Лекция № 4

Разностные методы решения начально-краевой задачи для линейного уравнения теплопроводности

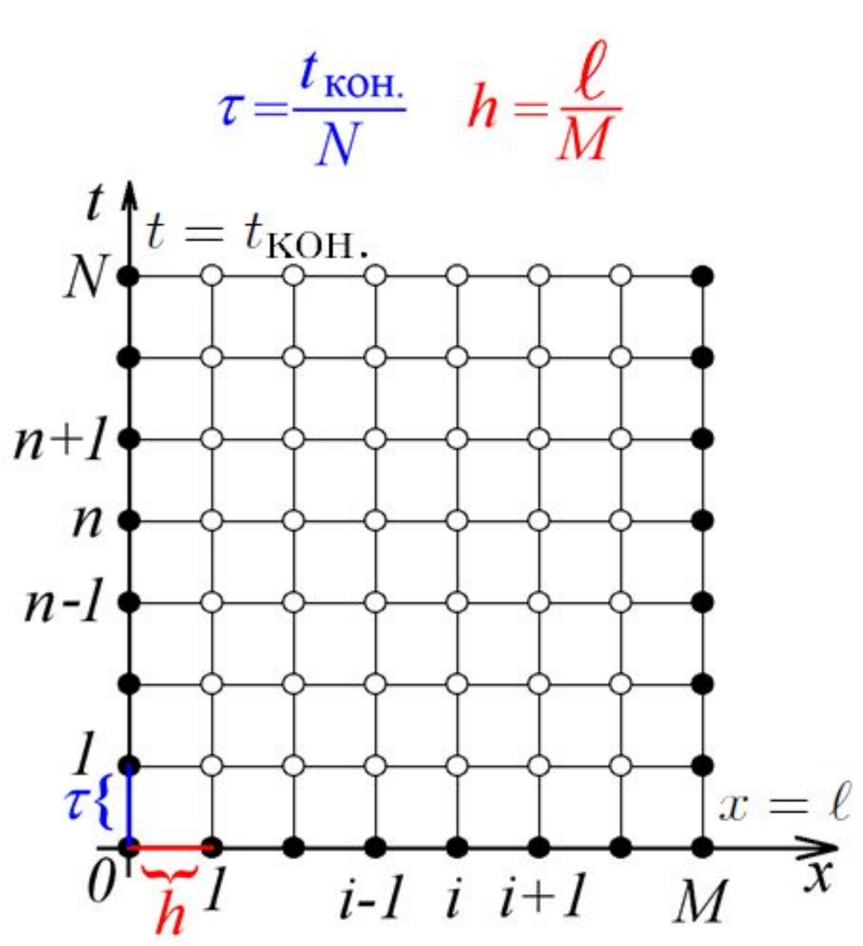
$$
\begin{cases}
u_t = a^2 u_{xx}; & u = u(t,x) \\
u(t,x)|_{t=0} = \varphi_0(x); & 0 \le t \le T \\
u(t,x)|_{x=0} = \psi_0(t); & \\
u(t,x)|_{x=\ell} = \psi_1(t); & 0 \le x \le \ell
\end{cases}
$$

Построение расчетной сетки

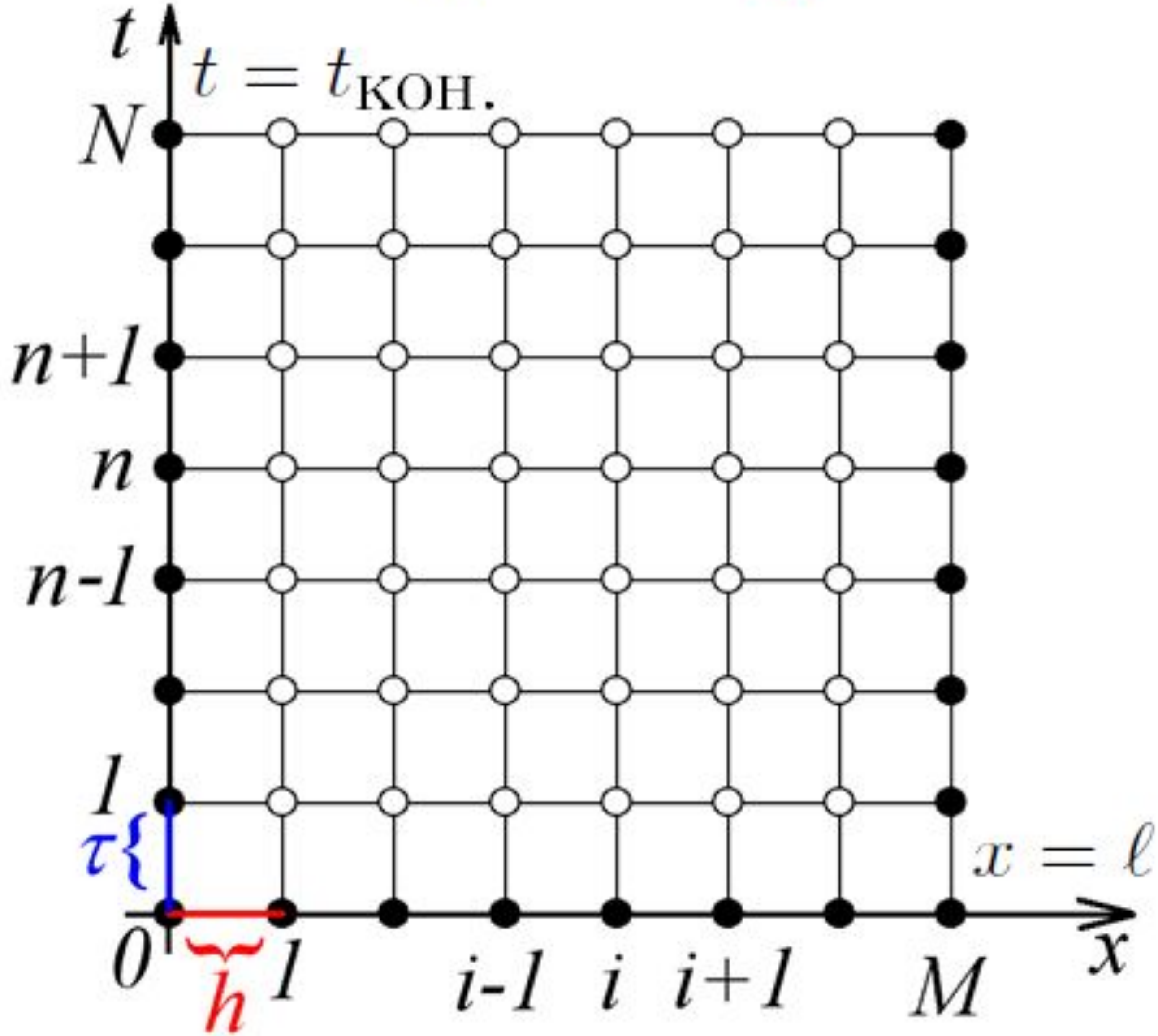
$M+1$ — число точек по x, $h = \Delta x = \dfrac{\ell}{M}$ — шаг по пространству

$N+1$ — число точек по t, $\tau = \Delta t = \dfrac{t_{\text{кон.}}}{N}$ — шаг по времени

$t_n = \tau \cdot n$, $x_i = h \cdot i$ $\quad u_i^n = u(n\cdot\tau, i\cdot h) = u(t_n, x_i)$



$$\tau = \frac{t_{\text{кон.}}}{N} \qquad h = \frac{\ell}{M}$$



В произвольной точке (t_n, x_i):

$$u_t\big|_{(t_n,x_i)} \approx \frac{u(t_n+\tau, x_i) - u(t_n, x_i)}{\tau} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau}$$

$$u_x\big|_{(t_n,x_i)} \approx \frac{u(t_n, x_i+h) - u(t_n, x_i)}{h} = \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h}$$

$$u_{xx}\big|_{(t_n,x_i)} \approx \frac{\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h} - \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h}}{h} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2}$$

Вместо дифференциального уравнения

$$u_t = a^2 u_{xx}$$

получили **разностное уравнение**:

$$\boxed{\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = a^2 \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2}}$$

$$\boxed{\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = a^2 \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2}}$$

$$u_i^{n+1} - u_i^n = \frac{a^2\tau}{h^2}\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right)$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{a^2\tau}{h^2}\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right)$$

Окончательно:

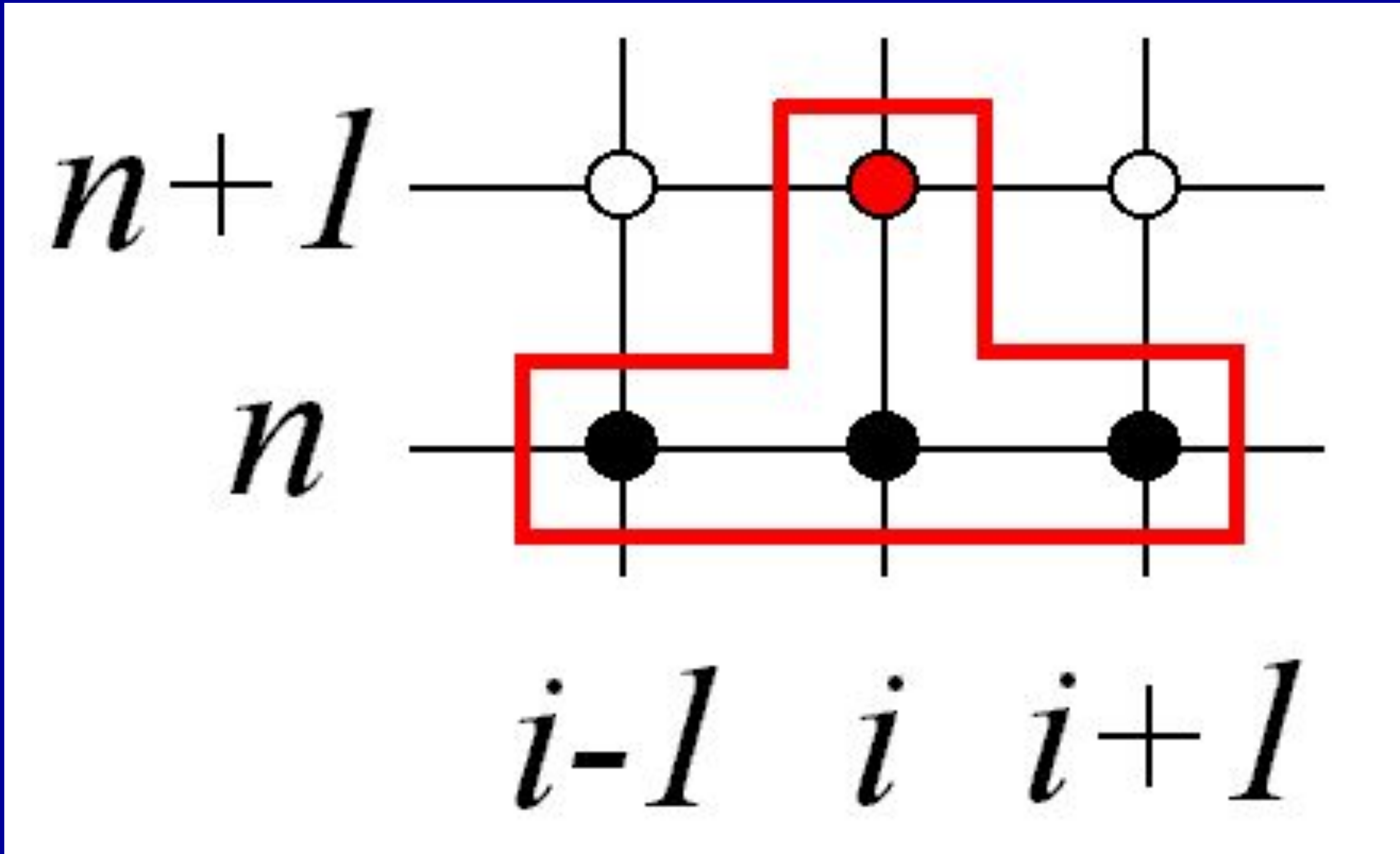
$$\boxed{u_i^{n+1} = \frac{a^2\tau}{h^2}u_{i+1}^n + \left(1 - 2\frac{a^2\tau}{h^2}\right)u_i^n + \frac{a^2\tau}{h^2}u_{i-1}^n}$$

явная схема

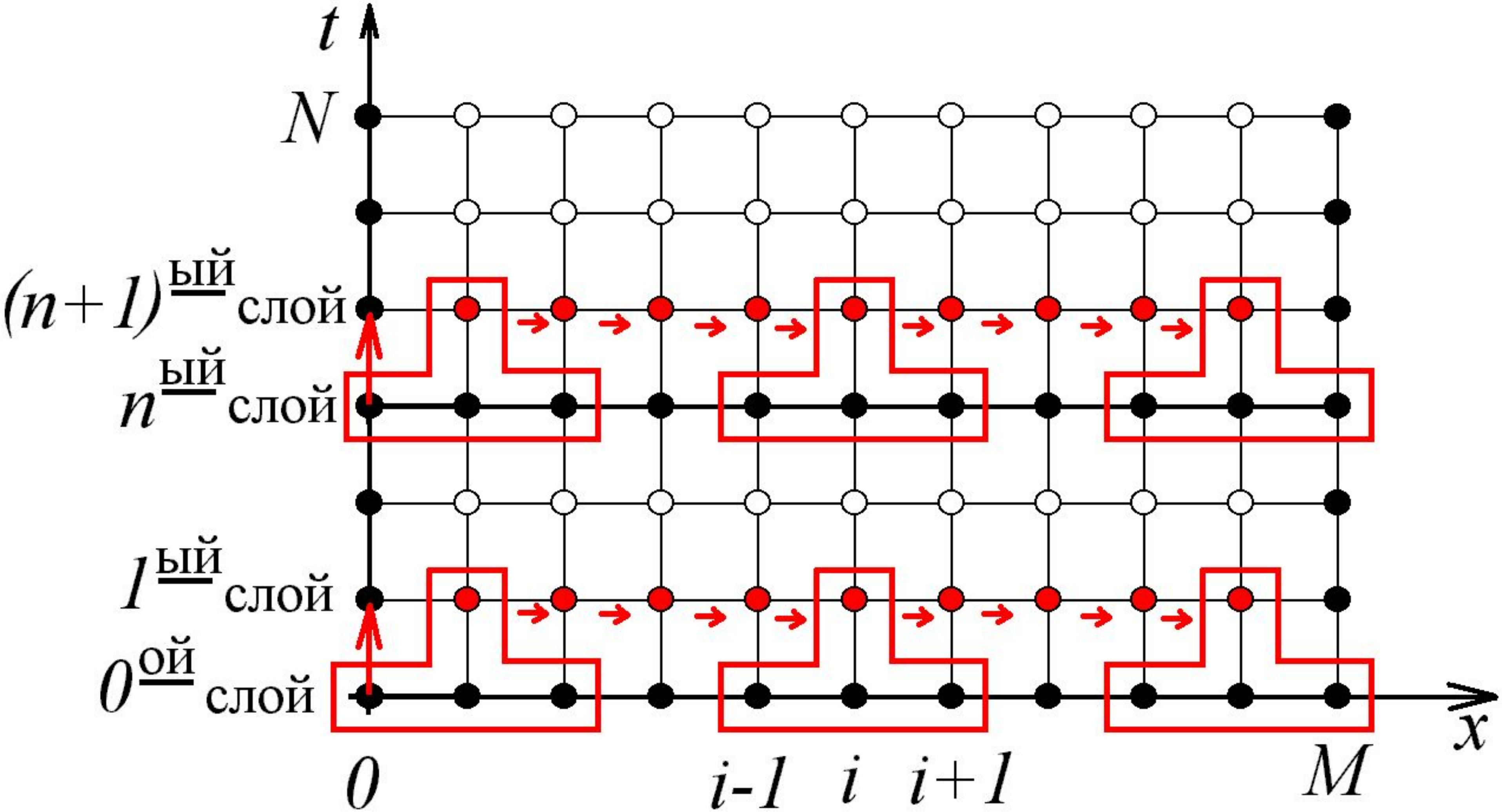
$$u_i^{n+1} = \frac{a^2\tau}{h^2}u_{i+1}^n + \left(1 - 2\frac{a^2\tau}{h^2}\right)u_i^n + \frac{a^2\tau}{h^2}u_{i-1}^n$$

явная схема

Шаблон:



Алгоритм счета:



Условие устойчивости счета:
все коэффициенты положительны, в том числе

$$1 - 2\frac{a^2\tau}{h^2} \geq 0\,; \quad 1 \geq 2\frac{a^2\tau}{h^2}\;; \quad \frac{h^2}{2a^2} \geq \tau$$

$$\boxed{\tau \leq \frac{h^2}{2a^2}}$$

Если $a^2 = 1$ и $h = 0.1$, то $\tau \leq 0.005$

Условие устойчивости счета для волнового уравнения условие Куранта:

$$\boxed{\tau \leq \frac{h}{a}}$$

Если $a^2 = 1$ и $h = 0.1$, то $\tau \leq 0.1$

Неявные схемы:

$$\boxed{\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = a^2 \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2}}$$

при переходе с n-го на $(n+1)$-ый слой необходимо решать СЛАУ

$$\boxed{A\overrightarrow{U}^{n+1} = \overrightarrow{U}^{n}} \quad \text{т.е.} \quad \overrightarrow{U}^{n+1} = A^{-1}\overrightarrow{U}^{n}$$

Теоремы сходимости для линейных задач:

$$\left| u(t,x)|_{(t_n,x_i)} - u_i^n \right| \le Ch^\alpha$$

$\alpha > 0$ — порядок аппроксимации.