План построения графика функции с помощью производной

1) Найти область определения функции и определить точки разрыва если они существуют
2) Выяснить является ли функция четно или нечетной, проверить её на периодичность
3) Найти точки пересечения графика с осями координат, если это возможно
4) Найти стационарные и критические точки
5) Найти точки экстремума функции и промежутки монотонности
6) Определить промежутки вогнутости, выпуклости и точки перегиба графика функции
7) Найти координаты ещё нескольких точек (для большей точности)

Как найти промежутки выпуклости, вогнутости и точку перегиба графика функции

Промежутки выпуклости и вогнутости кривой можно находить с помощью производной.

Теорема. (*признак вогнутости и выпуклости*)

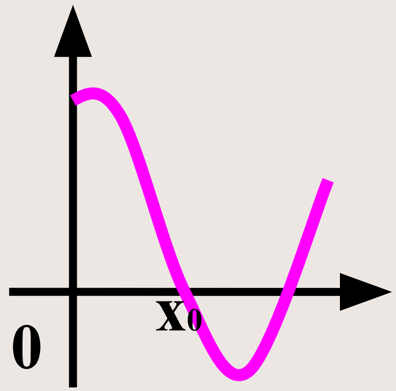
Если **вторая производная** функции **y=f(x)** в данном промежутке **положительна**, то **кривая вогнута** в этом промежутке, а если **отрицательна – выпукла** в этом промежутке.

Для нахождения интервалов выпуклости графика функции используют следующий алгоритм:

1) Находят $f'(x)$, а затем $f''(x)$
2) Находят точки, в которых $f''(x) = 0$
3) Отмечают полученные точки на числовой прямой и получают несколько промежутков области определения функции
4) Устанавливают знаки второй производной в каждом из полученных промежутков. Если $f''(x) < 0$, то на этом промежутке кривая выпукла; если

   $f''(x)>0$ - вогнута

Точкой перегиба кривой называется такая точка, которая отделяет выпуклую часть кривой от вогнутой её части.



Точкой перегиба кривой графика функции будут те точки, в которых $f''(x) = 0$ и при переходе через неё вторая производная меняет знак.

Найти интервалы выпуклости и точку перегиба функции

Решение. $$y = x^4 - 6x^2 + 4$$

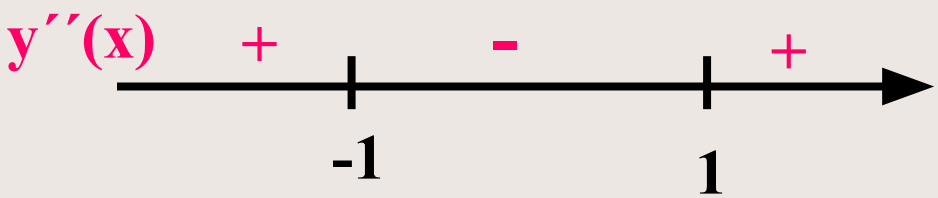
Найдем **y´(x)** и **y´´(x)**:

y´(x) = $4x^3-12x$ => **y´´(x)** = $12x^2-12=12(x^2-1)$

Найдём стационарные точки второго порядка,

т.е. **y´´(x)=0** => $12(x^2-1)=0$ => $x^2-1=0$ => $x^2=1$

$\Rightarrow$ $\mathbf{x = \pm 1}$



Значит: при x є (-∞; -1) и (1;+ ∞) функция вогнута, а при x є (-1:1) – выпукла; точки перегиба x= ±1

Например: исследовать функцию

$y = 2x^3+3x^2 -1$ и построить её график

Решение. $D(y)= (-\infty; +\infty)$, четность не определена

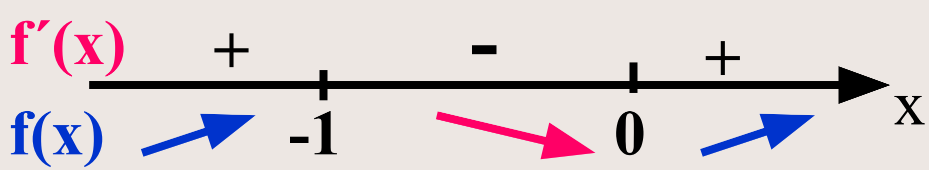
Найдем стационарные точки:

т.к. $y' = 6x^2+6x = 6x(x+1) \Rightarrow 6x(x+1)=0$

тогда $x=0$ и $x=-1$ стационарные точки

Найдем точки экстремума:

т.к.



и $x=-1$ – точка максимума

$x= 0$ – точка минимума

Найдем промежутки монотонности:

при **x є (-∞; -1] и [0; + ∞) -** функция возрастает

при **x є [-1; 0] -** функция убывает

Найдем точки пересечения графика с осями координат:

если x=0, то y=-1 => **(0;-1)**

если y=0, то x= -1 => **(-1; 0)**

<u>Найдем ещё некоторые точки</u> (контрольные, дополнительные):

- т.к. **x=-1** – точка максимума, то $y_{max}=0$ => **(-1; 0)** -точка локального максимума
- т.к. **x= 0** – точка минимума, $y_{min}=-1$ => **(0;-1)** -точка локального минимума
- если x=1, то y=4 => **(1;4)**
- если x=-2, то y=-5 => **(-2;-5)**

Удобнее все эти данные заполнять в виде таблицы.

Составим таблицу:

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;+\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↑	0 (-1;0) max	↓	-1 (0;-1) min	↑

Найдем $f''(x)$.

$f''(x) =(6x(x+1))' = 12x+6 = 6(2x+1)$

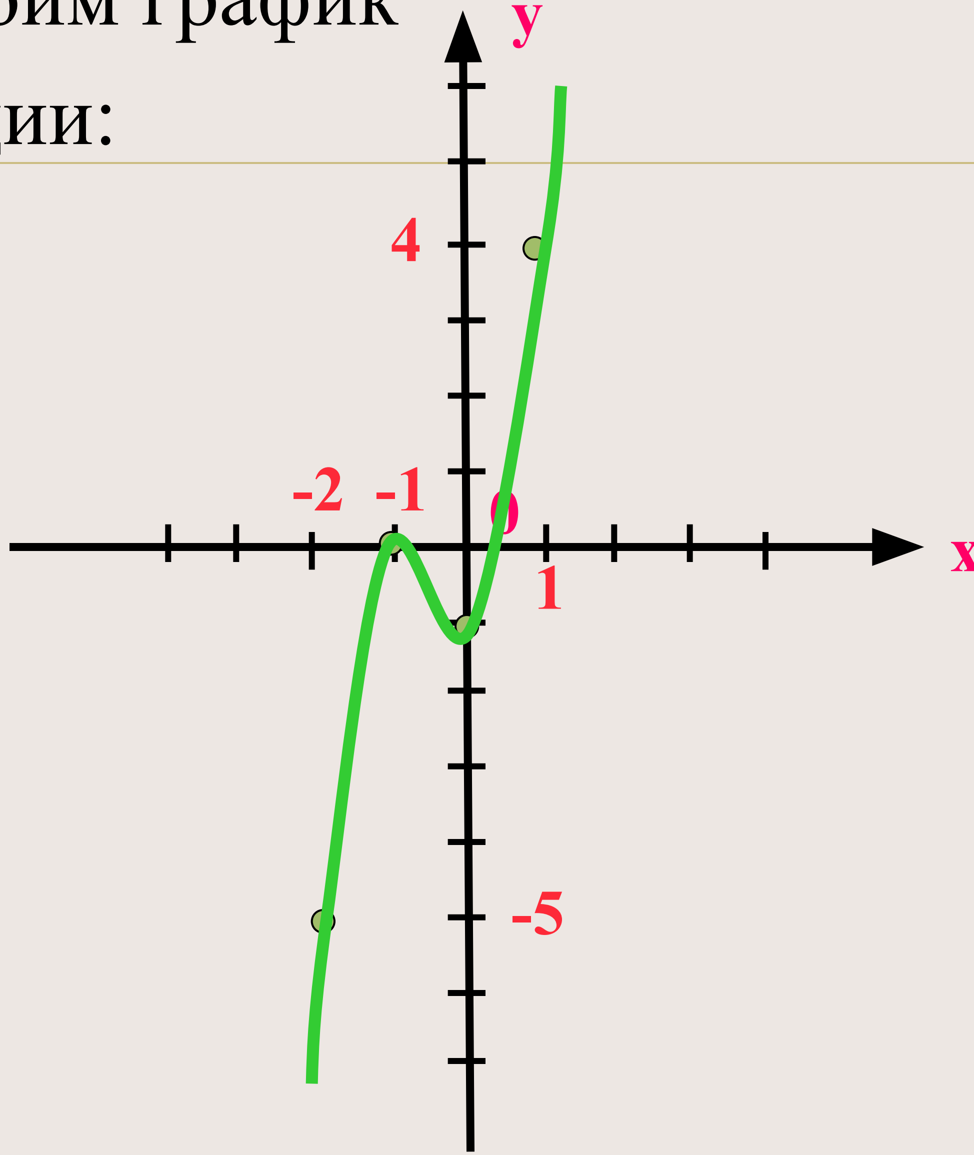
$f''(x)=0 \Rightarrow 6(2x+1)=0 \Rightarrow x = -0{,}5$ - точка перегиба

т.к. при $x=-1$(левее $x=-0{,}5$) $f''(x) <0$,

а при $x=-0{,}1$(правее $x=-0{,}5$) $f''(x) >0$

Найдем её координаты: $(-0{,}5;\ ?\ )$, если это не трудно

Построим график
функции:



Исследовать функцию и построить её график

1) $y = 3x^2 - x^3$ Отметка3- один из 1,2,

2) $y = -9x + x^3$

3) $y = x^3 - 3x^2 + 2$

4) $y = -x^3 + 6x^2 - 5$

5) $y = 3x^3 + x^2 - 8x - 7$

6) $y = (x)/(1+x^2)$