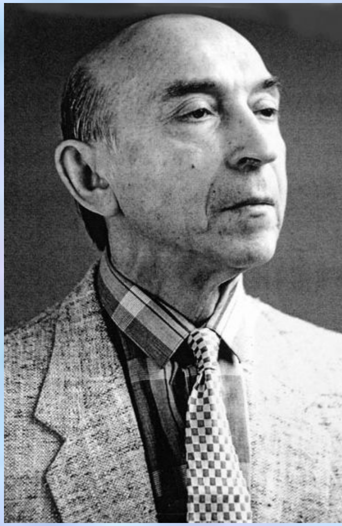
ТЕОРИЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Тихомирова Анна Николаевна
anna@butovo.com

Теория нечетких моделей

Автор: Лотфи А. Заде.

- Американский математик и логик, автор термина нечёткая логика
- и один из основателей теории нечётких множеств,
- профессор Калифорнийского университета (Беркли).
- **Родился**4 февраля 1921 г., Баку, Азербайджанская ССР
- **Умер** 6 сентября 2017 г. (96 лет), Беркли, Калифорния, США



Заде опубликовал основополагающую работу по теории нечётких множеств в 1965 году, в 1973 году предложил теорию нечёткой логики, позднее — теорию мягких вычислений (англ. *soft computing*), а также — теорию вербальных вычислений и представлений (англ. *computing with words and perceptions*).

Теория нечетких моделей

Нечеткие множества

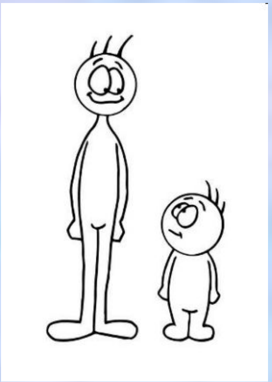
Нечеткие отношения

Нечеткая логика (нечеткий логический вывод)

Нечеткие числа

Классический пример

высокий низкий



Классический подход

$\in \left[\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.$ $\in \left[\begin{matrix}\textit{нет}\\\textit{да}\end{matrix}\right.$

Нечеткий подход

$\in [0, \; ..., \; 1]$

$\in [\textit{нет}, \textit{не совсем нет}, ..., \textit{ни да ни нет}, ..., \textit{не совсем да}, \textit{да}]$

Применение нечетких моделей

Применение нечетких моделей при принятии решений и в процессе моделирования целесообразно в случаях, когда имеется недостаточность и неопределенность знаний об исследуемой системе:

- получение информации: сложно, трудно, долго, дорого, невозможно,
- источником основной информации являются: экспертные данные, эвристические описания процессов функционирования,
- информация о системе разнокачественная, или оценка параметров проводится с использованием разных шкал.

Использовать нечеткие механизмы моделирования можно:

- при описании системы,
- при задании параметров системы,
- при задании входов/выходов/состояний системы.

Достоинства и недостатки

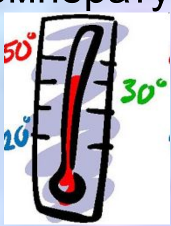
Достоинством применения нечетких моделей является б**О**льшая прозрачность (по сравнению с искусственными нейронными сетями) за счет возможности лингвистической интерпретации в виде нечетких продукционных правил.

Недостатком можно считать трудности с априорным определением компонентов модели (нечетких высказываний, функций принадлежности для каждого значения лингвистических переменных, структуры базы нечетких правил и т.д.).

Впоследствии диапазон применимости теории нечетких моделей существенно расширился. Сам Заде определил нечеткие множества как инструмент построения теории возможностей. С тех пор научные категории случайности и возможности, вероятности и ожидаемости получают теоретическое разграничение.

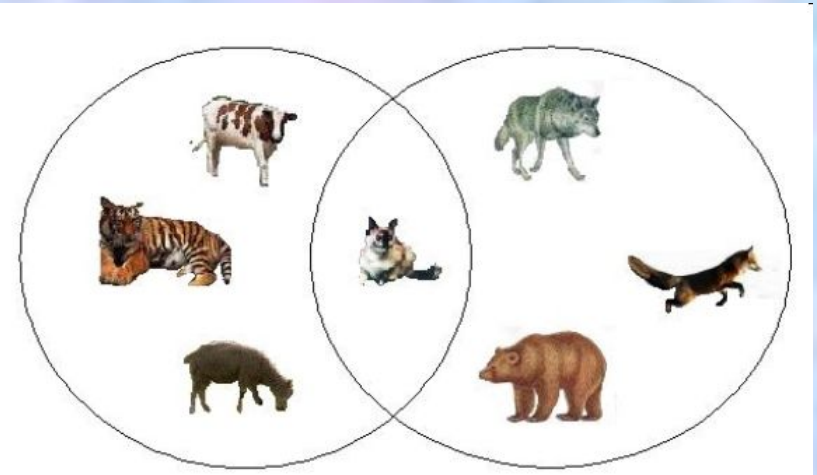
Нечеткие множества

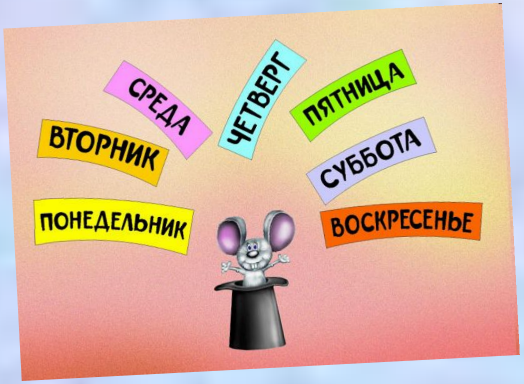
Базовые и нечеткие значения переменных

	Множество базовых значений	Множество нечетких значений
Дата 	$B_1 = \{Пн, Вт, ..., Вс\}$ $B_2 = \{01.01.07, 02.01.07, ..., 31.12.07\}$ $B_3 = \{январь, февраль, ..., декабрь\}$	$F_1 = \{начало\ недели, середина\ недели, конец\ недели\}$ $F_2 = \{рождественские\ праздники, майские\ праздники, ноябрьские\ праздники\}$ $F_3 = \{весна, лето, осень, зима\}$
Температура 	$B_1 = \{0^0 K ... 100^0 K\}$ $B_2 = \{-10^0 C ... 20^0 C\}$	$F_1 = \{холодная, горячая, теплая, обжигающая\}$ $F_2 = \{низкая, высокая\}$ $F_3 = \{< 0, около\ \ 0, \ > 0\}$
Цена или зарплата 	$B_1 = \{x : 500 \le x \le 15000\}$ $B_2 = \{x : 10000 \le x \le 120000\}$	$F_1 = \{малая, средняя, большая\}$ $F_2 = \{дешевая, нормальная, высокая\}$

Применимость понятий

При этом различные элементы из множества нечетких значений в различной степени могут быть применимы к конкретному элементу из множества базовых значений.





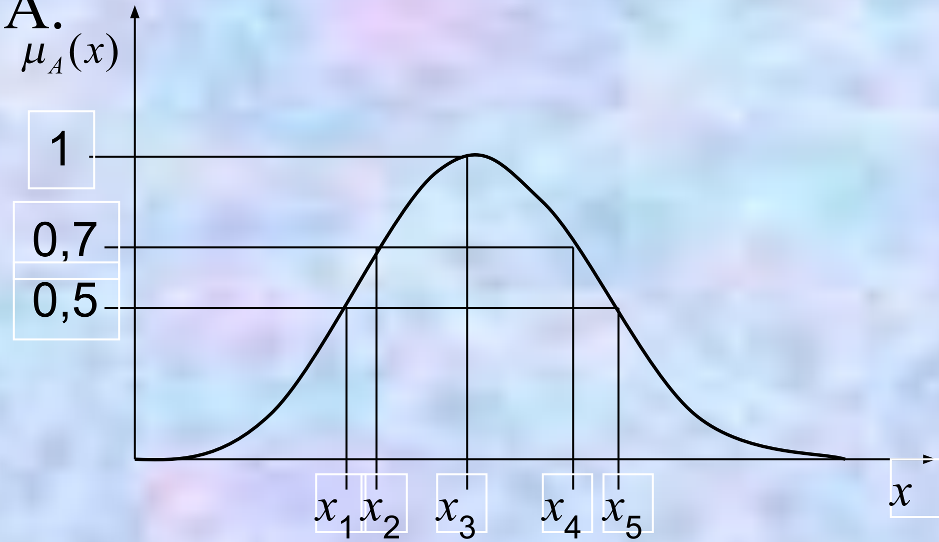
Например, для каждого дня недели из множества базовых значений «Пн, Вт, Ср, Чт, Пт, Сб, Вс» можно выбрать одно или несколько значений из множества «начало недели, середина недели, конец недели», при этом такой выбор будет характеризоваться различной степенью применимости:

Применимость понятий

Базовое значение	Понятие			
	не применимое	возможное	допустимое	подходящее
ПН	*Середина недели конец недели*	*нет*	*нет*	*начало недели*
ВТ	*конец недели*	*середина недели*	*начало недели*	*нет*
СР	*начало недели конец недели*	*нет*	*нет*	*середина недели*
ЧТ	*начало недели*	*конец недели*	*середина недели*	*нет*
ПТ	*начало недели середина недели*	*нет*	*конец недели*	*нет*
СБ	*начало недели середина недели*	*нет*	*нет*	*конец недели*
ВС	*начало недели середина недели*	*нет*	*нет*	*конец недели*

Основные определения

Функция принадлежности нечёткого множества $\mu_A(x)$ задает степень принадлежности каждого элемента *x* пространства рассуждения U к данному нечёткому множеству A.



По сути, функция принадлежности нечёткого множества представляет собой обобщение характеристической функции классического множества, которая принимала значения 0 или 1.

Функция принадлежности количественно градуирует принадлежность элементов фундаментального множества пространства рассуждения нечёткому множеству A. Значение «0» означает, что элемент не включен в нечёткое множество, «1» – описывает полностью включенный элемент. Значения между «0» и «1» характеризуют нечётко включенные элементы.

Основные определения

- ***Нечеткое множество*** А – совокупность пар $<x,\ \mu_A(x)>$, где U – область рассуждений, $\mu_A(x)$ – функция принадлежности.

$$A = \left\{ < x, \mu_A(x) > \mid x \in U \right\}$$

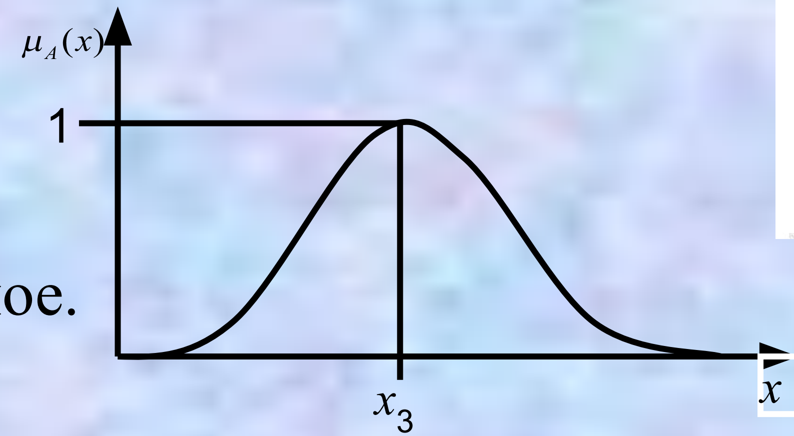
- ***Носитель*** (основа) S(A) нечеткого множества А – четкое множество таких точек в U, для которых $\mu_A(x) > 0$

$$S(A) = \{x \mid x \in U,\ \mu_A(x) > 0\}$$

- Если $\mu_A(x) = 1$ на всем S(A), то А – обычное четкое множество.

Основные определения

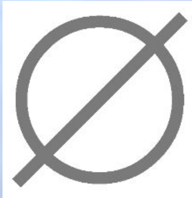
- ***Высота h(A)*** нечеткого множества A – величина супремума для значений функции принадлежности множества A области рассуждений U. $h(A)=\sup\limits_{U}\mu_A(x)$



Если $\sup\limits_{U}\mu_A(x)=1$, то множество

A - ***нормальное***, иначе – субнормальное.

Нечеткое множество A называется ***пустым***, если



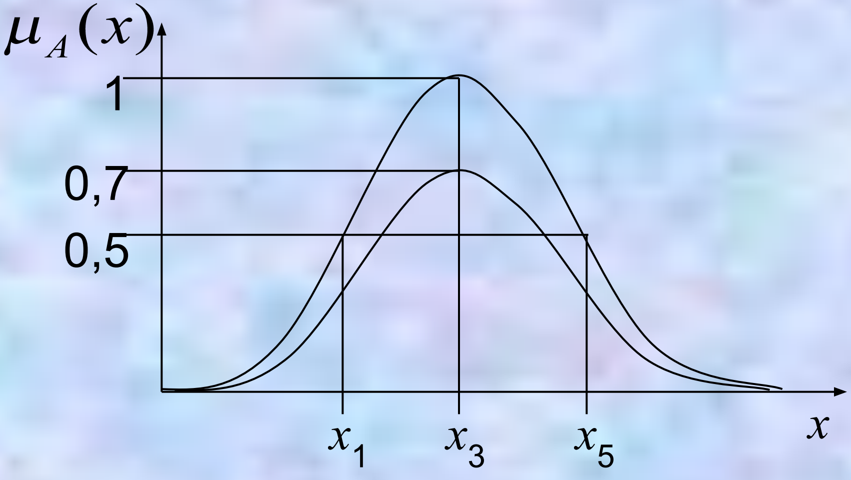
$$\forall x\in U:\mu_A(x)=0$$

Нечеткое множество A называется ***унимодальным,*** если только для единственного $x\in U$ выполняется $\mu_A(x)=1$

Основные определения

Непустое субнормальное множество А можно ***нормализовать по правилу***:

$$\mu'_A(x) = \frac{\mu_A(x)}{\sup\limits_U \mu_A(x)}$$



Точка перехода нечеткого множества А – элемент

$$x \in U : \mu_A(x) = 0,5$$

Четкое множество А*, ближайшее к нечеткому множеству А задается при помощи функции принадлежности

$$\mu_{A*}(x) = \begin{cases} 0, & \mu_A(x) < 0,5 \\ 1, & \mu_A(x) > 0,5 \\ 0 \text{ или } 1, & \text{иначе} \end{cases}$$

Основные определения

Нечеткое множество А называется ***одноточечным***, если его носитель состоит из единственной точки, обозначается

$$A = \mu / x$$

Нечеткое множество А, состоящее из конечного числа элементов можно рассматривать как объединение составляющих его одноточечных множеств

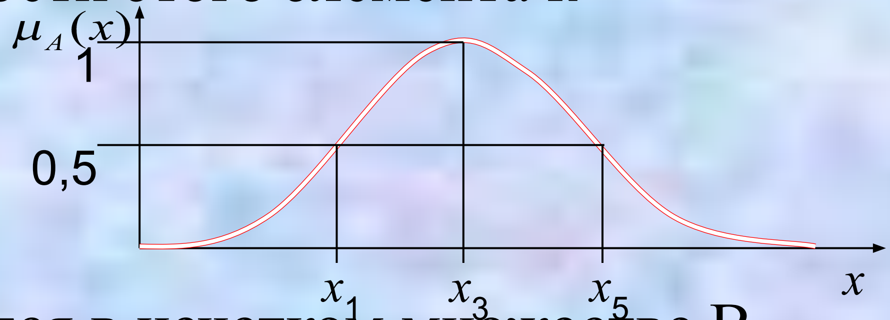
$$A = \mu_1 / x_1 + \ldots + \mu_n / x_n = \sum_{i=1}^{n} \mu_i / x_i$$

а при бесконечном числе элементов:

$$A = \int_U \mu_A(x) / x$$

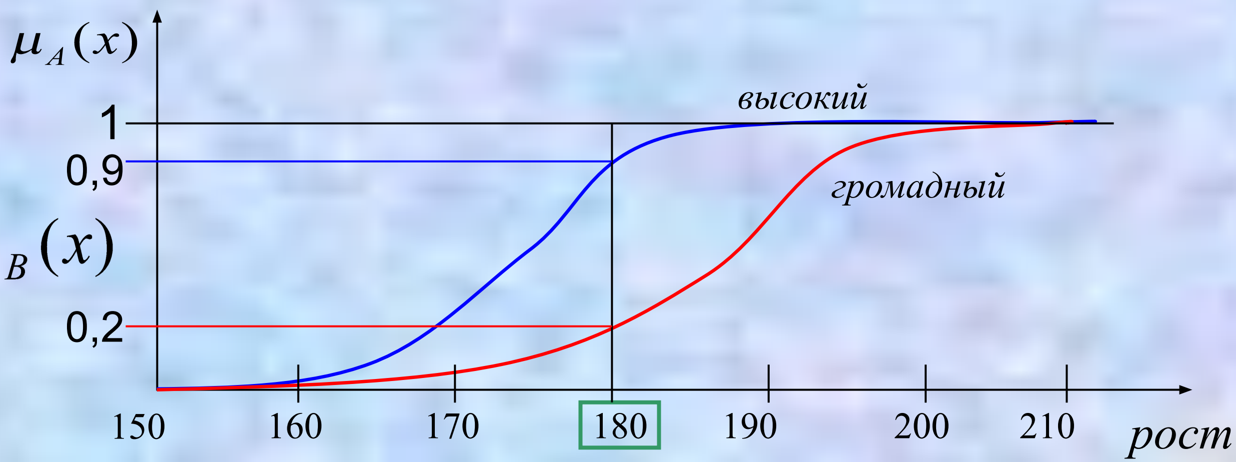
Основные определения

Нечеткие множества А и В ***равны***, если значение функции принадлежности любого элемента $x \in U$ к множеству А равно значению функции принадлежности этого элемента к множеству В.



$$A = B \Leftrightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x), \forall x \in U$$

Нечеткое множество А содержится в нечетком множестве В (является ***подмножеством*** В) если значение функции принадлежности любого элемента $x \in U$ к множеству А меньше или равно значению функции принадлежности этого элемента к множеству В.



$$A \subset B \Leftrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$$

Операция «дополнение»

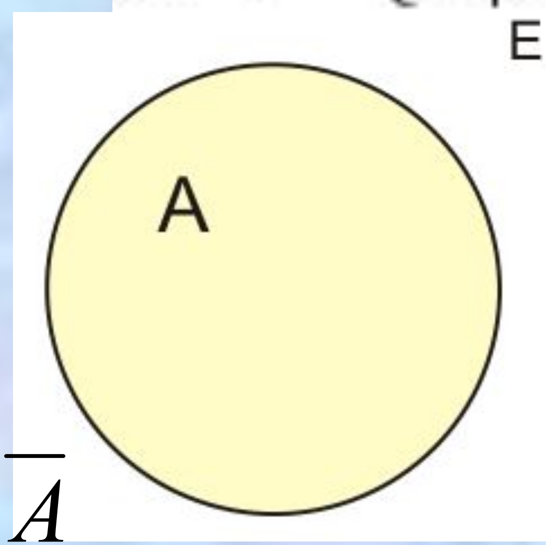
- ***Дополнение*** в теории обычных (четких) множеств — это семейство элементов, не принадлежащих данному множеству.

$$\overline{A} := \{x | x \notin A\}$$

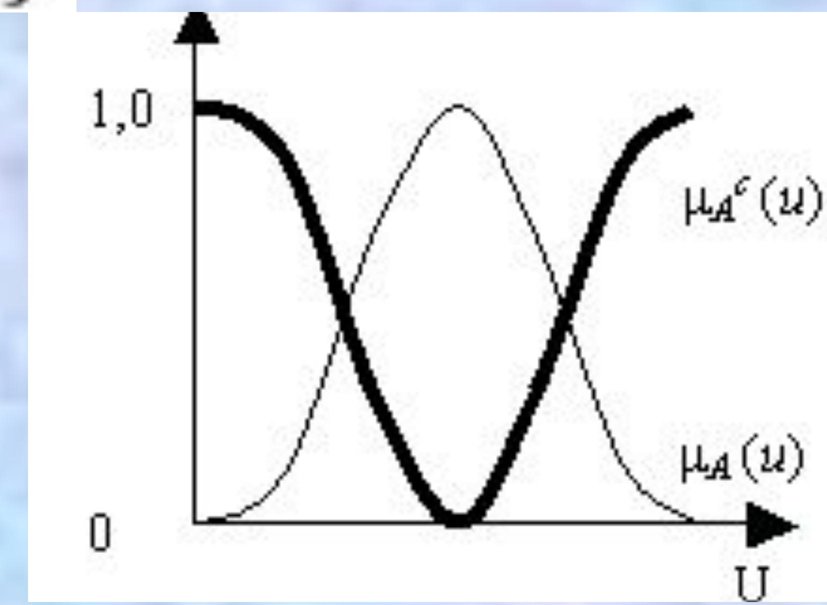
- ***Дополнение*** нечеткого множества А определяется как

$$\overline{A} = (x, \mu_{\overline{A}}(x))$$

где $\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$

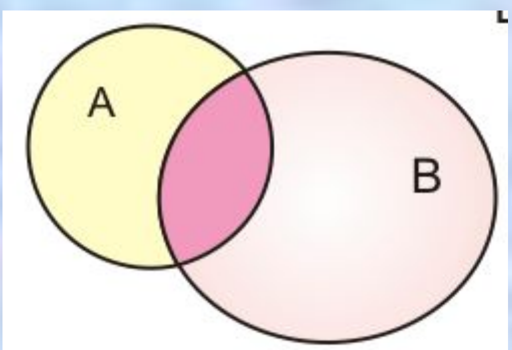


$\overline{A}$



Операция «пересечение»

- ***Пересечение множеств*** в теории четких множеств — это множество, состоящее из элементов, которые принадлежат одновременно всем данным множествам.



$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

Для определения ***пересечения*** нечетких множеств наибольшей популярностью пользуются следующие три группы операций:

Максиминная

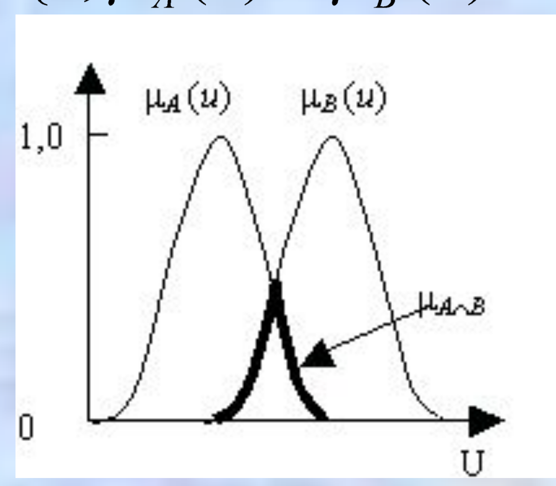
$$\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

Алгебраическая

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x)\mu_B(x)$$

Ограниченная

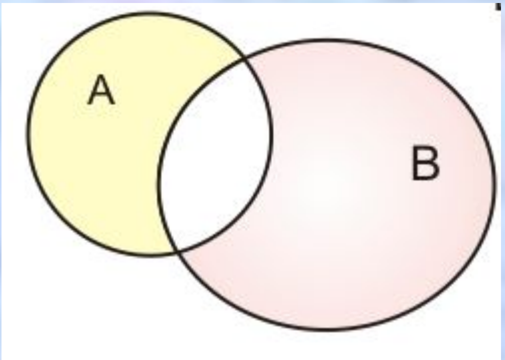
$$\mu_{A \cap B}(x) = \max\{0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1\}$$



Операция «объединение»

Объединение множеств в теории четких множеств — это множество, содержащее в себе все элементы исходных множеств.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$



Для определения ***объединения*** нечетких множеств наибольшей популярностью пользуются следующие три группы операций:

Максиминная

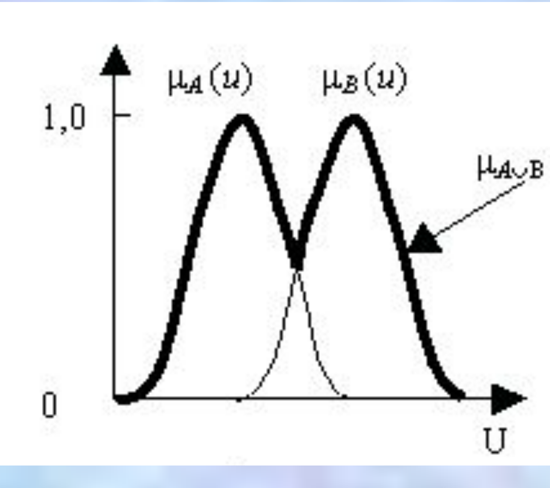
$$\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

Алгебраическая

$$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x)$$

Ограниченная

$$\mu_{A \cup B}(x) = \min\{1, \mu_A(x) + \mu_B(x)\}$$

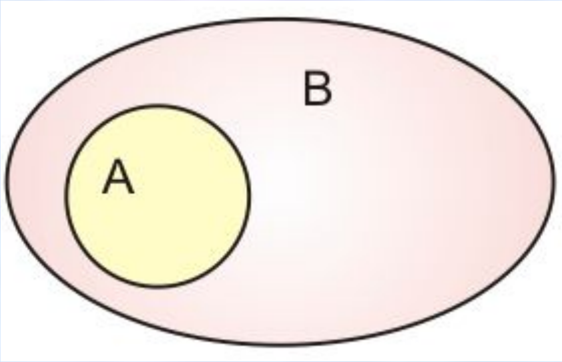


Операция «включение»

В теории четких множеств, множество А содержится во множестве В (множество В ***включает*** множество А), если каждый элемент А есть элемент В:

$$A \subset B :\Leftrightarrow x \in A \Rightarrow x \in B$$

В этом случае А называется подмножеством В, В — надмножеством А.



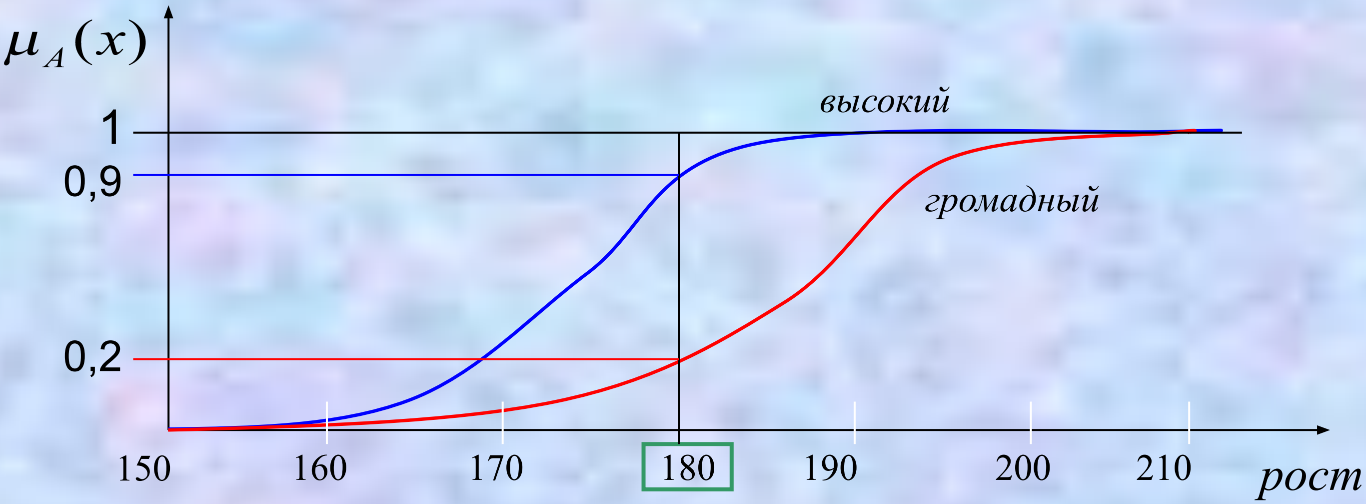
Нечеткое множество А ***содержится в нечетком множестве*** В (является подмножеством В) если для всех элементов U значение функции принадлежности к множеству А меньше или равно значению функции принадлежности к множеству В:

$$A \subset B \Leftrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$$

В случае, если условие $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ выполняется не для всех $x \in U$, говорят о ***степени включения*** нечеткого множества А в нечеткое множество В.

Операция «включение»

Пример:



Операция «равенство»

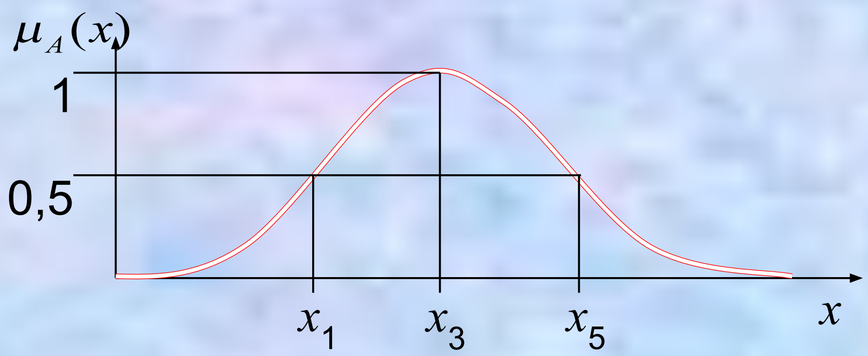
В теории четких множеств, два множества называются ***равными***, если они являются подмножествами друг друга:

$$A = B :\Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$$

Равенство нечетких множеств:

$$A = B \Leftrightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x), \forall x \in U$$

В случае, если значения функций принадлежности $\mu_A(x), \mu_B(x)$ почти равны между собой, говорят о степени равенства нечетких множеств А и В



Степень включения и степень равенства

Степенью включения нечеткого множества А в нечеткое множество В называется величина

$$\eta(A \subset B) = 1 - \max_{x \in T}(\mu_A(x) - \mu_B(x))$$

$$T = \{x \in U, \mu_A(x) > \mu_B(x)\}$$

Степень включения может принимать любые значения из отрезка [0,1].

Степенью равенства нечетких множеств А и В называется величина

$$\rho(A = B) = 1 - \max_{x \in T} |\mu_A(x) - \mu_B(x)|$$

$$T = \{x \in U, \mu_A(x) \neq \mu_B(x)\}$$

Степень равенства может принимать любые значения из отрезка [0,1].

$$\boxed{\rho(A = B) = \eta(A \subset B) \cap \eta(B \subset A)}$$

Операции «концентрирование» и «растяжение»

Степенью е *нечеткого множества А называется нечеткое множество*

$$A^e = \{\langle x / \mu_{A^e}(x) \rangle\}$$

Операция **концентрации**

В общем случае: $CON(A) = A^k$

$$k > 0, \ \ k - целое$$

Результатом применения операции концентрирования к нечеткому множеству А является *уменьшение степени принадлежности* элементов к этому множеству. В естественном языке применение операции концентрирования к значению лингвистической переменной соответствует использованию усиления «*очень*».

Операции «концентрирование» и «растяжение»

<u>Операция **растяжения**</u>

В общем случае:

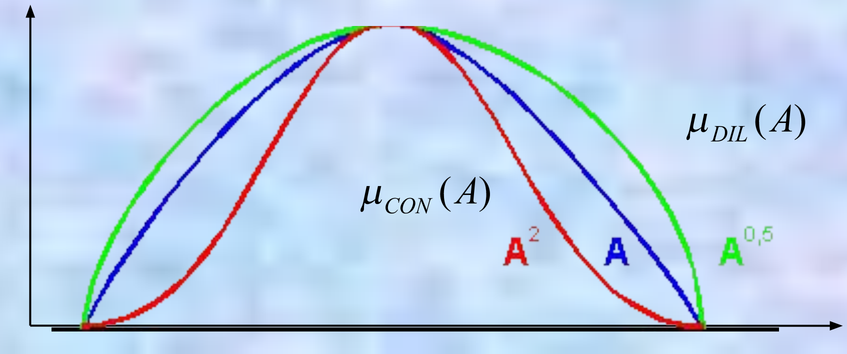
$$DIL(A) = A^{\frac{1}{k}}, \quad k > 0, \quad k - целое$$

В частном случае:

$$DIL(A) = A^{0,5}$$

Операция растяжения *повышает степень нечеткости описания*.

В естественном языке применение операции концентрирования к значению лингвистической переменной соответствует использованию слов «*достаточно*» или «*более-менее*».



Примеры отрицаний

Классическое отрицание	$\lambda(\mu) = \overline{\mu}(x) = 1 - \mu(x)$
Квадратичное отрицание	$\lambda(\mu) = \sqrt{1 - \mu^2}$
Отрицание Сугено	$\lambda(\mu) = \dfrac{1 - \mu}{1 + k \cdot \mu}, \quad -1 < k < \infty$
Дополнение порогового типа	$\lambda(\mu) = \begin{cases} 1, & если \;\; \mu \le \alpha \\ 0, & если \;\; \mu > \alpha \end{cases}$

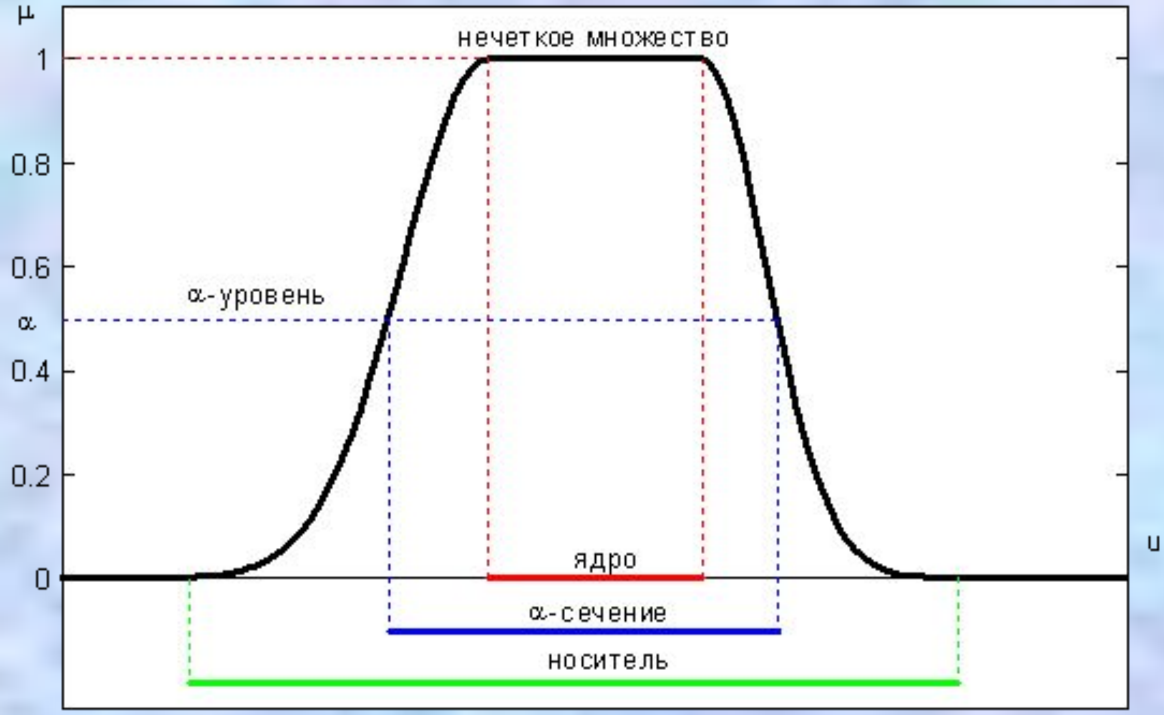
Множество уровня α

Множеством уровня α (α-срезом) нечеткого множества А называется четкое подмножество универсального множества U, определяемое по формуле $\boxed{A_\alpha = \{x \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}}$ $\alpha \in [0,1]$

Множество строгого уровня определяется в виде

$$A_\alpha = \{x \mid \mu_A(x) > \alpha\}$$

α – некоторый порог. Порог α=0.5 называется *точкой перехода*.



Теорема о декомпозиции. Любое нечеткое множество А можно представить в виде:

$$\boxed{A = \max_\alpha \alpha \times A_\alpha}$$

Нечеткие отношения

Обычные (четкие) бинарные отношения

- ***Бинарным отношением*** R на множестве *U* называется некоторое подмножество декартова произведения $U \times U$.
- В соответствии с этим определением задать отношение R на множестве *U* означает указать все пары (*x*, *y*), которые связаны отношением R. Для обозначения того, что элементы (*x*, *y*) связаны отношением, будем пользоваться следующими двумя эквивалентными формами записи: xRy или $(x, y) \in R$.

Обычные (четкие) бинарные отношения

Если множество *U*, на котором задано отношение R, конечно, то отношение задается в двух формах.

в виде матрицы

$$R = \left\| r_{ij} \right\| \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}$$

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } (x_i, x_j) \in R \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

в виде ориентированного графа, в котором вершины соответствуют элементам множества, а дуга (*x*,*y*) указывает на то, что $(x, y) \in R$

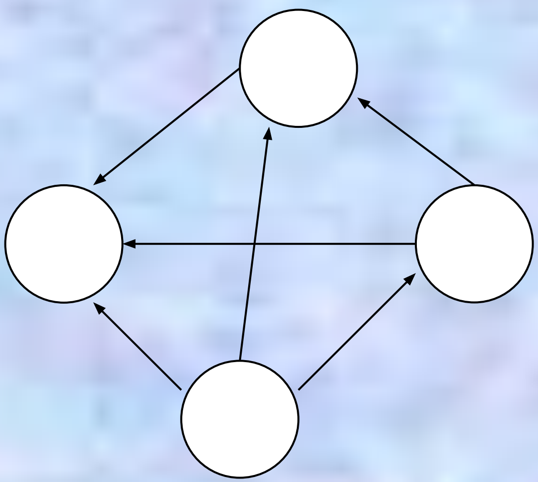
Примеры

Пусть дано множество $U=(x_1, x_2, x_3, x_4)$,
где
x_1 – собака
x_2 – лось
x_3 – бегемот
x_4 – слон
Отношение А=«быстрее» задается следующим образом:

в виде ориентированного графа

в виде матрицы

	Собака	Лось	Бегемот	Слон
Собака	0	0	0	1
Лось	1	0	0	1
Бегемот	1	1	0	1
Слон	0	0	0	0



Нечеткие бинарные отношения

- ***Нечетким бинарным отношением*** R на универсальном множестве называется нечеткое подмножество декартова произведения $U = U \times U$, которое характеризуется такой функцией принадлежности $\mu_R(x, y)$, что $U \times U \xrightarrow{\mu_R} [0,1]$. Причем $\mu_R(x, y)$ принимается как субъективная мера выполнения отношения xRy

- Если нечеткое отношение R на X конечно, то его функция принадлежности $\mu_R(x, y)$ задается в виде квадратной матрицы с элементами $\|r_{ij}\|$, $i, j = \overline{1, n}$ $r_{ij} \in [0,1]$

- Если $r_{ij} = \alpha$, то это означает, что степень выполнения отношения $x_i R x_j$ равна α.

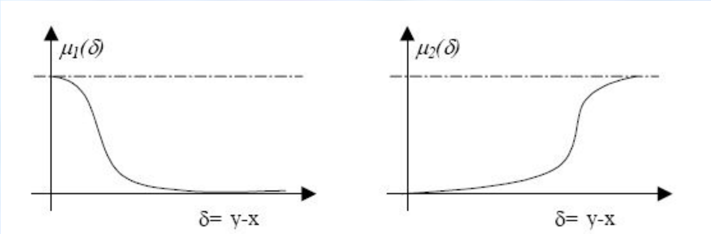
Объединение

- Нечеткое отношение $R = R_1 \cup R_2$ называется ***объединением*** нечетких отношений R_1 и R_2, если его функция принадлежности определяется выражением

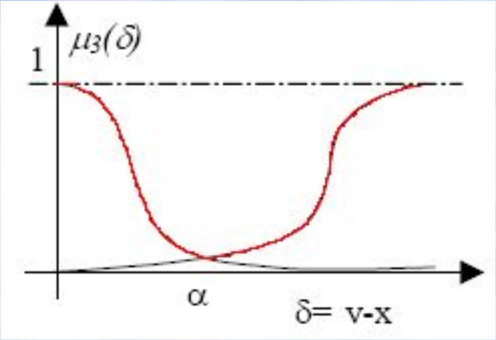
$$\boxed{\mu_R(x,y) = \max\{\mu_{R_1}(x,y), \mu_{R_2}(x,y)\}}$$

- <u>Пример.</u>

Пусть даны два нечетких отношения xR_1y= «числа *x* и *y* очень близкие» и xR_2y = «числа *x* и *y* очень различные». Объединением отношений R_1 и R_2 является



отношение xR_3y = «числа *x* и *y* очень близкие или/и очень различные», определяющееся кривой :



$$\mu_{R_3}(x,y) = \begin{cases} \mu_{R_1}(x,y), & 0 \le |y-x| \le \alpha \\ \mu_{R_2}(x,y), & \alpha \le |y-x| \end{cases}$$

где *α* – такое значение | y – *x* |, при котором

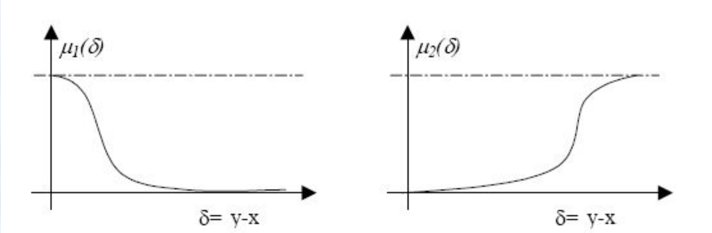
$$\mu_{R_1}(x,y) = \mu_{R_2}(x,y)$$

Пересечение

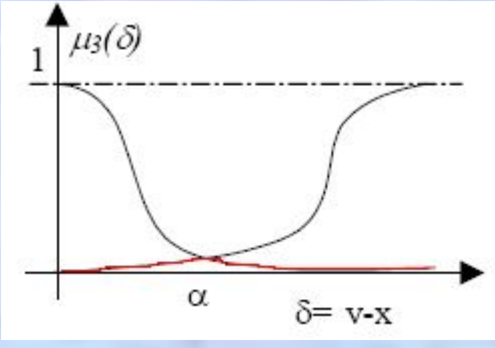
- Нечеткое отношение $R = R_1 \cap R_2$ называется ***пересечением*** нечетких множеств R_1 и R_2, если $\boxed{\mu_R(x, y) = \min\{\mu_{R_1}(x, y), \mu_{R_2}(x, y)\}}$

- <u>Пример.</u>

Пусть даны два нечетких отношения xR_1y = «числа x и y очень близкие» и xR_2y = «числа x и y очень различные».



Пересечением отношений R_1 и R_2 является отношение xR_3y = «числа x и y очень близкие или/и очень различные», определяющееся кривой :



$$\mu_{R_3}(x, y) = \begin{cases} \mu_{R_2}(x, y), & 0 \le |y - x| \le \alpha \\ \mu_{R_1}(x, y), & \alpha \le |y - x| \end{cases}$$

где α – такое значение | y – x |, при котором

$$\mu_{R_1}(x, y) = \mu_{R_2}(x, y)$$

Нечеткая логика

Лингвистическая переменная

- ***Лингвистическая переменная*** – переменная, значением которой являются слова или предложения естественного или искусственного языка.

Например,

«возраст» – лингвистическая переменная, если она принимает значения «молодой», «немолодой», «старый», «не очень старый» и т.д.

Лингвистическая переменная

- ***Лингвистическая переменная*** описывается набором $(x, T(x), U, G, M)$ где
- *x* – название переменной
- *T(x)* – совокупность ее лингвистических значений (терм-множеств), т.е. множество названий лингвистических значений переменной *x*, причем каждое из таких значений является нечеткой переменной со значениями из универсального множества *U*
- *U* – универсальное множество
- *G* – синтаксическое правило, порождающее термины множества *T(x*), т.е. названия значений переменной *X*
- *M* – семантическое правило, которое ставит в соответствие каждой нечеткой переменной $\tilde{x}$ ее смысл $M(\tilde{x})$, т.е. нечеткое подмножество $M(\tilde{x})$ универсального множества *U*

Лингвистическая переменная

- Конкретное название $\tilde{x}$, порожденное синтаксическим правилом G, называется ***термом***.
- Терм, который состоит из одного слова или из нескольких слов, всегда фигурирующих вместе друг с другом, называется ***атомарным термом***.
- Терм, который состоит из более чем одного атомарного терма, называется ***составным термом***.

Пример

- Рассмотрим лингвистическую переменную с именем *x* =«*температура в комнате*». Тогда оставшуюся четверку $< T(x), U, G, M, >$ можно определить так:

1) универсальное множество *U*=[10,30];
2) терм-множество T={«холодно», «комфортно», «жарко»} с такими функциями принадлежностями:

$$\mu_{холодно}(u) = \frac{1}{1 + (\frac{u - 10}{7})^{12}} \qquad \mu_{комфортно}(u) = \frac{1}{1 + (\frac{u - 20}{3})^{6}} \qquad \mu_{жарко}(u) = \frac{1}{1 + (\frac{u - 30}{6})^{10}}$$

3) синтаксическое правило *G*, порождающее новые термы с использованием квантификаторов «и», «или», «не», «очень», «более-менее» и других;
4) семантическое правило М будет являться процедурой, ставящей каждому новому терму в соответствие нечеткое множество из X по правилам, заданным в таблице:

Квантификатор	**Функция принадлежности**
не t	$1 - \mu_t(u)$
очень t	$(\mu_t(u))^2$
более-менее t	$\sqrt{\mu_t(u)}$
А и В	$\max(\mu_A(x), \mu_B(x))$
А или В	$\min(\mu_A(x), \mu_B(x))$

Лингвистическая переменная истинности

- В каждодневных разговорах мы часто характеризуем степень истинности утверждения посредством таких выражений, как «очень верно», «совершенно верно», «более или менее верно», «ложно», «абсолютно ложно» и т.д.

- Сходство между этими выражениями и значениями лингвистической переменной наводит на мысль о том, что в ситуациях, когда истинность или ложность утверждения определены недостаточно четко, может оказаться целесообразным трактовать **ИСТИННОСТЬ** как лингвистическую переменную, для которой «истинно» и «ложно» — лишь два атомарных терма в терм-множестве этой переменной.

- Такую переменную будем называть ***лингвистической переменной истинности***, а ее значения — лингвистическими значениями истинности.

Приближенные вычисления

Под ***приближенными рассуждениями*** понимается процесс, при котором из нечетких посылок получают некоторые следствия, возможно, тоже нечеткие.

Приближенные рассуждения лежат в основе способности человека понимать естественный язык, разбирать почерк, играть в игры, требующие умственных усилий, в общем, принимать решения в сложной и не полностью определенной среде. Эта способность рассуждений в качественных, неточных терминах отличает интеллект человека от интеллекта вычислительной машины.

Основным правилом вывода в традиционной логике является правило ***modus ponens***, согласно которому мы судим об истинности высказывания B по истинности высказываний A и A→B. Например, если A — высказывание «Джон в больнице», B — высказывание «Джон болен», то если истинны высказывания «Джон в больнице» и «Если Джон в больнице, то он болен», то истинно и высказывание «Джон болен».

Правило modus ponens

- Пусть А и В — нечеткие высказывания и μ_A, μ_B — соответствующие им функции принадлежности. Тогда импликации А→В будет соответствовать некоторая функция принадлежности $\mu_{A \to B}$
- По аналогии с традиционной логикой, можно предположить, что $A \to B \equiv \overline{A} \vee B$. Тогда

$$\mu_{A \to B}(x, y) = \max\{1 - \mu_A(x), \mu_B(y)\}$$

- Но это НЕ единственный способ вычисления импликаци

Различные импликации

Larsen	$\mu_{A\to B}(x,y)=\mu_A(x)\mu_B(y)$
Lukasiewicz	$\mu_{A\to B}(x,y)=\min\{1,1-\mu_A(x)+\mu_B(y)\}$
Mamdani	$\mu_{A\to B}(x,y)=\min\{\mu_A(x),\mu_B(y)\}$
Standard Strict (Godel)	$\mu_{A\to B}(x,y)=\begin{cases}1, & \textit{если}\ \ \mu_A(x)\le\mu_B(y)\\ 0, & \textit{в противном случае}\end{cases}$
Gaines	$\mu_{A\to B}(x,y)=\begin{cases}1, & \textit{если}\ \ \mu_A(x)\le\mu_B(y)\\ \dfrac{\mu_B(y)}{\mu_A(x)}, & \textit{в противном случае}\end{cases}$
Kleene-Dienes	$\mu_{A\to B}(x,y)=\max\{1-\mu_A(x),\mu_B(y)\}$
Kleene-Dienes-Lu	$\mu_{A\to B}(x,y)=1-\mu_A(x)+\mu_A(x)\mu_B(y)$

Нечеткая база знаний

- Логико-лингвистические методы описания систем основаны на том, что поведение исследуемой системы описывается в естественном (или близком к естественному) языке в терминах лингвистических переменных. Входные и выходные параметры системы рассматриваются как лингвистические переменные, а качественное описание процесса задается совокупностью высказываний следующего вида:

L_1: **если** A_{11} и/или A_{21} и/или ... и/или A_{1m}, **то** B_{11} и/или ... и/или B_{1n},

L_2: **если** A_{21} и/или A_{22} и/или ... и/или A_{2m}, **то** B_{21} и/или ... и/или B_{2n},

....

L_k: **если** A_{k1} и/или A_{k2} и/или ... и/или A_{km}, **то** B_{k1} и/или ... и/или B_{kn},

где A_{ij}, i=1,2…,k j=1,2,…,m — нечеткие высказывания, определенные на значениях входных лингвистических переменных, а B_{ij}, i=1,2…,k j=1,2,…,m — нечеткие высказывания, определенные на значениях выходных лингвистических переменных. Эта совокупность правил носит название ***нечеткой базы знаний***.

Нечеткий логический вывод

- ***Нечетким логическим выводом*** (fuzzy logic inference) называется аппроксимация зависимости $Y=f(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ каждой выходной лингвистической переменной от входных лингвистических переменных и получение заключения в виде нечеткого множества, соответствующего текущим значениям входов, с использованием нечеткой базы знаний и нечетких операций.
- Функциональная схема процесса нечеткого вывода в упрощенном виде:

Нечеткие числа

Основные определения

- ***Нечеткое число*** — это нечеткое подмножество универсального множества действительных чисел, имеющее нормальную и выпуклую функцию принадлежности, то есть такую, что:
  - существует значение носителя, в котором функция принадлежности равна единице (условие нормальности)
  - при отступлении от своего максимума влево или вправо функция принадлежности не возрастает (условие выпуклости)

Основные определения

- Нечеткое число А ***унимодально***, если условие $\mu_A(x) = 1$ справедливо только для одной точки действительной оси.

- Выпуклое нечеткое число А называется ***нечетким нулем***, если

$$\mu_A(0) = \sup_U(\mu_A(x))$$

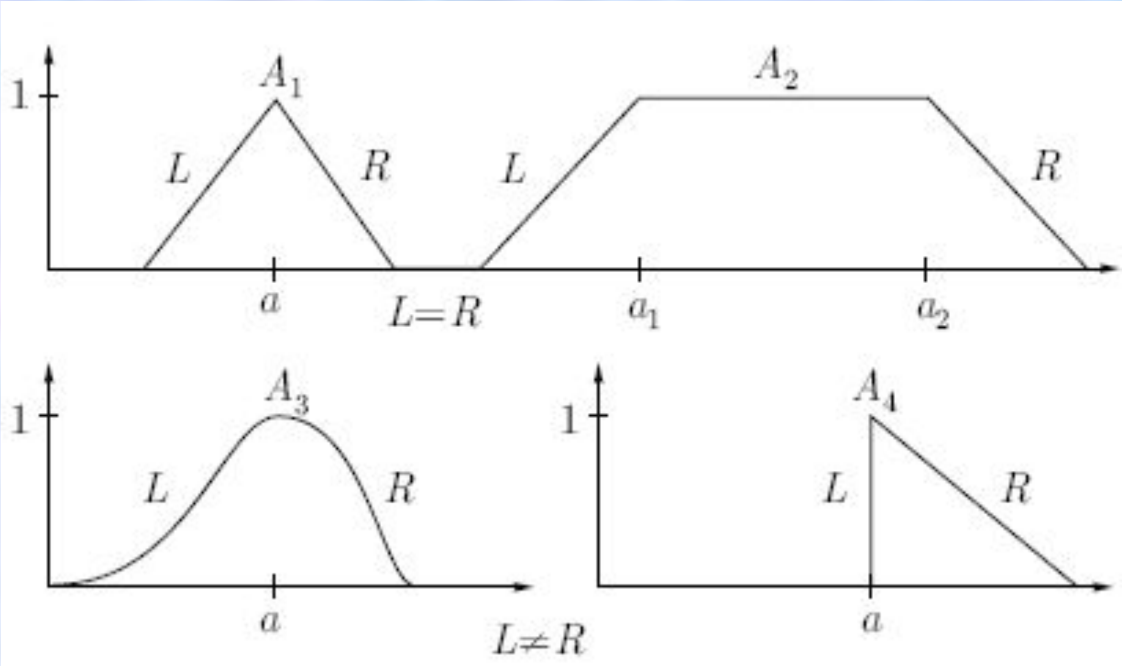
- Подмножество S_A называется ***носителем*** нечеткого числа А, если $S_A = \{x \mid \mu_A > 0\}$

- Нечеткое число А ***положительно***, если $\forall x \in S_A \Rightarrow x > 0$, и ***отрицательно***, если $\forall x \in S_A \Rightarrow x < 0$

Нечеткие числа (L-R)-типа

- ***Нечеткие числа (L-R)-типа*** — это разновидность нечетких чисел специального вида, задаваемых по определенным правилам с целью снижения объема вычислений при операциях над ними.

- ***Функции принадлежности*** нечетких чисел ***(L-R)-типа***



Нечеткие числа (L-R)-типа

- Пусть L и R– функции (L-R)-типа. Унимодальное нечеткое число A с ***модой a*** (т.е. $\mu_A(a)=1$) задается с помощью L и R следующим образом:

$$\mu_A(x)=\begin{cases} L(\frac{a-x}{\alpha}), & если \;\; x \le a \\ R(\frac{x-a}{\beta}), & если \;\; x \ge a \end{cases}$$

где a – мода; α>0, β>0 – левый и правый коэффициенты нечеткости

- Таким образом, при заданных L и R нечеткое число (унимодальное) задается тройкой A=(a;α,β).

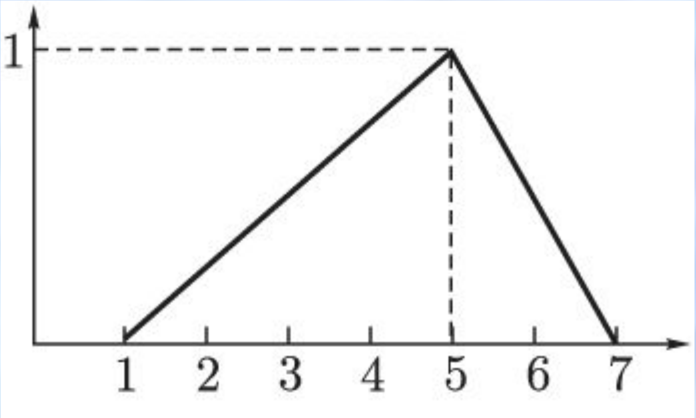
Треугольные числа

- ***Треугольным нечетким числом*** А называется тройка <*a*,*b*,*c*> (*a*≤*b*≤*c*) действительных чисел, через которые его функция принадлежности $\mu_A(x)$ определяется следующим образом:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{если } x \in [a;b] \\ \dfrac{x-c}{b-c}, & \text{если } x \in [b;c] \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

- Второе число *b* тройки <*a*,*b*,*c*> обычно называют ***модой*** или ***четким значением нечеткого треугольного числа***. Числа *a* и *c* характеризуют ***степень размытости четкого числа***.

Например, нечеткое треугольное число А=<1,5,7>, которое лингвистически можно проинтерпретировать как «около 5» или «приблизительно 5»:



Умножение треугольных чисел

Простейший способ (для треугольных чисел с линейными функциями принадлежности)

A=<a_A,b_A,c_A> и B=<a_B,b_B,c_B> — треугольные нечеткие числа.

Например, умножение чисел A и B производится по следующим правилам: C=A*B также является треугольным числом и характеризуется тройкой <a_C,b_C,c_C>, где

$$a_C = \min\{a_A * a_B, a_A * c_B, c_A * a_B, c_A * c_B\}$$

$$b_C = b_A * b_B$$

$$c_C = \max\{a_A * a_B, a_A * c_B, c_A * a_B, c_A * c_B\}$$

Недостаток: Размытость произведения зависит не только от размытости сомножителей, но и от того, какое место данные нечеткие числа занимают на числовой оси.

Например, пусть A_1=<1,2,3>, B_1=<2,3,4> и A_2=<99,100,101>, B_2=<100,101,102>. Тогда $A_1 \cdot B_1 =< 2,6,12 >$ и $A_2 \cdot B_2 =< 9900,10100,10302 >$. Число $A_2 \cdot B_2$ получается гораздо более размытое, чем $A_1 B_1$.