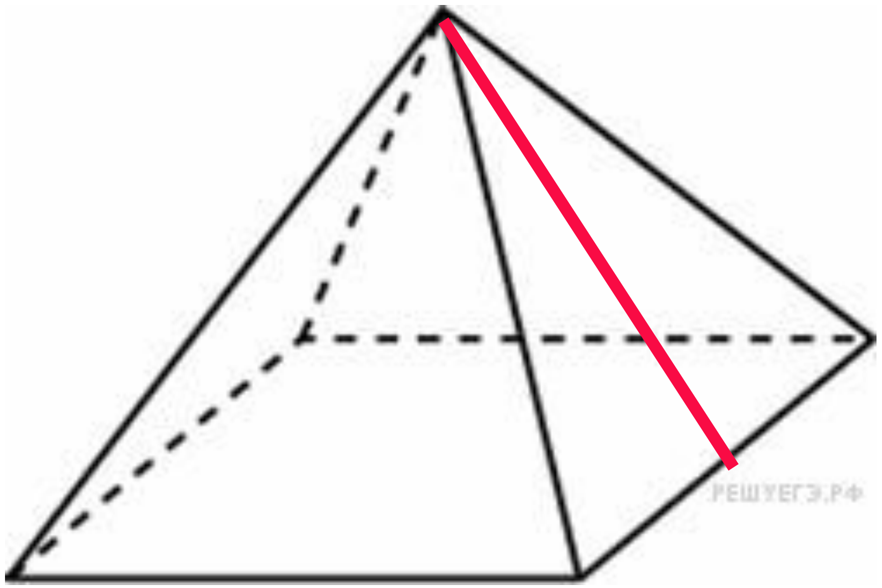
Площадь основания пирамиды, равна половине площади основания параллелепипеда.

Объем пирамиды равен $V=1/3 \cdot S\Delta \cdot h$

Тогда объем параллелепипеда в 6 раз больше объема пирамиды **ABDA1** .

Задача №21

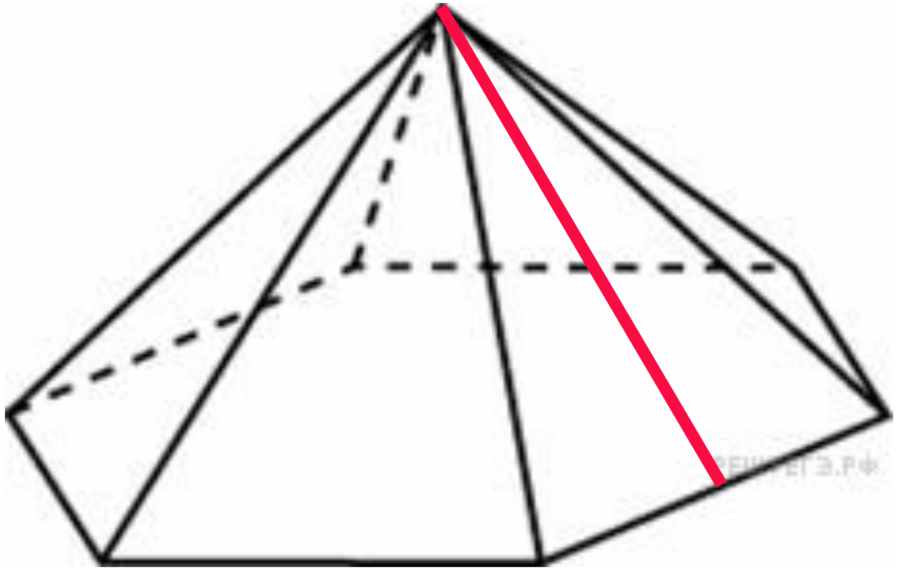
Стороны основания правильной четырехугольной пирамиды равны 10, боковые ребра равны 13. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.



Ответ: 340.

Задача №22

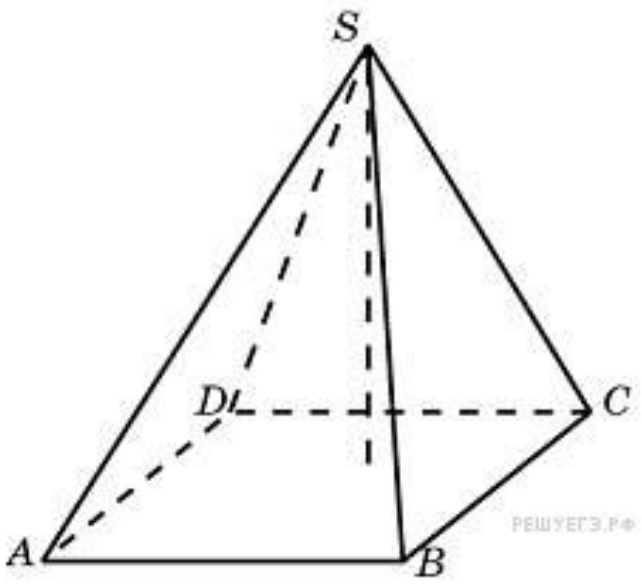
Стороны основания правильной шестиугольной пирамиды равны 10, боковые ребра равны 13. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.



Ответ: 360.

Задача №23

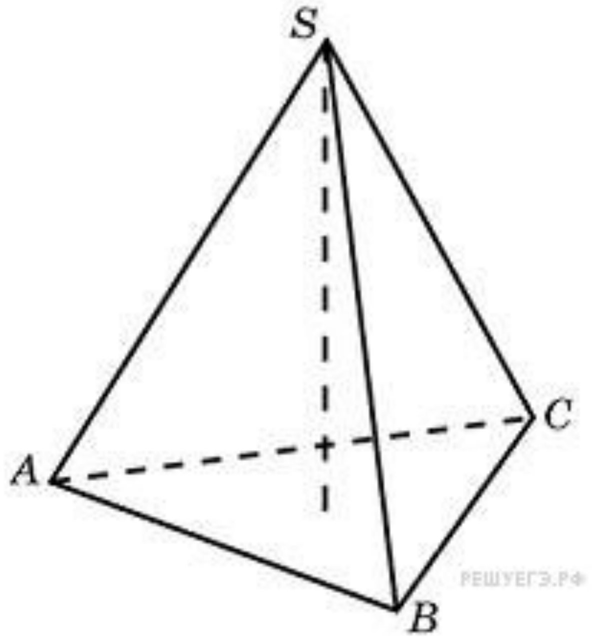
Основанием пирамиды является прямоугольник со сторонами 3 и 4. Ее объем равен 16. Найдите высоту этой пирамиды.



Ответ: 4.

Задача №24

Найдите объем правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой равны 1, а высота равна$\sqrt{3}$



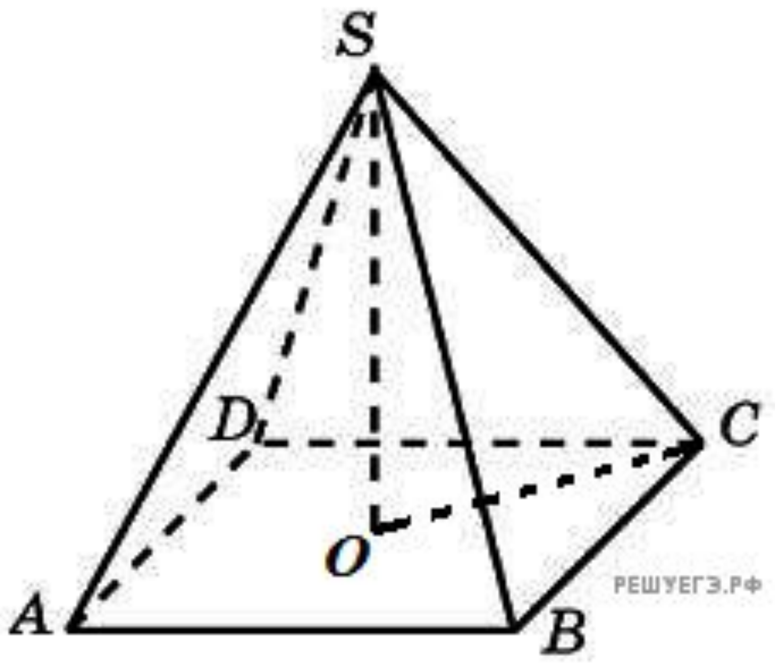
$$S_{\Delta} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Ответ: 0,25.

Задача №25

В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 6, боковое ребро равно 10. Найдите ее объем.

Площадь квадрата равна половине произведения его диагоналей. Значит….

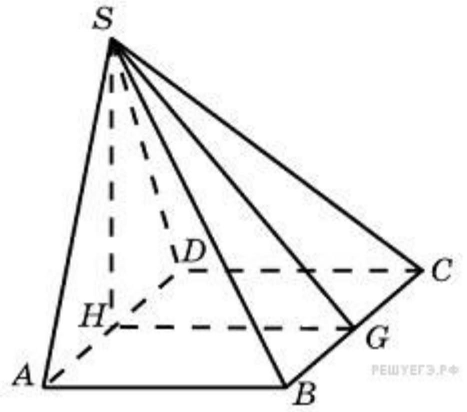


Ответ: 256.

Задача №26

Основанием пирамиды служит прямоугольник, одна боковая грань перпендикулярна плоскости основания, а три другие боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60 . Высота пирамиды равна 6. Найдите объем пирамиды.

Треугольник **ASD** — равносторонний, AD=4√3



Из прямоугольного треугольника **SHG** находим **HG**:

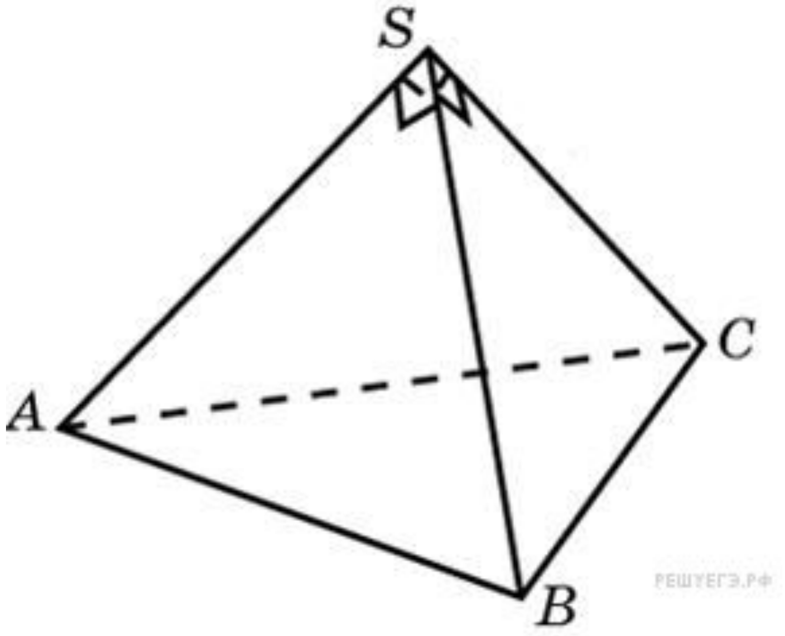
$$HG = SHctg60° = 6 \cdot ctg60° = 2\sqrt{3}$$

$$S_{ABCD} = AD \cdot AB = AD \cdot HG = 4\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 24$$

$$V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot 24 \cdot 6 = 48$$

Задача №27

Боковые ребра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, каждое из них равно 3. Найдите объем пирамиды.



Удобно считать треугольник ***ASB*** основанием пирамиды, тогда отрезок ***SC*** будет являться её высотой.

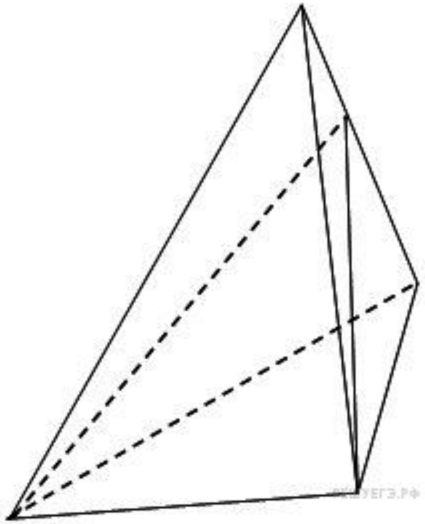
$$S_{ASB} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = \frac{9}{2} = 4{,}5$$

$$V = \frac{1}{3} Sh = \frac{1}{3} S_{ASB} \cdot SC = \frac{1}{3} \cdot 4{,}5 \cdot 3 = 4{,}5$$

Задача №28

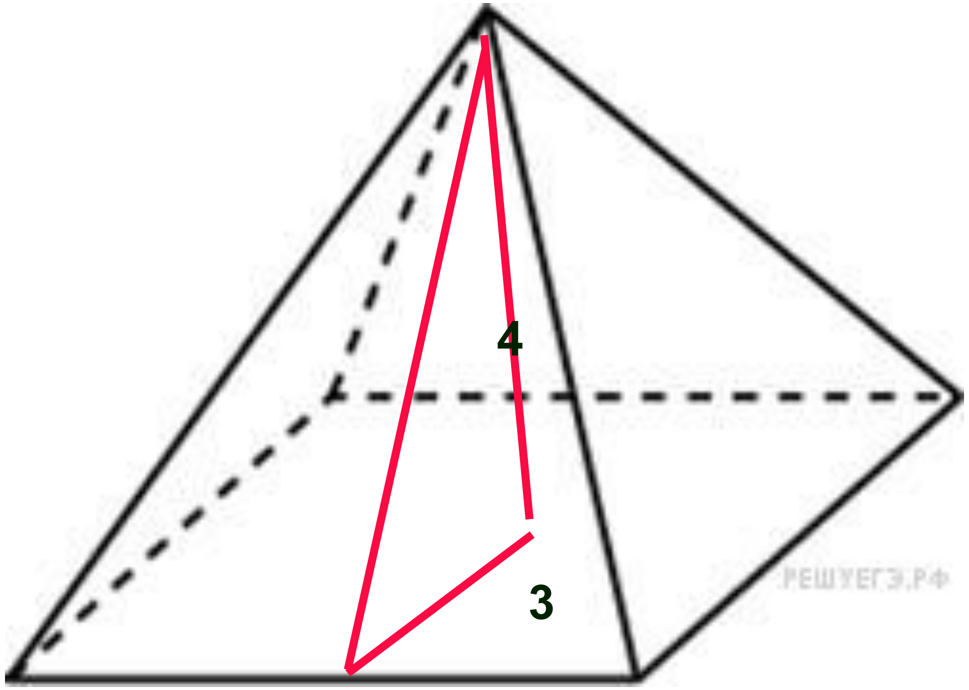
Объем треугольной пирамиды равен 15. Плоскость проходит через сторону основания этой пирамиды и пересекает противоположное боковое ребро в точке, делящей его в отношении 1 : 2, считая от вершины пирамиды. Найдите больший из объемов пирамид, на которые плоскость разбивает исходную пирамиду.

При одинаковой площади основания большим объемом будет обладать та часть, высота которой больше, то есть нижняя. Объем данной пирамиды относится к объему исходной как 2/3 и поэтому равен **10.**



Задача №29

Найдите площадь поверхности правильной четырехугольной пирамиды, стороны основания которой равны 6 и высота равна 4.

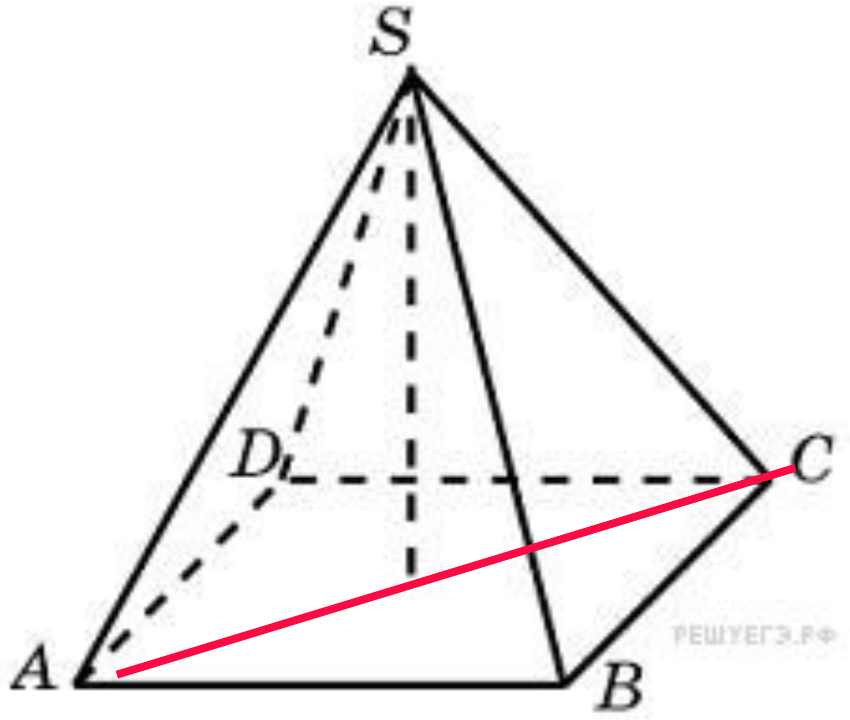


Площадь поверхности складывается из площади основания и площади четырех боковых граней: S=So+4SΔ. Апофему найдем по теореме Пифагора. Она равна 5.

Тогда площадь поверхности пирамиды: $S=6\cdot6+4\cdot0{,}5\cdot6\cdot5=96$

Задача №30

В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 12, объем равен 200. Найдите боковое ребро этой пирамиды.



Объем пирамиды вычисляется по формуле **V=1/3·So·H,** откуда площадь основания

So = 3V: h = 50.

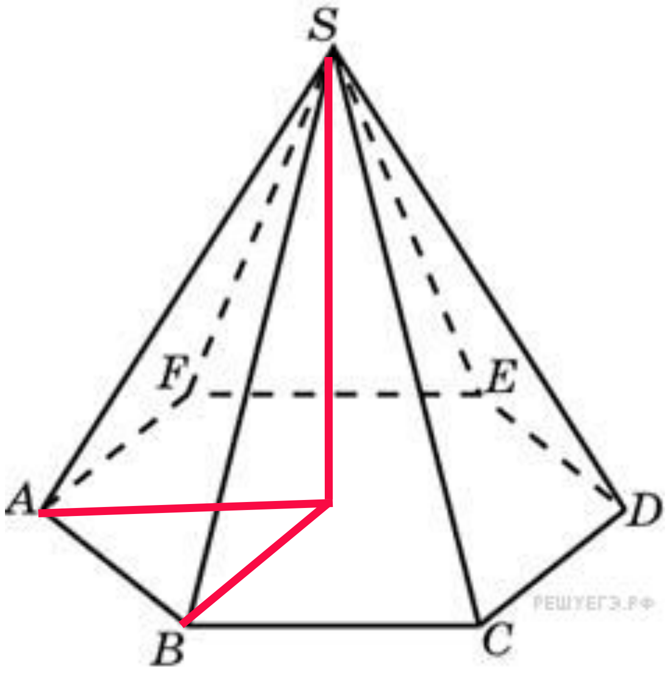
Сторона основания тогда **a**=√S=5√2, а диагональ **d**=a√2.

Боковое ребро **SA** найдем по теореме Пифагора: =√5²+12²=**13**

Задача №31

Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 2, боковое ребро равно 4. Найдите объем пирамиды.

$V = 1/3 \cdot S_o \cdot H$



Высоту пирамиды найдём по теореме Пифагора: $h^2 = 4^2 - 2^2$; $h = 2\sqrt{3}$

Площадь основания будет $= 6 \cdot S\Delta =$

$= 6 \cdot a^2\sqrt{3}/4 = 6\sqrt{3}$

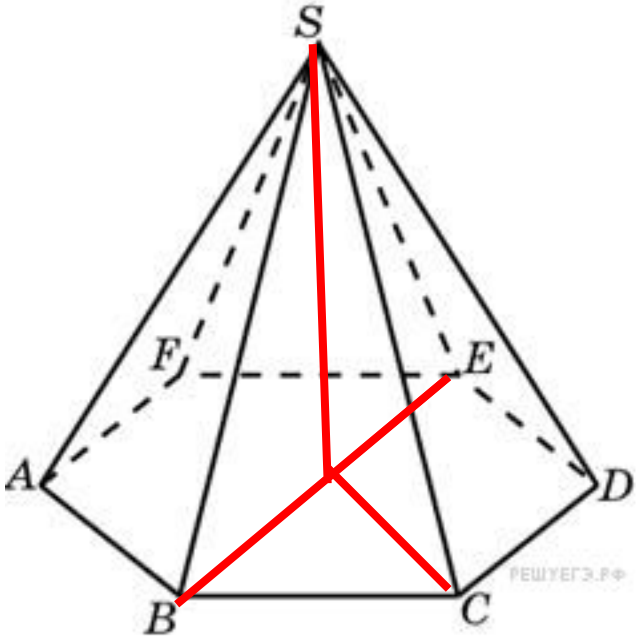
Тогда $V = 1/3 \cdot 6\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{} = 12$

Задача №32

Объем правильной шестиугольной пирамиды 6. Сторона основания равна 1. Найдите боковое ребро.

V=1/3·So·H

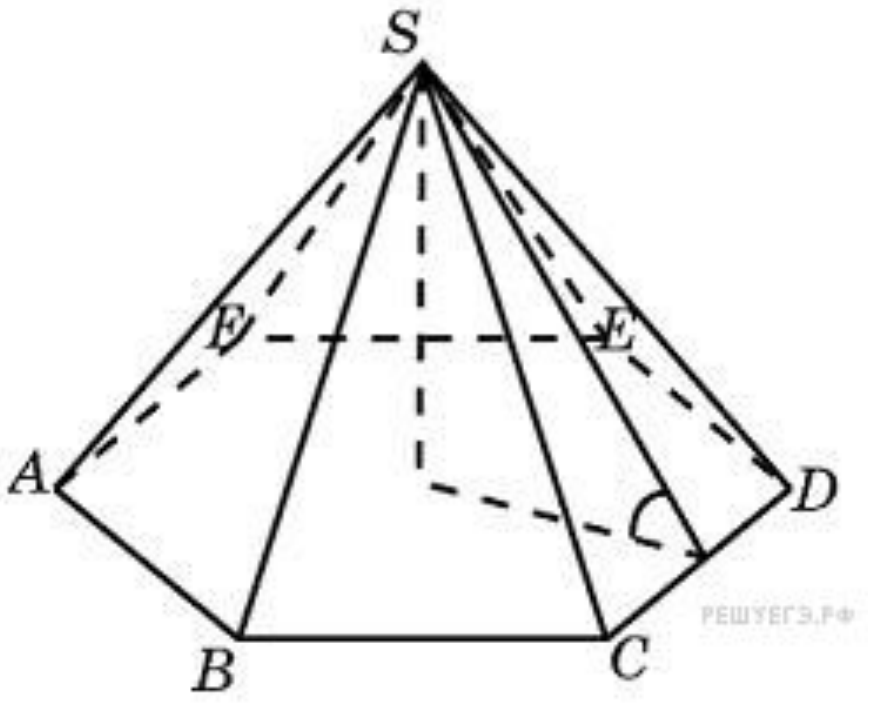
$$S = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$



Ответ: 7.

Задача №33

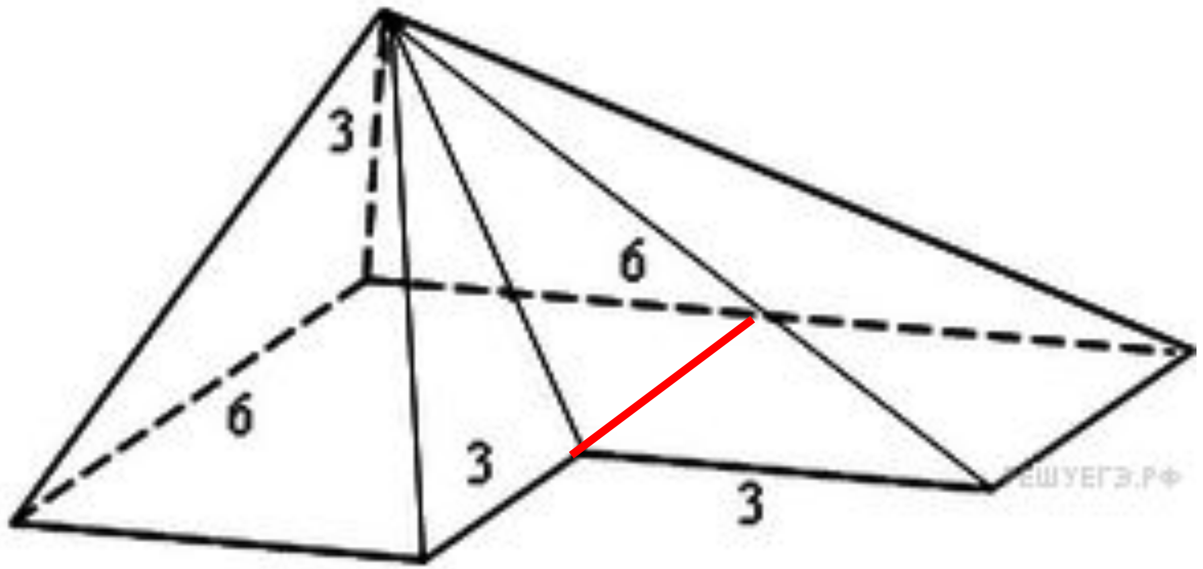
Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 4, а угол между боковой гранью и основанием равен 45 . Найдите объем пирамиды.



Ответ: 48.

Задача №34

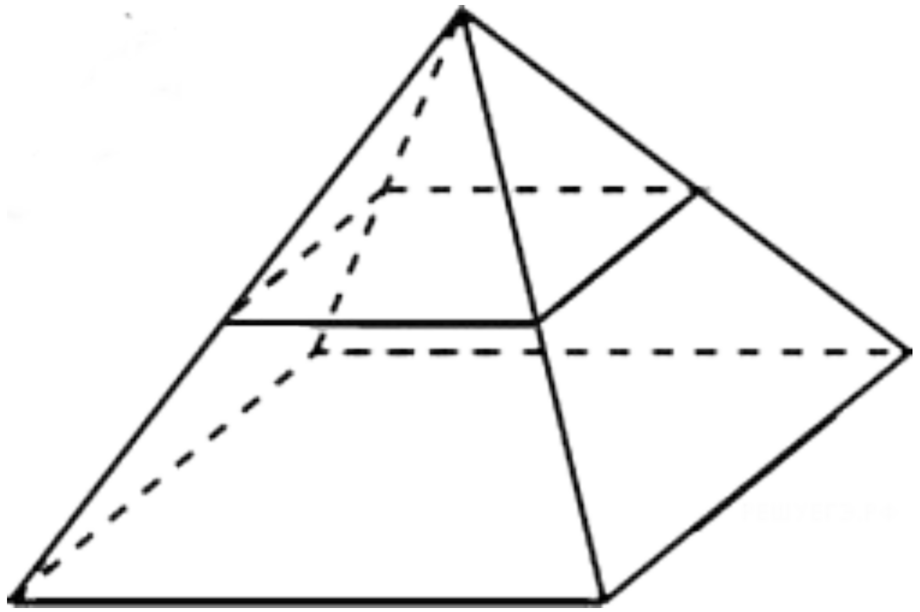
Найдите объем пирамиды, изображенной на рисунке. Ее основанием является многоугольник, соседние стороны которого перпендикулярны, а одно из боковых ребер перпендикулярно плоскости основания и равно 3.



Ответ: 27.

Задача №35

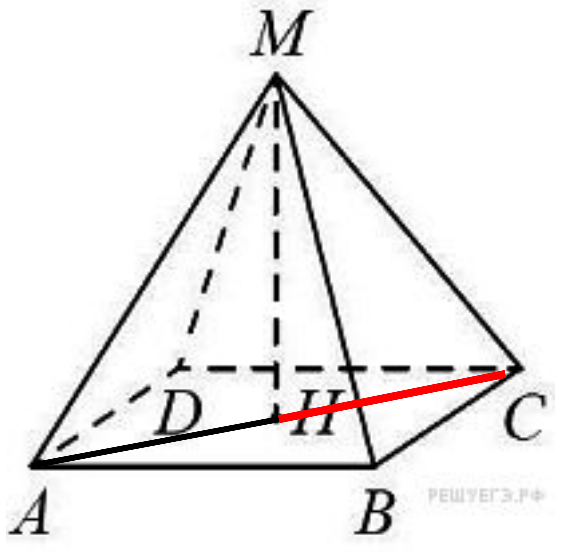
В правильной четырёхугольной пирамиде все рёбра равны 1. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середины боковых рёбер.



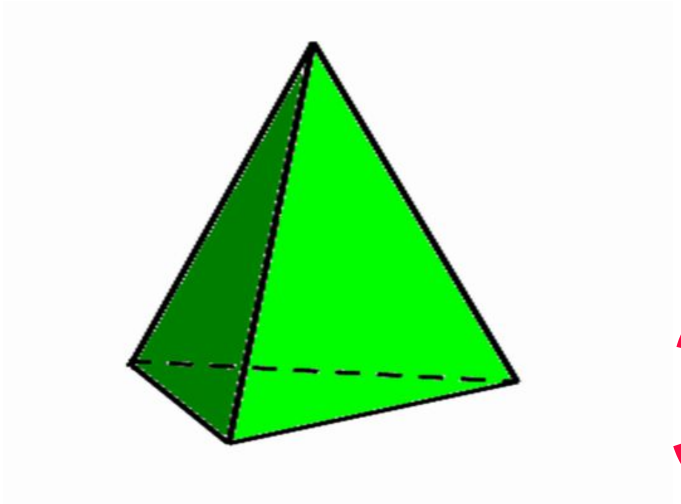
Каждая из сторон сечения является средней линией боковой грани. Поэтому стороны сечения образуют квадрат со стороной **0,5**, площадь которого равна **0,25**.

Задача №36

Найдите объём правильной четырёхугольной пирамиды, сторона основания которой равна 4 , а боковое ребро равно √17.

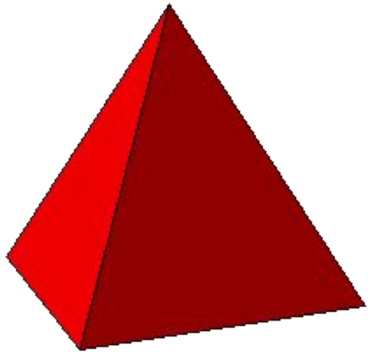


Ответ:16.



Задачи

для самостоятельного решения



Задача №1 Решите самостоятельно

В правильной треугольной пирамиде SABC медианы основания пересекаются в точке М. Площадь Δ ABC=28, SM = 12. Найдите объём пирамиды.

Задача №2 Решите самостоятельно

В правильной треугольной пирамиде SABC медианы основания пересекаются в точке M. Площадь Δ ABC=13, объём пирамиды равен 52. Найдите длину отрезка SM.

Задача №3 Решите самостоятельно

1 В правильной треугольной пирамиде SABC точка L— середина ребра BC , S— вершина. Известно, что SL=6 , а площадь боковой поверхности равна 45.

Найдите длину отрезка AB.

Задача №4 Решите самостоятельно

В правильной треугольной пирамиде SABC
точка R— середина ребра BC , S— вершина.
Известно, что SR=6, AB=5.
Найдите площадь боковой поверхности.

Задача №5 Решите самостоятельно

В правильной четырехугольной пирамиде SABCD

точка O – центр основания,

S – вершина,

SO=12 , BD=18 .

Найдите боковое ребро SA.

Задача №6 Решите самостоятельно

Во сколько раз увеличится
объем правильного тетраэдра,
если все его ребра увеличить в три раза?

Задача №7 Решите самостоятельно

Во сколько раз увеличится площадь поверхности правильного тетраэдра, если все его ребра увеличить в 36 раз?

Задача №8 Решите самостоятельно

Во сколько раз увеличится объем пирамиды, если ее высоту увеличить в 31 раз?

Задача №9 Решите самостоятельно

Объем куба равен 132.

Найдите объем четырехугольной пирамиды, основанием которой является грань куба, а вершиной — центр куба.

Задача №10 Решите самостоятельно

Объем треугольной пирамиды SABC, являющейся частью правильной шестиугольной пирамиды SABCDEF, равен 23.

Найдите объем шестиугольной пирамиды.

Задача №11 Решите самостоятельно

Основанием пирамиды служит прямоугольник, одна боковая грань перпендикулярна плоскости основания,

а три другие боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60 .

Высота пирамиды равна 12.

Найдите объем пирамиды.

Задача №12 Решите самостоятельно

Найдите площадь поверхности правильной четырехугольной пирамиды, стороны основания которой равны 14 и высота равна 24.

Задача №13 Решите самостоятельно

В правильной четырехугольной пирамиде

высота равна 5,

объем равен 480.

Найдите боковое ребро этой пирамиды.

Задача №14 Решите самостоятельно

Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 10,

боковое ребро равно 20.

Найдите объем пирамиды. 2

Задача №15 Решите самостоятельно

1) Найдите объём правильной четырёхугольной пирамиды, сторона основания которой равна 6, а боковое ребро равно $\sqrt{43}$